

מדריך למורה – כיתה יב 3 יחידות לימוד התפלגות נורמלית, תכנון לינארי, מודל ריבועי

מבוא

מתמטיקה לתלמידי כיתה י"ב - 3 יחידות לימוד – חלק א

התכנים המתמטיים באשכול זה מחולקים ל- 3 יחידות:

- יחידה 1 – התפלגות נורמלית
- יחידה 2 – תכנון לינארי
- יחידה 3 – מודל ריבועי

מה אפשר למצוא בספר ?

- (1) **משימת פתיחה** זוהי לרוב משימה שהשאלות בה הן איכותיות. המשימות לרוב מלוות בתרשימים, מפות ותיאור אורייני העושה שימוש במושגים המתמטיים הנלמדים. השאלות מעוררות **שיח בכיתה** ומדגישות את הנחיצות בלימוד הנושא המתמטי שבפרק. אנו ממליצים לעשות את המשימה בכיתה **ולדון עליה**. משימות הפתיחה וקטעי המידע מהווים כניסה רכה של התלמידים ללימוד הנושא המתמטי. לעיתים מופיעה גם משימה חישובית אחרי משימת הפתיחה.
- (2) **תאוריה** מלווה בהסברים, בהגדרות ובדוגמאות פתורות. המסקנות, ההגדרות והסיכומים מוקפים במסגרת וכתובים על רקע תכלת.
- (3) **קטעי מידע** מחיי היומיום המאפשרים המחשה לשימוש בידע המתמטי הנלמד ולצורך במדידות ובחישובים בחיי היומיום.
- (4) במידת הצורך כתוב **סיכום** של כל מה שנלמד בפרק. הסיכום כתוב במסגרת על רקע תכלת. כאשר מופיעה מסקנה בסיכום שיש לה גיבוי בדוגמה פתורה, יש גם הפנייה לדוגמה המתאימה.
- (5) בסוף כל סעיף יש **תרגילים לעבודה עצמית**. התרגילים מסודרים לפי רמת קושי עולה. לעיתים התרגילים הראשונים הם תרגילים בסיסיים המתרגלים את נושא הפרק. בהמשך יש שאלות אורייניות עם "סיפור", ובתוכן שזורים חישובים מתמטיים בנושא הפרק. בסוף כל פרק יש פתרונות סופיים.
- (6) בסוף 3 היחידות בספר יש **תרגילי סיכום** המכילים את כל החומר שנלמד עד כה. אנו ממליצים לפתור שאלות אלו כהכנה למבחן או כתרגול נוסף לתלמיד שמעוניין.
- (7) **נספחים:**
 1. שאלות נוספות לחזרה וחיזוק בפרקים השונים לפי הצורך.
 2. נוסחאון מתמטיקה 3 יח"ל.

בנספח זה מצורף הנוסחאון אותו יפגשו התלמידים בבחינת הבגרות לפי התוכנית החדשה.

מה אפשר למצוא במדריך למורה ?

- (1) **מבוא** לכל יחידה כולל הדגשים הקשורים לחומר הלימוד.
- (2) **פריסת הוראה מומלצת.** הפריסה כוללת: נושא לימוד והעמודים הרלוונטיים בספר הלימוד, מספר שעות ההוראה המומלץ והעמודים הרלוונטיים בספר הלימוד שבהם נמצאים התרגילים לעבודה עצמית.
- עיון:** מספר שעות ההוראה **גמיש**. יש להתאים את מספר שעות ההוראה בכל נושא לרמת התלמידים בכיתה ולמספר שעות ההוראה השבועיות בכל בית ספר. הדבר כמובן נתון לשיקול דעתו של המורה והוא יחליט באיזה נושא להעמיק ובאיזה נושא לא להעמיק.
- (3) **דגשים מתמטיים ופדגוגיים** בקשר לנושא הנלמד. נושאים של ידע מקדים, סעיפים שאנו ממליצים להדגיש או לדון בהם בכיתה ולהסב את תשומת לבם של התלמידים.

פריסת שעות הוראה כיתה י"ב - 3 יח"ל - תשפ"ז

■ בשנת הלימודים הקרובה, מועד חורף וקיץ תשפ"ז (שאלון 372) יילמדו כל הנושאים.

חודש: ספטמבר

מספר שעות הוראה: 15 שעות

הנושא הנלמד בחודש זה: התפלגות נורמלית

חודש	מספר שעות	נושא	היכן זה בספר "משבצת"
ספטמבר 2026	1	ייצוג ויזואלי וזיהוי של התפלגויות מסוגים שונים	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 1 עמודים 16-8
	1	תכונות גרף ההתפלגות הנורמלית וזיהוי הגרף על פי תכונותיו	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 1 עמודים 22-17
	1	מקומו של נתון ביחס לממוצע לפי סטיית תקן	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 1 עמודים 27-23
	2	החלק היחסי של האוכלוסייה מתוך גרף ההתפלגות הנורמלית	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 1 עמודים 41-28
	3	מציאת ערך משתנה מתאים לאחוז אוכלוסייה	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 1 עמודים 49-42
	2	שימוש בסימטריה של גרף ההתפלגות הנורמלית	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 1 עמודים 57-50
	2	חישוב ממוצע או סטיית תקן מתוך גרף ההתפלגות הנורמלית	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 1 עמודים 59-58
	3	ציון תקן	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 1 עמודים 16-8

חודש: אוקטובר**מספר שעות הוראה: 10 שעות****הנושאים הנלמדים בחודש זה: התפלגות נורמלית ומודל ריבועי**

חודש	מספר שעות	נושא	היכן זה בספרי "משבצת"
אוקטובר 2026	2	ציון תקן והתפלגות נורמלית	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 1 עמודים 8-16
	3	התפלגות נורמלית: תרגול מסכם	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 3 עמודים 8-16
	1	קודקוד פרבולה וציר סימטריה	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 3 עמודים 239-246
	1	תחומי עלייה וירידה של פרבולה	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 3 עמודים 247-251
	1	תחומי חיוביות ושליליות של פרבולה	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 3 עמודים 252-256
	2	סיכום – ייצוג גרפי של פונקציה ריבועית	כיתה י"ב – 3 יח"ל חלק א יחידה 3 עמודים 257-262

יחידה 1: התפלגות נורמלית

רציונל

ביחידה זו הרחבה של מושג ההתפלגות אותה פגשו התלמידים בשנים הקודמות. מתחילים עם הנושא המוכר ומכניסים בהדרגה עם ההתקדמות בלמידה מושגים חדשים נוספים. למשל:

- בסעיף א1 – תזכורת וחזרה קצרה על המושגים המוכרים (אוכלוסייה, מדגם, סוגי משתנים, מדדי מרכז וסטיית תקן).
- בסעיף א2 – התלמידים פוגשים ייצוג ויזואלי של התפלגויות מסוגים שונים.
- בסעיף א3 – זיהוי גרף ההתפלגות הנורמלית, תכונותיו ושימושיו.
- בסעיף ב4 – שימוש בסימטריה של גרף ההתפלגות הנורמלית
- בסעיף ג – עוסקים במושג ציון תקן משמעותו וחישובו.

תוכן מתמטי נדרש

- השוואה בין גרפים או בין נתונים בתוך גרף
- פתרון משוואות ממעלה ראשונה
- אחוזים
- קריאת נתונים מתוך גרף התפלגות ושימוש בהם:
- * למציאת הסתברות או חלק יחסי של קבוצה עם תכונה משותפת
- * מציאת תכונה של קבוצה בהינתן החלק היחסי שלה
- חישוב ציון תקן

דגשים מתמטיים ופדגוגיים**סעיף א: מושגי יסוד ותזכורות****סעיף 1א: מושגי יסוד**

תזכורת על מושגי היסוד שנלמדו.

סעיף 2א: ייצוג ויזואלי וזיהוי של התפלגויות מסוגים שונים**עמוד 9 –**

משימה עם התפלגות לא נורמלית המטרה להכיר בכוונה קודם התפלגות שאינה סימטרית לזהות היכן רוב הנתונים מרוכזים ולתת הטרמה לשאלה: מהי התפלגות סימטרית?

עמוד 11 –

דוגמה 1 - ממחישה התאמה של עקומת התפלגות לא סימטרית לתכונות נתונות של קבוצה.

עמוד 12 –

דוגמה 2 - עוסקת בהתאמה בין עקומת התפלגות סימטרית **מסוגים שונים** לתיאור קבוצה בעזרת ניתוח והבנה של הגרף.

סעיף 3א: תכונות גרף ההתפלגות הנורמלית וזיהוי הגרף על פי תכונותיו**עמוד 17 –**

משימת פתיחה - מבחן ארצי, הסקת מסקנות משתי עקומות עם התפלגות דומה אך מדד מרכזי שונה. אחריה פתיח לזיהוי והכרות עם המושג התפלגות נורמלית ועקומת הפעמון של גאוס.

עמוד 18 –

ריכוז של כל התכונות של עקומת ההתפלגות הנורמלית והסבר על הקשר בין הפיזור סביב הממוצע לבין צורת העקומה.

עמוד 19 – דוגמה (1):

זיהוי העקומות המתארות התפלגות נורמלית שולל את גרף ② שמתאר התפלגות לא סימטרית. זיהוי מיקומו וגודלו של הממוצע עוזר להתאים נכון כל עקומה לקבוצה. בגרף ③ הממוצע גדול יותר מאשר בגרף ①, לפיכך גרף ③ מתאים לקבוצת הבנים וגרף ① מתאים לקבוצת הבנות.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

(1) – (4) זיהוי התפלגות נורמלית והתאמתו לקבוצה לפי תכונות נתונות.

(2) חציון = שכיח = ממוצע.

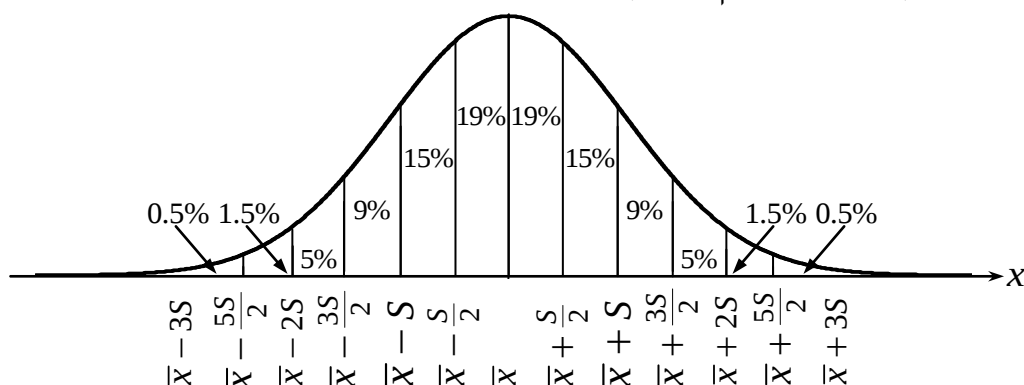
(5) הסקת מסקנות לגבי סטיית התקן לפי צורת עקומה.

(6) השטח שמתחת לגרף מהווה 100% מהאוכלוסייה.

(בהמשך כשנעבוד עם ציוני תקן השטח = 1).

סעיף ב: שימוש בגרף ההתפלגות הנורמלית**סעיף ב1 : מקומו של נתון ביחס למוצא לפי סטיית תקן**

גרף ההתפלגות הנורמלית נמצא בדף הנוסחאות.



מומלץ להכין דף עזר עם עוד גרפים כאלה.

כדי שהלמידה תהיה מדורגת, בתרגילים הראשונים מצורף הגרף, אחר כך כבר לא. בסעיף ב1 : פתרון השאלות בסעיף זה מצריך כתיבת הנתונים על גבי הגרף, על מנת להתמצא במיקומו של כל נתון ביחס למוצא, ומדידת מרחקו ממנו בעזרת יחידות של סטיית תקן.

סעיף ב2 : החלק היחסי של האוכלוסייה מתוך גרף ההתפלגות הנורמלית

עוסקים בחישוב החלק היחסי של אוכלוסייה בעלת נתון :

- שגדול ביחס לנתון מסוים (שהוא לאו דווקא ממוצע) : (ערך נתון) $X >$.
- שקטן ביחס לנתון מסוים (שהוא לאו דווקא ממוצע) : (ערך נתון) $X <$.
- שנמצא בין שני ערכי נתונים שונים (שהם לא בהכרח ממוצע) : (ערך נתון 1) $X <$ (ערך נתון 2)

התרגילים עד עמוד 37 מלווים בכותרות למקרים השונים.

שאלות נוספות מכל הסוגים : החל מעמוד 37 (שאלות (21) – (29)), שמטרתן לא לקבע "למגירה מסוימת", שהתלמידים יחשבו לבד מהו המקרה.

סעיף ב3 : מציאת ערך משתנה מתאים לאחוז אוכלוסייה

שאלה הפוכה לסעיף הקודם.

האחוז מהאוכלוסייה נתון, ובהתאם לו יש למצוא את הנתון המבוקש בעזרת עקומת ההתפלגות הנורמלית.

סעיף ב4 : שימוש בסימטריה של גרף ההתפלגות הנורמלית

בעמוד 50 - משימה להבנת נושא הסימטריה בגרף ההתפלגות הנורמלית.

ובעמוד 51 - דוגמה להמחשת השימוש בתכונה זו.

סעיף ב5 : חישוב ממוצע או סטיית תקן מתוך גרף ההתפלגות הנורמלית

נדרשת טכניקה אלגברית כבר במציאת הביטוי האלגברי לקשר בין הנתונים.

נדרשים הסימונים של סטיית התקן (S) והממוצע ($\bar{X}$) בתור נעלמים ובניית משוואות מתאימות לנתונים. תרגיל (1) בעמוד 62 נועד לריענון הטכניקה האלגברית הנדרשת.

סעיף ג: ציון תקן**סעיף ג1 : ציון תקן**

ציון התקן נועד בעיקר להשוואה בין התפלגויות שונות (לאו דווקא התפלגות נורמלית).
בעמוד 70 - יש פתיח לנושא באמצעות משימה שתפקידה להצביע על הצורך בצורת המדידה שתאפשר
השוואה של נתון ביחס לקבוצתו (בעזרת השאלה: איזה מהתלמידים הצליח יותר ביחס לכיתתו?).
ב"שימו לב" בעמוד 70 מדגישים שסימן ציון התקן נקבע לפי המונה בנוסחה $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$.

בעמודים 72 – 73 : שוב, ריענון טכניקה אלגברית בה נעשה שימוש בפתרון התרגילים.

סעיף ג2 : ציון תקן והתפלגות נורמלית

עוסק בשימוש בציון התקן בהתפלגות נורמלית.

יחידה 2: תכנון לינארי

רציונל

הצורך בנושא התכנון הלינארי מופיע בפתיח שבעמוד 87. יש לקרוא בעיון פתיח זה.

תכנון לינארי עושה שימוש בייצוג גרפי של שני משתנים כמותיים מחיי היומיום (x ו- y), הקשורים לינארית, למציאת פתרון אופטימלי במערכת של אילוצים נדרשים. כל אילוץ מתורגם לאי-שוויון, כך שנוצרת מערכת אי-שוויונות שיש לפתור. כידוע, בפתרון מערכת של אי-שוויונות יכול להתקבל תחום של פתרונות. בתכנון לינארי ילמדו התלמידים כיצד לאתר את הפתרון האופטימלי בתוך תחום הפתרונות המתקבל. מציאת פתרון זה נעשית על ידי הצבה של שיעורי נקודות והשוואה בין הגדלים המתקבלים.

מטרות היחידה הן:

- ✓ הכרת השלבים בפתרון שאלה בתכנון לינארי.
- ✓ זיהוי משתנים רלוונטיים בסיטואציה כלכלית / פיננסית (או כל תחום אחר).
- ✓ תרגום מערכת אילוצים למערכת של אי שוויונות לינאריים.
- ✓ פתרון גרפי של מערכת אילוצים לינארית.
- ✓ כתיבת ביטוי אלגברי לפונקציית המטרה.
- ✓ מציאת פתרון אופטימלי
- (ערך מקסימלי ו/או ערך מינימלי של פונקציה בשני משתנים ממעלה ראשונה בתחום אילוצים נתון).
- ✓ הבנת חשיבותו של הפתרון האופטימלי לקבלת החלטה מושכלת הנסמכת על שיקולי כדאיות.
- ✓ הכרות עם המושגים: מערכת אילוצים, פונקציית מטרה, תחום אפשרי של פונקציית המטרה.

תוכן מתמטי נדרש

- קריאה וסימון של נקודות במערכת צירים.
- תרגום מייצוג מילולי לייצוג אלגברי וממנו לייצוג גרפי.
- משוואת ישר – משמעות המקדמים, סרטוט במערכת צירים.
- מציאת נקודת חיתוך של שני ישרים כפתרון למערכת משוואות לינאריות.
- פתרון מערכת אי שוויונות והצגה גרפית שלו.

דגשים מתמטיים ופדגוגיים

הערה: לאורך יחידה זו יש הרבה הפניות לעמודי הנספחים, לצורך תרגול לא אורייני.

סעיף א: התמצאות במערכת צירים בהקשר מילולי

משימת פתיחה בעמוד 88 "בקולנוע" – מטרת המשימה לעורר עניין ושיח.
 אם התלמידים זוכרים, אפשר להתקדם מהר יותר.
 לפני התרגילים בעמוד 91 מופיעה הפניה לנספח בעמוד 309, לשאלות ללא הקשר מילולי.
 בתוך הפרק השאלות הן בעיקרן אורייניות.
 השימוש בשאלות שבנספח יהיה בהתאם לצורך ולרמת הכיתה.

סעיף ב: מעבר משאלה מילולית למערכת אילוצים

מעבר מייצוג מילולי לייצוג תבניתי (אלגברי)
 בעמוד 96: הכרות עם המושג **אילוץ**.
 האילוץ הוא תנאי מגביל בשאלה, לפעמים התנאי הוא נסתר כמו למשל במקרה ש- $x, y \geq 0$.
 ולעיתים ניתן לזהותו בשאלה לפי המילים: **לכל היותר, לכל הפחות, לפחות** וכדומה.
הערה: בתכנון לינארי ברוב השאלות יעשה שימוש בחלקי הישרים הנמצאים **ברביע הראשון**.

בעמוד 97 - דוגמה (1) – הכול מילולי.
 בעמוד 98 - דוגמה (2) – נתונים מספריים בטבלה. בתכנון לינארי במקרים רבים הנתונים מוצגים בטבלה.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

רמת הקושי של התרגילים עולה בהדרגה (ראו תרגיל (1) בעמוד 99 לעומת תרגיל (13) בעמוד 102).

עמוד 99 – תרגיל (1) –

(א) לא. (ב) כן. (ג) כן. (ד) $x \leq 0$

עמוד 102 – תרגיל (13) –

מערכת האילוצים:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 80x + 400y \leq 3 \\ 2x + 15y \leq 100 \\ x \geq 20 \end{cases}$$

סעיף ג: תיאור גרפי של מערכת אילוצים

סעיף ג1 : תיאור גרפי של פתרון מערכת אילוצים כאשר כל אי-שוויון הוא אי-שוויון במשתנה אחד
כל אחד מאי-השוויונות במערכת הוא במשתנה אחד.
בעמוד 107 לפני התרגול יש הפנייה לתרגול בהקשר לא מילולי לנספח שבעמוד 311.

סעיף ג2 : תיאור גרפי של פתרון מערכת אילוצים כאשר יש אי-שוויון אחד בשני משתנים

אחד מאי-השוויונות במערכת הוא בשני משתנים.
הערה חשובה בעמוד 111 – מספיק לבחור נקודה אחת כדי לבדוק את כיוון אי-השוויון.
בדרך כלל נציב $(0,0)$, ואם הישר עובר דרך ראשית הצירים נמצא נקודה אחרת.

בעמוד 111 למטה נמצאות ההפניות לתרגילים שבנספחים לחיזוק המיומנויות הנדרשות בדוגמאות החל מהעמוד הבא.

מצב הדדי בין ישר ונקודה (עמוד 314),

סרטוט ישר לפי נקודות (עמוד 318)

ותרגול ללא הקשר מילולי (עמוד 322).

לאחר הדוגמאות בעמוד 116 למעלה :

מופיע סיכום כיצד לייצג בסרטוט אילוץ שהוא אי שוויון לינארי בשני משתנים.

1. מסרטטים את הישר (עמוד 318 בנספח) שמחלק את המישור לשלושה תחומים

2. מציבים נקודה מאחד התחומים לבחירתנו (מעל, מתחת או על הישר) (בד"כ נבחר $(0,0)$)

(מצב הדדי בין נקודה לישר בנספח עמוד 314), ונבדוק אם היא מקיימת את תנאי האילוץ.

בסיכום זה מובא פתרון מלא.

לעיתים יהיו בשאלה דברים שכבר נתונים ואין צורך למצוא או לסרטט, כגון סרטוט נתון של הישר, וכדומה.

בעמוד 112 – 115 דוגמאות (1) – (4) עושות שימוש בשלבים הנ"ל.

דוגמה (4) – מובא מקרה שבו הישר עובר דרך ראשית הצירים.

במקרה זה יש לבחור נקודה שונה מנקודת ראשית הצירים, כדי לבצע בעזרתה את בדיקת התחום שבו מתקיים האי-שוויון.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמיתעמוד 119 – תרגיל (7) –(א) גל רצה לשאול **לפחות** 5 ספרים.נדרגם זאת לאי-שוויון: $x + y \geq 5$ נציב $(0, 0)$ ונקבל: $0 + 0 = 0 < 5$ כלומר נקודה זו **לא מקיימת** את אי-השוויון.

לכן גרף ③ מתאים לתיאור מספר הספרים שרצה גל.

(ב) האילוץ של הספרייה – **לכל היותר** 5 ספרים.נדרגם זאת לאי-שוויון: $x + y \leq 5$ נציב $(0, 0)$ ונקבל: $0 + 0 = 0 < 5$ כלומר נקודה זו **מקיימת** את אי-השוויון.

לכן גרף ① מתאים לתיאור מספר הספרים שאפשר לשאול בספרייה.

גרף ② אינו מתאים מכיוון שהוא מתאר מצב בו מספר הספרים **קטן** מ-5 ואינו שווה לו.(ג) גל יכול לשאול פחות מ-5 ספרים ($x + y < 5$).**סעיף 3: תיאור גרפי של פתרון מערכת אילוצים (תחום אפשרי המתקבל ממערכת אילוצים)**

פתרון גרפי כולל כל המקרים.

גם כאן נמליץ לתרגל מהנספח בהתאם לצורך ולרמת הכיתה.

תרגול קצר ללא הקשר מילולי ואז לעבור להקשר מילולי.

(ההפניות לנספח במסגרת בעמוד 122 למטה).

בנספח עמוד - 327 - נתון הסרטוט ויש לחשב נקודות חיתוך,

ובעמוד 331 - למצוא השטח המשותף לכל האילוצים.

בעמוד 122 במסגרת עם רקע כחול – הערה חשובה לגבי **משתנה הבדיד**:

יש לשים לב אם מדובר במשתנה כגון מספר אנשים או מספר שולחנות שמספר זה חייב להיות חיובי ושלם.

סימון תחום הנקודות המקיימות את אי השוויון (– התחום האפשרי) חיתוך של כל התנאים:

מומלץ להשתמש בצבעים.

תחום סגור: מתקבל מצולע. עמוד 125 דוגמה (2) (במשתנה בדיד)

תחום פתוח: לא מתקבל מצולע. עמוד 126 דוגמה (3).

התרגילים החל מעמוד 128 מופרדים לתחום סגור ותחום פתוח.

התרגול ברמת קושי עולה: רק סימון בתחום האפשרי, כתיבת מערכת אילוצים,

בחירת סרטוט מתאים (עמוד 133 שאלות (10)–(11)),

כתיבת אילוצים לפי סרטוט (עמוד 134 שאלות (12)–(13)) שימו לב שכאן אין למצוא את משוואת הישר

(היא כבר נתונה).

סעיף ג4 : חישוב השיעורים של נקודות החיתוך של הישרים התוחמים את התחום האפשרי**(הקודקודים של התחום האפשרי)**

חישוב שיעורי קודקודי התחום האפשרי.

חישוב שיעורי הקודקודים נעשה על ידי מציאת שיעורי נקודות החיתוך בין הישרים, באמצעות מערכת של משוואות. גם כאן נמליץ לתרגל מהנספח (בעמוד 337) בהתאם לצורך ולרמת הכיתה. אפשר לחזור על פתרון באמצעות שיטת ההצבה או שיטת השוואת המקדמים. בתכנון לינארי בדרך כלל שיטת השוואת המקדמים נוחה יותר.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

התרגול החל מעמוד 142 ברמת קושי עולה.

עמוד 142 שאלה (3) –

להתאים ישר לגרף (לפי חיתוך עם ציר ה- x ($y = 0$) או חיתוך עם ציר ה- y ($x = 0$)).
התרגילים הראשונים, (1) – (4), לא מאוד אורייניים.

סעיף ד: פונקציית מטרה

פונקציית מטרה היא פונקציה שאנחנו מחפשים את ערכה המקסימלי או המינימלי בכפוף למערכת אילוצים.

לדוגמה: רווח (בד"כ מקסימלי), הוצאות (בד"כ מינימליות), וכדומה.

אנחנו עוסקים בפונקציה לינארית בשני משתנים.

כתיבה שלא ראו עד היום $f(x, y) = \square x \pm \square y$.

דוגמה בעמוד 146: $f(x, y) = 30x + 12y$

$\downarrow$ $\downarrow$
 אישיות משפחתיות

תרגילים בעמוד 147: פונקציית מטרה בכיוונים שונים, כמו בדוגמה, ובייצוגים שונים.

עמוד 148 תרגיל (8) – x – מספר הכרטיסים שמכר. y – מספר הכרטיסים הזוכים.

$$f(x, y) = 15x - 20y$$

(א) מחיר כרטיס אחד הוא 15 ש"ח, והמוכר מפסיד 20 ש"ח לכל זוכה.

(ב) נציב $f(50, 10)$.

(ג) משמעותו: רכשו 50 כרטיסים ומתוכם זכו 10 אנשים.

(ד) $x = 10$, $y = 13$. לא ייתכן ש- $y > x$.

כי לא ייתכן שמספר הזוכים יהיה גדול ממספר הכרטיסים שנמכרו בפועל.

סעיף ה: ערך אופטימלי של פונקציית מטרה בתחום אפשרי נתון**סעיף ה1: ערך אופטימלי של פונקציית מטרה בקודקוד התחום האפשרי**

פתיח בעמוד 151 למעלה – מומלץ לקרוא פתיח זה עם התלמידים בכיתה.

במסגרת מופיעים השלבים למציאת שיעורי נקודות מינימום ומקסימום בקודקוד בתחום האפשרי.

הערה: בכל הדוגמאות והתרגילים ניתן להיעזר ביישומון גאוגברה.**התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית**

התרגילים הם מסוגים שונים.

בשאלות (1) – (2) ניתן התחום והקודקודים ויש למצוא את הערך האופטימלי על ידי הצבה בפונקציית

המטרה בדומה לדוגמה (1)

שאלות (5) – (10) – הן שאלות אורייניות מחיי היוםיום, שבהן הערך האופטימלי מקבל משמעות,

והשימוש במערכת האילוצים מקבל ערך מוסף לחשיבותו הלכה למעשה.

קווי גובה@!! (שאלות 6, 8) ?

בשאלות (9) – (10) – נתונים האילוצים וסרטוט הישרים ועל התלמידים לסמן בעצמם את התחום

האפשרי המתאים ולמצוא את הקודקודים למציאת הערך האופטימלי.

עמוד 157 שאלה (10) – x – פירות, y – ירקות.

מערכת האילוצים:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 5y \leq 30 \\ 4x + 3y \leq 32 \end{cases}$$

שיעורי הקודקודים של התחום האפשרי מתקבלים

מפתרון מערכת המשוואות:

$$(5, 4) \Leftarrow \begin{cases} 2x + 5y = 30 \\ 4x + 3y = 32 \end{cases}$$

וממציאת נקודות החיתוך עם הצירים: $(0, 6)$, $(8, 0)$.

נציב את שיעורי הקודקודים בפונקציית המטרה:

$$f(x, y) = 15x + 12y$$

$$f(8, 0) = 120$$

$$f(5, 4) = 123$$

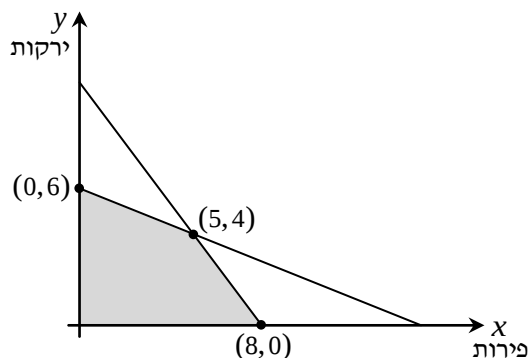
$$f(0, 6) = 72$$

כלומר התשלום המקסימלי מתקבל בנקודה ששיעורה $(5, 4)$, כלומר עבור 5 מנות פרי ו-4 מנות ירק.סעיף (ה) – מתן כמובן אינו צודק, ניתן להסביר זאת על ידי הנקודה ששיעורה $(8, 0)$

שפירושה 8 מנות פרי לעומת 0 מנות ירק והתשלום המתקבל בה הוא 120 ש"ח שקטן מהסכום 123

ש"ח עבור $f(5, 4)$.

ניתן להראות זאת בניסוי וטעייה עבור נקודות נוספות שנמצאות בתחום המתאימות לסיטואציה.



סעיף 2: חישוב מינימום ומקסימום לאורך קטע

כאשר מתקבל ערך מקסימלי בשתי נקודות שונות, או ערך מינימלי בשתי נקודות שונות, ערך זה יתקבל עבור כל הנקודות הנמצאות על הקטע המחבר בין שתי נקודות אלה.

נדגיש את הכתוב ב- "שימו לב" בעמוד 159 – בתשובות תמיד יש לבדוק שהערכים מתאימים והגיוניים עבור נתוני השאלה, למשל מספר של עצמים או אנשים חייב להיות מספר שלם וחובי, אלו ערכים מסוג משתנה בדיד, שאינם יכולים לקבל ערכים שאינם שלמים.

למרות שפונקציית הקו הישר היא פונקציה רציפה, נתייחס למקרים כאלה כאל אילוץ נוסף בתשובות.

בדוגמה בעמוד 159 :

בסעיף (ג) – מקרה שבו הערך יכול להיות לא שלם למשל בנקודה (10,15.5) .

בסעיף (ד) נוסף האילוץ שיחידות האורך חייבות להיות שלמות, כלומר המשתנה הופך למשתנה בדיד, כך שלא כל נקודה על הקטע EF יכול להתאים כתשובה, והנקודה היחידה המתאימה לתאר אורכים אפשריים היא הנקודה ששיעוריה (11,14) .

סעיף 3: השפעת שינוי בפונקציית המטרה על הערך האופטימלי שלה

כאשר נעשה שינוי בפונקציית המטרה, ברור שמה שעשוי להשתנות הוא ערך פונקציית המטרה.

בדוגמה ובתרגילים שאחריה מחשבים פונקציית מטרה נתונה, פונקציית מטרה חדשה, מקבלים ערכים חדשים ומשווים לערכים שהתקבלו בפונקציית המטרה המקורית.

בדוגמה- השינוי עלייה של 20% ברווח ממוצר מסוים.

בתרגיל (1) – מחיר הפרסום המודפס גדל ב- 100 ש"ח לכל יום פרסום.

תרגילים (2), (3) – ירידה במחיר.

תרגיל (5) – תרגיל "הפוך".

יש לערוך השוואה בין הערכים המתקבלים בהצבת שיעורי הקודקודים שבסרטוט בשתי פונקציות המטרה השונות:

פונקציית המטרה של פאר: $f(x, y) = 10x + 30y$,

פונקציית המטרה של הדר: $f(x, y) = 30x + 10y$.

סעיף (א): מציבים $y = 8$ תות, $x = 6$ לימון, ומקבלים עבור ההצעה של פאר: $f(6, 8) = 300$, ועבור ההצעה של הדר: $f(6, 8) = 260$.

סעיף (ב): נציב את שיעורי הנקודה (10, 7) בכל אחת מהפונקציות הנ"ל ונקבל:

עבור ההצעה של פאר: $f(10, 7) = 310$, ועבור ההצעה של הדר: $f(10, 7) = 370$.

סעיף (ג): צריך לחשב את ערך פונקציית המטרה בכל אחת מהנקודות בתחום האפשרי עבור כל אחת מההצעות כדי לבדוק מתי מתקבל הערך המינימלי.

נקודה	(10, 2)	(10, 7)	(4, 10)	(0, 2)
פאר $f(x, y) = 10x + 30y$	160	310	340	60
הדר $f(x, y) = 30x + 10y$	320	370	220	20

בשתי ההצעות הערך המינימלי מתקבל בנקודה (0, 2) , ולכן אי אפשר לדעת לפי איזו הצעה מכרו באותו היום.

סעיף ו: שאלות סיכום בתכנון לינארי לסעיפים א – ה

בסוף היחידה בעמוד 215 - יש שאלות סיכום ברמה גבוהה יותר, כלומר ברמת בגרות. השאלות בסעיף זה, משלבות ומסכמות את כל הנלמד בסעיפים א – ה של יחידה זו, אך עדיין אינן ברמת בגרות.

סעיף ו1: התחום האפשרי של הבעיה הוא תחום סגור

פתרון מלא. @

בדרך כלל בבחינות הבגרות לא נותנים שאלה מלאה, אלא חלקים ממנה. כך גם בתרגילים.

סעיף ו2: התחום האפשרי של הבעיה הוא תחום פתוח

דוגמה בעמוד 181- תחום פתוח. הדוגמה כולל יישומון. ניתן לתת שאלות מורכבות יותר ככל שהתלמידים ישלטו יותר בנושא.

סעיף ז: חישוב פרמטר

דגשים:

פתיח עמוד 188.

דוגמה 2 עמוד 189 – כוללת פרמטר בפונקציית המטרה.

סעיף ח: בדיקה של ניצול משאבים

לשים דגש על ניסוחים שונים בשאלות. לדוגמה:

איזה חומר גלם לא נוצל עד תום?

האם נותרו באותו היום בקבוקי יין בחנות?

שאלה (2) עמוד 198 –

(א) לאילוצים $x + 3y \geq 70$ ו- $3x + y \geq 90$, יש להוסיף:

אילוצים לא מפורשים: $x, y \geq 0$ ו- $x + y \leq 50$.

(ב) $f(x, y) = 80x + 60y$.

לאחר הצבת שיעורי כל אחד מהקודקודים של התחום האפשרי, נקבל שההכנסה המינימלית

מתקבלת עבור הקודקוד ששיעוריו (25,15), והיא שווה ל- 2,900 ש"ח ($f(25,15) = 2,900$).

(ג) בכל מארז מכל סוג יש בקבוק יין אחד, לכן מספר בקבוקי היין שנארזו הוא: $25 + 15 = 40$.

נתון שלרשותם היו 50 בקבוקי יין. לכן נותרו 10 בקבוקי יין.

(ד) המקרה המתואר מתאים לכל הנקודות הנמצאות על הישר $x + y = 50$,

בקטע שבין הקודקודים (20,30) ו- (40,10).

$f(20,30) = 3,400$, $f(40,10) = 3,600$, לפיכך גם הקודקוד (20,30), שבקצה קטע זה,

מתאים למקרה זה.

סעיף ט: שינוי במערכת האילוצים

השארנו נושא זה לסוף הפרק, מכיוון ששינוי במערכת האילוצים יכול להשפיע באופן משמעותי. שינוי באילוץ מסוים (למשל "לכל היותר" משתנה ל-"לפחות") או תוספת אילוץ חדש. מצריך הבנה טובה של המושגים כגון: לכל היותר, לפחות / לכל הפחות, וכיצד משתנה סימון התחום האפשרי החדש המתקבל בעקבות השינוי.

סעיף ט1: שינוי במערכת האילוצים

הכוונה כמובן לשינוי בהקשר מילולי.

אפשרויות לשינוי:

"ככל היותר" $\Leftarrow$ "ככל הפחות" – למשל בתרגילים (2), (6).

אילוץ נוסף – למשל בתרגילים (1), (8).

ביטול של אילוץ – למשל בתרגיל (5) (האילוץ $y \leq 6$ בוטל).

סרטוט של התחום האפשרי נדרש רק בשאלה האחרונה שבסוף סעיף ט1.

סעיף ט2: השפעת השינוי במערכת אילוצים על הקודקודים של התחום האפשרי**ועל נקודות המינימום והמקסימום של פונקציית המטרה**

כהמשך לסעיף ט1 – לאחר שהתלמידים שולטים בשינוי במערכת האילוצים, כעת הם גם נדרשים לחשב נקודות אופטימליות ולהפיק מידע כיצד ועל מה השפיע השינוי.

סעיף י: שאלות סיכום ברמה של שאלות בגרות

השאלות בסעיף זה הם ברמת בגרות, אך ללא הסעיפים המקדימים. יש 20 שאלות בסעיף זה, ומומלץ לפתור מהן לפני הבחינות המסכמות.

יחידה 3: מודל ריבועי

רציונל

ביחידה זו נלמד על הפונקציה הריבועית ותכונותיה.

יחידה זו מחולקת ל- 4 סעיפים:

- א. ייצוג גרפי של פונקציה ריבועית (פרבולה)
- ב. ייצוג אלגברי של פונקציה ריבועית
- ג. שאלות סיכון לסעיפים א–ב
- ד. מעבר לתיאור מילולי לתיאור אלגברי ולתיאור גרפי

מטרות כלליות

1. התלמיד יפתח מיומנות לזהות פרבולה נתונה כגרף המתאר פונקציה ריבועית.
2. התלמיד ידע להתאים בין תבנית אלגברית של פונקציה ריבועית לבין הגרף המתאר אותה ולהיפך.
3. התלמיד ידע להפיק מידע מפרבולה נתונה באמצעות תכונותיה.

מטרות אופרטיביות

- ✓ התלמיד ידע להיעזר במקדמי הפונקציה הריבועית לקביעת צורת הגרף המתאר אותה.
- ✓ בהקשר אורייני בהינתן גרף של פונקציה ריבועית:
- התלמיד ידע לזהות את התחום בו יש משמעות להקשר המתואר בשאלה.
- התלמיד ידע למצוא את שיעורי קודקוד הפרבולה ואת סוגו ולקשר אותו למצב המתואר בשאלה.
- התלמיד ידע לזהות תחומי חיוביות / שליליות של הפרבולה ולפסול תשובות שאינן מתאימות למצב המתואר בשאלה.
- ✓ בהינתן התבנית של פונקציה ריבועית התלמיד ידע למצוא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- X ולקשר את הפתרון שקיבל למצב המתואר בשאלה.

תוכן מתמטי נדרש

- פתרון אלגברי של משוואה ריבועית
- פתרון משוואה לינארית
- הפרבולה ותכונותיה (שיעורי הקודקוד, סוג הקודקוד, משוואת ציר סימטריה, נקודות החיתוך עם הצירים, תחומי עלייה ירידה, תחומי חיוביות / שליליות).

דגשים מתמטיים ופדגוגיים

נבחין בין פונקציה ריבועית (ייצוג אלגברי תבניתי) לבין פרבולה, שהיא הייצוג הגרפי של הפונקציה הריבועית.

נכיר שאלות מסוגים שונים:

תיאור מילולי של מצב נתון שממנו יש לקבל משוואה ריבועית מתאימה (ייצוג אלגברי) ולהפך.
תיאור מילולי של מצב נתון שלו ניתן להתאים גרף של פונקציה ריבועית (ייצוג גרפי - פרבולה) ולהפך.
הדגש הוא על שימוש בפתרונות להפקת מידע עם משמעות בהקשר האורייני.

יוצאים מתוך נקודת הנחה שהנושא לא נלמד בחטיבת הביניים.

יש 3 סוגים עיקריים של שאלות:

1. מבנה פיזי המכיל צורה פרבולית.
כגון גשר, קערה, שער וכדומה, שמניחים אותו על מערכת צירים, ולפי נתונים מספריים על המבנה, ניתן להתאים לו פונקציה ריבועית.
או אפשר לתת ביטוי אלגברי של הפונקציה ודרכה ללמוד על נתונים של המבנה לפי תכונות הפרבולה.
למשל: עמוד 260 תרגיל (7), עמוד 291 תרגיל (7).
2. סיפור אורייני שיוצר צורת פרבולה המיוצגת על ידי פונקציה ריבועית.
כגון: תנועה של כדור, הטלה של כידון, מגלשה, זרם מים במזרקה ועוד.
למשל: עמוד 267 תרגיל (7), עמוד 283 תרגיל (5).
3. סיפור אורייני כך שתנאי הסיפור יוצרים פונקציה ריבועית.
שאלות מסוג זה מופיעות למשל בסעיף ד.
למשל ראו דוגמה פתורה (1) עמוד 300.

סעיף א: ייצוג גרפי של פונקציה ריבועית**סעיף א1: קודקוד הפרבולה וציר הסימטריה**

תחילה עוסקים רק בהקשר הגרפי של תכונות הפרבולה.

מיקום הקודקוד, זיהוי ציר הסימטריה, וזיהוי נקודות סימטריות.

עמוד 244 תרגיל (4) –

(א) שיעור ה- y של קודקוד הפרבולה נתון כגובה השער ולכן שיעורי הקודקוד הם $(3, 5)$.

(ב) שימוש בציר הסימטריה –

ידוע ששיעור ה- y של הנקודה הסימטרית ל- $(4, 4)$ הוא 4 ($y = 4$).

המרחק מ- $x = 4$ לציר הסימטריה $x = 3$ הוא 1.

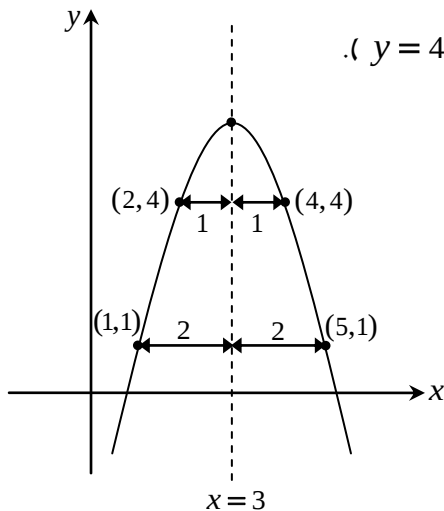
ולכן שיעור ה- x של הנקודה הסימטרית נמצא

במרחק 1 משמאל לציר הסימטריה הוא 2.

כלומר הנקודה הסימטרית ל- $(4, 4)$ היא $(2, 4)$.

באופן דומה נמצא את הנקודה הסימטרית לנקודה $(1, 1)$,

שמרחקה מציר הסימטריה הוא 2.

**סעיף א2: תחומי עלייה וירידה של פרבולה****סעיף א3: תחומי חיוביות ושליליות של פרבולה****סעיף א4: סיכום ייצוג גרפי של פונקציה ריבועית (פרבולה)**

סעיף זה מאגד את כל הסעיפים הקודמים לו עם תרגילים המשתמשים בכל התכונות של הפרבולה.

התלמידים מיומנים בשלב זה לזהות את תכונות הפרבולה הנדרשות לפתרון כל אחד מהתרגילים.

סעיף ב: ייצוג אלגברי של פונקציה ריבועית**סעיף ב1: ייצוג אלגברי של פונקציה ריבועית**

בסעיף זה לומדים להשתמש במקדמים a, b, c של הפונקציה הריבועית $y = ax^2 + bx + c$.
 בעמוד 263 יישומון הממחיש את השפעתם על צורת הפרבולה.
 סעיף זה עוסק בהצבות של שיעורי x ו/או y של נקודות בתבנית הפונקציה הריבועית.
 הבנת המשמעות של שיעורי הקודקוד בשאלות אורייניות במובן של ערך מקסימלי / מינימלי של פונקציה.

בעמוד 267 תרגיל (7) –

פתרון סעיף (א) הוא על ידי הצבה בלבד.
 סעיפים (ב) ו-(ג) אורייניים יותר:
 בסעיף (א) קיבלו עבור $x = 2$ $y = 0$.
 יש להשתמש בתשובה זו להבנת המיקום של הארנב בסוף מסלול הקפיצה שלו. נקודת אפס זו היא גם המרחק מנקודת ההתחלה של מסלול הקפיצה של ארנב.
 בסעיף (ג) יש להשתמש במשוואת ציר הסימטריה הנתונה, למציאת גובה הקודקוד (שיעור ה- y שלו במקרה זה).

סעיף ב2: טכניקה אלגברית – פתרון משוואה ריבועית

שאלות (1) – (3) שאלות טכניות לא אורייניות.
 שאלות (4) – (8) שאלות אורייניות.

סעיף ב3: חישוב שיעורי קודקוד הפרבולה ומשוואת ציר הסימטריה שלה**סעיף ב4: חישוב שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים**

עמוד 283 תרגיל (5) להציב $y = 0$ – חיתוך עם ציר ה- x .
 בעמוד 287 תרגיל אורייני הכולל התאמה בין ייצוג אלגברי לפרבולה.
 במסגרת העליונה בעמוד 287 מופיעה הפנייה לנספח לתרגול לא הקשר מילולי.

סעיף ג: שאלות סיכום על סעיפים א + ב

עמוד 291 תרגיל (7) –
 סעיף (א) 1. מציבים $x = 0$ ומוצאים: עבור משוואה 1: $(0,1)$, עבור משוואה 2: $(0,0)$,
 ועבור משוואה 3: $(0,1)$.
 סעיף (א) 2. משוואה 2 לא מתאימה.
 נקודת החיתוך עם ציר ה- x של הקערה נמצאת על ציר ה- x (הקערה משיקה לציר ה- x)
 לכן משוואה 3 אינה מתאימה.

סעיף ד: מעבר מתיאור מילולי לתיאור אלגברי ולתיאור גרפי

עמוד 300 – דוגמה פתורה.