

מדריך למורה – מבוא

ספר זה הינו המדריך למורה לספר השני מסדרת אולימפוס:

מתמטיקה לתלמידי 4 יח"ל - חלק ב קדם אנליזה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

המדריך למורה לספר של 4 יח"ל חלק ב עוסק בקדם אנליזה ובחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ומיועד למורים המלמדים עם ספר זה.

בספר הלימוד בכל פרק תמצאו:

- א. **חלק תיאורטי.** החלק התיאורטי מלווה בדוגמאות ובהסברים מפורטים. ההגדרות והמסקנות מודגשות ברקע אפור ובמסגרת.
- ב. **דוגמאות פתורות.** שאלות מלוות בפתרון מלא ובהסברים מפורטים. ניתן להיעזר בדוגמאות הפתורות במהלך השיעור בכיתה, או להפנות אליהן תלמידים שזקוקים להסבר נוסף.
- ג. **תרגילים לעבודה עצמית.** התרגילים בכל פרק בסדר קושי עולה ובהתאם לחלק התיאורטי ולדוגמאות.

במדריך למורה בכל פרק תמצאו:

- א. **פריסות הוראה.** פריסות הוראה המותאמות לפריסות ההוראה המומלצות של הפיקוח על המתמטיקה. בפריסות ההוראה אנו מציינים גם את שעות ההוראה המומלצות לכל נושא. זאת בהנחה שמלמדים 5 ש"ש. יש להתייחס לשעות אלה בגמישות. ייתכן שיהיו נושאים שידרשו יותר זמן וכאלה, שפחות. זאת מסגרת הזמן המומלצת אך יש להתאימה לקצב של הכיתה. כמובן שאם יש יותר שעות הוראה, ניתן להעמיק יותר, לעבור על תרגילים נוספים או להתקדם מהר יותר.
- ב. **תרגילי ליבה.** פירוט של תרגילי ליבה בפרק. הכוונה היא לתרגילים מומלצים לכיתה או כשיעורי בית על מנת להבטיח את הבנת התלמידים. כמובן שניתן ומומלץ לפתור תרגילים נוספים מהפרק. לקראת מבחן ניתן לפתור את התרגילים שלא עברתם עליהם עדיין, להיעזר בתרגול הנוסף בפרק החזרה שבסוף הספר וכן בדפי עבודה נוספים שיועלו למדריך למורה כתרגילי סיכום וחזרה בנושאים השונים. המדריך למורה דיגיטלי ויתעדכן מדי פעם.
- ג. **דגשים** מתמטיים ופדגוגיים הקשורים לנושא הנלמד.

אלגברה לפי הקשר וצורך – נושאים באלגברה שלא נלמדו לפני כן או שדורשים ריענון, משולבים בספר לפי הקשר וצורך.

בתחילת כל פרק שנדרשת בו טכניקה אלגברית שלא נלמדה לפני כן, תהיה למידה של הטכניקה האלגברית המתאימה. למשל בתחילת פרק 2 – אי-שוויונות עם שברים, בתחילת פרק 9 – פתרון משוואות מהצורה $c = f(x)^n$ וכיו"ב.

המחשה מתוקשבת – התלמידים יתנסו בפעילויות מתוקשבות מוכנות בגאוגברה ובדסמוס, ישערו השערות הניתנות לבדיקה באמצעות היישומון ויוכלו לנסח מסקנות למקרים כלליים. הלמידה הפעילה משפרת את ההבנה, מעודדת חשיבה ושיח מתמטי ותורמת להנאה של התלמידים.

פעילויות מתוקשבות נוספות לאלו המופיעות בספר, שנכתבו על ידי צוות משבצת, ניתן למצוא באתר האינטרנט של משבצת, בחומרים המשויכים לספר זה.

כרך ב – 4 יח"ל כיתה י"א התשפ"ז

פריסת שעות

לחודשים אוקטובר – מאי

על פי הפריסה של משרד החינוך לתכנה"ל החדשה.

שימו לב: לפי הפיקוח, בחודש ספטמבר ובמחצית השנייה של חודש אוקטובר יש ללמד סטטיסטיקה והסתברות של כיתה יוד. הכוונה למורים שלא הספיקו בכיתה יוד ללמד נושאים אלה או חלק מנושאים אלה. מורים שהספיקו ללמד נושאים אלה בכיתה יוד לא מחויבים לחזור עליהם.

המסמך מבוסס על ההנחות הבאות:

1. 5 שעות שבועיות מוקצבות להקבצה זו
2. מתוכן מוקדשות לגיאומטריה
3. מתוכן מוקדשות לחשבון דיפרנציאלי
4. מתוך החודשיים הראשונים, בניכוי החגים, יש חמישה שבועות וחצי של לימוד.

הטבלה הבאה פורסת את הלימוד לפי מספרי עמודים בספר ולפי שעות עבור קדם אנליזה.

חודש	קדם אנליזה					
	פרק	סעיף	נושא	החל מעמ'	מס' שעות	רשימת תרגילי ליבה
אוקטובר	1	קדם אנליזה של פונקציות מהצורה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$				
		א	הקשר בין תכונות הפונקציה $f(x)$ לתכונות הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ תרגילים מעמ' – <	7 12	2	(2), (5), (6), (7), (11), (13), (16)
		ב	האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ תרגילים מעמ' – <	17 24	2	(2), (3), (7), (9), (12), (13)
		ג	האסימפטוטה האופקית של $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ תרגילים מעמ' – <	30 36	2	(1), (4), (7), (9), (10), (12), (14), (15)
		ד	שאלות סיכום תרגילים מעמ' – <	38 40	2	(2), (3), (5), (7), (9), (11), (12), (14)

המשך בעמוד הבא <<<

חודש	חשבון דיפרנציאלי						
	פרק	סעיף	נושא	החל מעמ'	מס' שעות	רשימת תרגילי ליבה	הערות
נובמבר	2		אי-שוויונות עם שברים תרגילים מעמ'—<	47 52	2	(6), (7), (11), (14), (15), (17), (19), (23)	
	חשבון דיפרנציאלי של פונקציות רציונליות						
	3	א	תחום הגדרה ואסימפטוטות אנכיות של פונקציה רציונלית תרגילים מעמ'—<	54 57	1	(1), (6), (8), (11), (13), (15), (17)	
		ב	אסימפטוטה אופקית של פונקציה רציונלית תרגילים מעמ'—<	60 63	2	(2) – (5), (8), (9), (13), (18), (21), (22), (24)	
		ג	הנגזרת של פונקציה רציונלית ושימושיה תרגילים מעמ'—<	65 69	3	(1), (4), (6), (11), (12), (17), (20), (21), (26), (28), (30), (34), (36), (38), (40), (42), (47)	
		ד	פונקציות רציונליות : מציאת תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון תרגילים מעמ'—<	73 78	3	(1), (3), (4), (6), (8), (12), (13), ב(14), (16), (18), ב(19), (20), (22), (25), (26), (28), (30), (34), (36), (38)	
דצמבר - ינואר	ה	חקירת פונקציות רציונליות תרגילים מעמ'—<	83 95	3	(5), (7), (9) – (11), (13), (14), (16), (17), (19) – (21), (26), (27), (32), ה(34) – (37), (40), (42), (44), (45), (50) – (53)		
	ו	פונקציות רציונליות : פתרון שאלות ערך קיצון (ללא שאלות כלכליות, מספרים, וגאומטריה במרחב שירדו במיקוד תשפ"ז) תרגילים—<	114 120	4	(9), (11), (13) – (18), (22), (24)		

המשך בעמוד הבא <<<

חודש	פרק	סעיף	נושא	החל מעמ'	מס' שעות	רשימת תרגילי ליבה	הערות
דצמבר - ינואר	4	חשבון דיפרנציאלי של הפונקציות $y = \sqrt{f(x)}$, $y = \sqrt{x}$					
		א	חזרה תרגילים מעמ' - <	129 133	2	(2), (4), (8), (11) - (14), (16), (18), (20), (22), (24)	לפי הפיקוח בשנת הלימודים תשפ"ז יילמדו רק פונקציות שורש עם גורם לינארי בתוך השורש. אין לתת תרגילים 20, 19, 17, 8, 6, 3
		ב	חשבון דיפרנציאלי של $y = g(x) \sqrt{f(x)}$ כאשר $f(x)$ פונקציה ממעלה שנייה תרגילים מעמ' - <	136 138	2	(2) - (4), (6), (9), 15(13), (12), (10)	לפי הפיקוח סעיפים ב' ג' של פרק 4 (הצבעים באדום) לא יילמדו בשנת הלימודים תשפ"ז.
		ג	פונקציות עם שורשים ריבועיים: פתרון שאלות של ערך קיצון תרגילים מעמ' - <	143 144	2	(6), (7), (9), (11) - (14)	
	חשבון אינטגרלי						
	פרוואר	5	פונקציות קדומות ואינטגרל לא- מסוים של פולינום תרגילים מעמ' - <	148 151	1	(3), (4), (8), (10), (11), (16), (20) - (25), (27), (28), (30), (31), (33)	
		6	שימוש באינטגרל לא- מסוים למציאת פונקציה קדומה של פולינום תרגילים מעמ' - <	153 156	1	(6), (8) - (10), (13) - (16), (19), (21), (22), (24), (25)	
		7	אינטגרל מסוים של פולינום תרגילים מעמ' - <	160 161	1	(2), (7), (9), (11), (13), (14), (16)	
		8	חישובי שטחים בעזרת אינטגרלים של פולינום תרגילים מעמ' - <	163 173	4	(2), (3), (6) - (11), (13), (14), (16), (17), (20) - (22), (24), (25), (29), (30), (32), (33), (36), (38)	

המשך בעמוד הבא <<<

חודש	פרק	סעיף	נושא	החל מעמ'	מס' שעות	רשימת תרגילי ליבה	הערות
פברואר	9	אינטגרל של פונקציות מהצורה $y=(a x+b)^n$ (n מספר טבעי גדול מ- 1)					
		א	פתרון משוואות מהצורה $(f(x))^n=c$ (n מספר טבעי גדול מ- 1) תרגילים מעמ'—<	183 184	3	(2), (3), (5), (8), (10), (12)	
		ב	פונקציה קדומה ואינטגרל לא-מסוים תרגילים מעמ'—<	185 186		(5), (6), (8), (9), (12)	
		ג	מציאת פונקציה קדומה תרגילים מעמ'—<	187 187		(3)—(5), (8), (10)	
		ד	אינטגרל מסוים תרגילים מעמ'—<	188 188		(2), (5), (7)—(9)	
		ה	חישובי שטחים תרגילים מעמ'—<	189 190		(3), (4), (7)—(12), (14), (15), (17), (19), (20)	
		$y=\frac{k}{(a x+b)^2}$ אינטגרל של פונקציות רציונליות מהצורה					
מרץ	10	א	פונקציה קדומה ואינטגרל לא-מסוים תרגילים מעמ'—<	197 198	3	(3), (6), (9), (10), (12)	
		ב	מציאת פונקציה קדומה תרגילים מעמ'—<	199 199		(3), (6)—(9), (12), (14)	
		ג	אינטגרל מסוים תרגילים מעמ'—<	201 201		(3), (5)—(7), (11)—(13)	
		ד	חישובי שטחים תרגילים מעמ'—<	202 204		(2)—(4), (7)—(10), (12), (13)	
אפריל – מאי	11	תרגילי חזרה – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי		209	4	כל התרגילים (1)—(28) <u>מלבד תרגילים:</u> (11), (13), (14)	לפי הפיקוח בשנת הלימודים תשפ"ז התרגילים באדום ירדו במיקוד.

דגשים מתמטיים ופדגוגיים

פרק 1 – קדם אנליזה של פונקציות רציונליות

בפרק זה נעסוק בפונקציה $f(x)$ ובתכונות של $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, כאשר $f(x)$ פונקציה קווית או פונקציה ריבועית. יושם דגש על זיהוי וניתוח פונקציות באופן איכותני המתבסס בין השאר על נושא ההזזות שנלמד בכיתה יוד. בנספח שבסוף הספר יש חזרה על טרנספורמציות של פונקציות שנלמדו בכיתה יוד. בפרק זה נלמדים נושאים הקשורים לחשבון דיפרנציאלי של פונקציה רציונלית, כגון אסימפטוטה אנכית ואסימפטוטה אופקית, וכן יש שימוש בהזזות של פונקציות. דבר זה נועד להיות חומר מטרים להמשך הלמידה ולתרום להבנה של הנושאים השונים. זמן הלמידה שיוקדש לפרק זה ייחסך בפרקים הבאים.

סעיף א

בסעיף זה נבדוק את הקשר בין תכונות הפונקציה $f(x)$ לתכונות הפונקציה $g(x)$. נתייחס לתכונות שנלמד בעבר: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם ציר ה- x (נקודות אפס), תחומי חיוביות ושליליות, תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון.

בדוגמה (1) תחום ההגדרה של $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ הוא כל המספרים.

הדבר נעשה על מנת לבודד את הנושאים שבהם רצינו לעסוק:

- $f(x) \neq 0$ לכל $x \iff g(x) = \frac{1}{f(x)}$ מוגדרת לכל x .
- לכל פונקציה $f(x)$, לפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x .
- תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$ ושל $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ זהים בתחומים בהם $g(x)$ מוגדרת.
- בתחום שבו $f(x)$ עולה, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ יורדת.
- ובתחום שבו $f(x)$ יורדת, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ עולה.
- אם עבור x מסוים ל- $f(x)$ יש נקודת מינימום, אז עבור x זה ל- $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ תהיה נקודת מקסימום (בתנאי שעבור אותו x $f(x) \neq 0$).
- ואם עבור x מסוים ל- $f(x)$ יש נקודת מקסימום, אז עבור x זה ל- $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ תהיה נקודת מינימום (בתנאי שעבור אותו x $f(x) \neq 0$).

הדוגמה מלווה ביישומון ובחקר.

בדוגמה (2) נעסוק בנושאים של דוגמה (1) אך עם הרחבה על הקשר בין נקודות האפס של $f(x)$ לבין תחום ההגדרה של $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

גם דוגמה זו מלווה ביישומון ובחקר. במקרה זה $f(x)$ היא פונקציה לינארית.

בדוגמה (3) נעסוק בנושאים של דוגמאות (1) ו-(2) אך כאן $f(x)$ היא פונקציה ריבועית שמתאפסת בשתי נקודות, לכן ל- $g(x)$ יש שתי נקודות אי-הגדרה.

דוגמה זו מלווה ביישומון ובשאלות חקר.

בסוף 3 הדוגמאות, יש סיכום התכונות שנדונו של $f(x)$ ו- $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ועל הקשר ביניהן.

התייחסות לשאלות לעבודה עצמית

אין הבחנה בין פונקציה לינארית לריבועית כיוון שיש ללמד את העיקרון.

שאלות (1) – (6) הן שאלות יישומיות של הנושא הנלמד.

שאלות (7) – (8) עוסקות בחיוביות ושליליות ובזיהוי גרפים.

שאלות (9) – (10) הן שאלות גרפיות בלבד, ללא כלל התאמה

שאלות (13) – (14) עוסקות בפונקציות הנתונות בהצגה גרפית בתחום סגור.

סעיף ב

בסעיף זה נבדוק את התנהגות הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ בסביבת נקודות אי-ההגדרה שלה, כאשר $f(x)$ היא פונקציה קווית או ריבועית, ונגדיר אסימפטוטה אנכית.

מכיוון שבתכנית הלימודים של 4 יח"ל אין אי רציפות סליקה, בכל הנקודות שבהן $f(x) = 0$ (נקודות שבהן $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ לא מוגדרת), תהיה אסימפטוטה אנכית.

נבנה את ההבנה של התנהגות הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ בסביבת נקודת אי-ההגדרה בעזרת טבלאות ערכים ויישומונים.

נזכיר שאיפה של ערכי הפונקציה לפלוס אינסוף או למינוס אינסוף:

כאשר ערכי ה- y הולכים וגדלים באופן בלתי מוגבל או כאשר ערכי ה- y הולכים וקטנים באופן בלתי מוגבל.

את דוגמה מס' 2 חילקנו לשני חלקים:

חלק א' מתייחס לתחום ההגדרה, התנהגות הפונקציה בסביבת נקודת אי-ההגדרה שלה והאסימפטוטה האנכית, חלק ב' עוסק בהזזה האופקית והשפעתה על האסימפטוטה האנכית.

התייחסות לשאלות לעבודה עצמית

תרגילים (1) – (3) מיועדים להעמקת ההבנה של התנהגות הפונקציה בסביבת נקודת אי-ההגדרה שלה, באמצעות טבלאות ערכים.

בתרגילים (2), (3) יש בנוסף התייחסות להזזה האופקית והשפעתה על האסימפטוטה האנכית.

בשאלות (9) – (13) יש סיכום של תכונות הפונקציה שנלמדו עד כה וסרטוט של $f(x)$ ושל $g(x)$.

סעיף ג

בסעיף זה נבדוק את ערכי הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ו- $f(x)$ ממעלה ראשונה או שנייה).
 כאשר ערכי x שואפים לפלוס אינסוף (x חיובי, הולך וגדל באופן בלתי מוגבל), או ערכי x שואפים למינוס אינסוף (x שלילי, נולך וקטן באופן בלתי מוגבל).
 נסיק כי ערכי הפונקציה הולכים ומתקרבים ל-0, כלומר גרף הפונקציה מתקרב לציר ה- x .
 נסיק כי הישר $y = 0$ מהווה אסימפטוטה אופקית לגרף הפונקציה.
 יש בסעיף 3 דוגמאות, כאשר דוגמה (2) מתוקשבת, וניתן להשתמש בה כפעילות חקר.
 בדוגמה זו חוקרים את השפעת ההזזה האנכית על האסימפטוטה האופקית.
 בעמוד 35 יש סיכום למקרים שונים של הפונקציה $f(x)$ לינארית / ריבועית, על הקשר בין $f(x)$ ל- $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, על סמך תכונות שנלמדו עד כה.

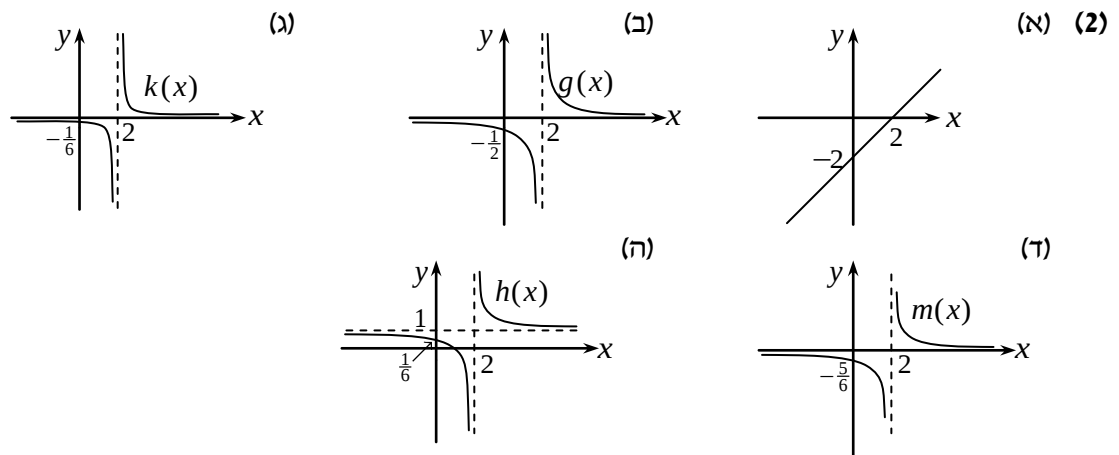
התייחסות לשאלות לעבודה עצמית

בתרגילים (1) – (4) נעזרים בטבלת ערכי כדי לבדוק את התנהגות הפונקציה עבור ערכי x השואפים לפלוס אינסוף או למינוס אינסוף.
 בתרגילים (5) – (10) מתייחסים לאסימפטוטה האופקית וכן לאסימפטוטה האנכית.
 בתרגיל (15) מתרגלים את השפעת הזזות ושיקופים על האסימפטוטה האופקית.

סעיף ד

בסעיף זה יש שאלות סיכום לפרק 1.
 השאלות כוללות את כל הנושאים שנלמדו בפרק, ומומלצות לסיכום הפרק וכחזרה לפני מבדק / מבחן.
 בנספח שבסוף הספר יש תרגילים נוספים לפרק 1.

פתרון לשאלה (8) בעמוד 42 –



- (ו) גרף $k(x)$ מתקבל מכיוון אנכי בגורם $\frac{1}{3}$, של גרף $g(x)$.
 גרף $m(x)$ מתקבל ממתוחה אנכית פי 5 של גרף $k(x)$.
 גרף $h(x)$ מתקבל מהזזה אנכית יחידה אחת למעלה של גרף $m(x)$.

פתרון מלא לשאלה (6) בעמוד 228 –

$$f(x) = (x-4)(x-2)$$

(6) (א) 1. נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x : $(4,0)$, $(2,0)$ $0 = (x-4)(x-2) \Rightarrow$

2. $a = 1$, לפיכך הפרבולה ישרה ונקודת הקדקוד היא נקודת מינימום. $f(x) = (x^2 - 6x + 8)$

$$x_{\text{קדקוד}} = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y_{\text{קדקוד}} = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1 \Rightarrow \min(3, -1)$$

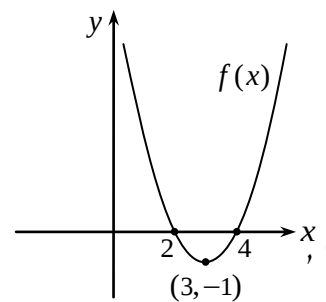
3. ראו סרטוט משמאל.

4. תחומי חיוביות: $x < 2$, $x > 4$, תחום שליליות: $2 < x < 4$.

5. תחום עלייה: $x > 3$, תחום ירידה: $x < 3$.

(ב) 1. תחום ההגדרה הוא $x \neq 2, 4$.

2. $y = 0$, $x = 4$, $x = 2$.



3. מכיוון ש- $(3, -1)$ היא נקודת המינימום של $f(x)$ הרי ש- $(3, \frac{1}{-1})$

כלומר $(3, -1)$ היא נקודת המקסימום של גרף הפונקציה $g(x)$.

4. $g(x)$ חיובית בתחומים שבהם $f(x)$ חיובית: $x < 2$, $x > 4$.

$g(x)$ שלילית בתחומים שבהם $f(x)$ שלילית: $2 < x < 4$.

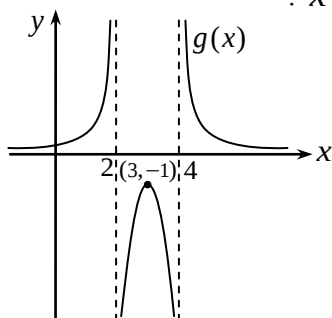
5. $g(x)$ עולה בתחומים שבהם $f(x)$ יורדת אך לא מתאפסת,

כלומר בתחומים: $x < 2$, $2 < x < 3$.

$g(x)$ יורדת בתחומים שבהם $f(x)$ עולה אך לא מתאפסת,

כלומר בתחומים: $x > 4$, $3 < x < 4$.

6. ראו סרטוט משמאל.



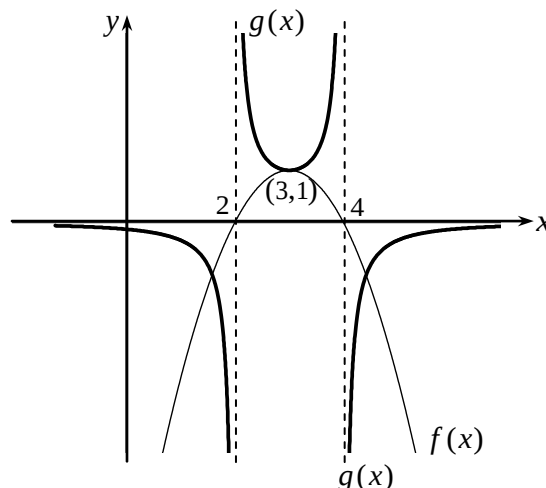
פתרון לשאלה (7) בעמוד 41

(א) – (ב)

$g(x) = \frac{1}{-x^2 + 6x - 8}$	$f(x) = -x^2 + 6x - 8$	תכונות
$x \neq 2, 4$	כל x	תחום הגדרה
אין	$(2, 0)$, $(4, 0)$	שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x
$(0, -\frac{1}{8})$	$(0, -8)$	שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y
$2 < x < 4$	$2 < x < 4$	תחומי חיוביות (אם קיימים)
$x < 2$, $x > 4$	$x < 2$, $x > 4$	תחומי שליליות (אם קיימים)
$3 < x < 4$, $x > 4$	$x < 3$	תחומי עלייה
$x < 2$, $2 < x < 3$	$x > 3$	תחומי ירידה
$\min(3, 1)$	$\max(3, 1)$	שיעורי נקודת קיצון וסוג קיצון
$x = 2$, $x = 4$	אין	משוואות אסימפטוטות אנכיות (אם קיימות)
$y = 0$	אין	משוואת אסימפטוטה אופקית

- $g(x)$ לא מוגדרת עבור ערכי x שעבורם $f(x) = 0$.
- ל- $g(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות בנקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x .
- $g(x)$ חיובית בתחומים שבהם $f(x)$ חיובית.
- $g(x)$ שלילית בתחומים שבהם $f(x)$ שלילית.
- $g(x)$ יורדת (בהתאם לתחום ההגדרה שלה) בתחום שבו $f(x)$ עולה.
- $g(x)$ עולה (בהתאם לתחום ההגדרה שלה) בתחום שבו $f(x)$ יורדת.
- עבור נקודת מקסימום של $f(x)$ (x_1, y_1) נקבל שנקודת המינימום של $g(x)$ היא $(x_1, \frac{1}{y_1})$.
- $y = 0$ (ציר ה- x) היא משוואת האסימפטוטה האופקית לגרף הפונקציה $g(x)$.

(ג)



פרק 2 – אי-שוויונות עם שברים

בכיתה יוד למדנו אי-שוויונות ממעלה שנייה לכל היותר.

בפרק זה נלמד לפתור אי-שוויונות עם שברים מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ כאשר $f(x)$ ו- $g(x)$ הן פולינומים ממעלה שנייה לכל היותר.

פרק זה הינו פרק של לימוד טכניקה אלגברית שתידרש כאשר נדון בהמשך בחקירת פונקציה רציונלית.

סעיף א

בדוגמאות (1) ו- (2) באי-שוויון $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, f ו- g ממעלה ראשונה. (לשם הנוחות נתייחס לסימן גדול).

במקרה כזה אנו כופלים ב- g^2 ובעצם מקבלים אי-שוויון מהצורה $f(x) \cdot g(x) > 0$, שהוא אי-שוויון ריבועי.

נסרטט את הפרבולה המתאימה ונפתור. טכניקה זו נלמדה בכיתה יוד.

סעיף ב

באי-שוויון מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ אם נכפול ב- $(g(x))^2$ נקבל $f(x) \cdot g(x) > 0$, שהוא אי שוויון ממעלה הגדולה מ- 2. זוהי טכניקת פתרון חדשה לתלמידים.

נפתור בשיטה של חלוקת ציר המספרים לתחומים ("שיטת הנחש") כמתואר בדוגמות (1) ו- (2) וכן ניעזר בסיכום שבעמוד 50.

התייחסות לשאלות לעבודה עצמית

בתרגילים (1) – (11) מגיעים לאי-שוויון ריבועי.

בתרגילים (12) – (23) מגיעים לאי-שוויון ממעלה גדולה מ- 2 ויש לפתור בעזרת חלוקה של ציר המספרים לתחומים ("שיטת הנחש").

מצורף פתרון מלא לשאלה (17) בעמוד הבא.

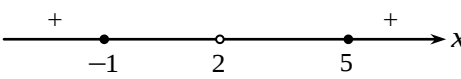
פתרון לשאלה (17) בעמוד 52 –

$$\frac{4x^2-16x+7}{x^2-4x+4} \leq 3 \Rightarrow \frac{4x^2-16x+7}{x^2-4x+4} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{4x^2-16x+7-3(x^2-4x+4)}{x^2-4x+4} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x-5}{x^2-4x+4} \leq 0$$

את אי-השוויון שקיבלנו $\frac{x^2-4x-5}{x^2-4x+4} \leq 0$, ניתן לפתור בשתי דרכים:

פתרון בדרך 1:

לאחר מציאת ערכי ה- x עבורם המכנה והמונה מתאפסים: המכנה עבור $x = 2$ (תחום ההגדרה $x \neq 2$) המונה עבור $x = -1$, $x = 5$, ובעזרת שיטת ה"נחש", נקבל:



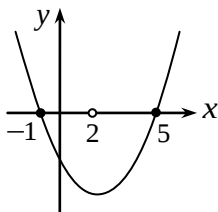
שימו לב לנקודות המלאות עבור $x = -1, 5$ ולנקודה הריקה עבור $x = 2$ (שעבורו המכנה מתאפס). כלומר הפתרון: $-1 \leq x < 2$, $2 < x \leq 5$.

פתרון בדרך 2:

$$\frac{x^2-4x-5}{x^2-4x+4} \leq 0$$

לפי נוסחאות כפל מקוצר, הביטוי שבמכנה $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ כלומר עבור $x \neq 2$, המכנה בביטוי האלגברי באגף השמאלי של האי-שוויון הוא חיובי.

ולכן כדי שהמנה בביטוי האלגברי תהיה קטנה או שווה ל-0, צריך שהמונה יהיה קטן או שווה לאפס. נסרטט סקיצה של $y = x^2 - 4x - 5$



ונקבל גם כאן את הפתרון שקיבלנו בדרך 1: $-1 \leq x < 2$, $2 < x \leq 5$.

פרק 3 – חשבון דיפרנציאלי של פונקציות רציונליות

את עבודת ההכנה על תחום הגדרה, אסימפטוטות אנכיות ואופקיות כבר עשינו בפרקים הקודמים. בפרק זה נעמיק ונלמד את הנגזרת של פונקציה רציונלית וסרטוט הגרף שלה. נשלב גם נושאים שנלמדו בכיתה יוד כחלק מהלמידה הספירלית, כגון: פונקציה זוגית ואי-זוגית, הזזות, הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת שלה ועוד.

סעיף א

תחום הגדרה ואסימפטוטות אנכיות של פונקציה רציונלית

התייחסות לשאלות לעבודה עצמית

התרגילים פשוטים ומיועדים לתירגול של תחום ההגדרה, אסימפטוטה אנכית, והתנהגות הפונקציה בסביבת נקודות אי-ההגדרה שלה. בתרגילים אלה, פרט לתחום ההגדרה, משולבים הנושאים של פונקציה זוגית / אי-זוגית, תחומי חיוביות ושיליות (פתרון אי-שוויונות), מציאת ערך פרמטר ועוד. יש לשים לב שאי-רציפות סליקה לא נמצאת בתכנית הלימודים, ולכן בכל נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת, יש לה אסימפטוטה אנכית. בדוגמה (1) בעמוד 54 באמצעות ערכים הולכים ומתקרבים לנקודת אי-ההגדרה, הראינו את שאיפת ערכי הפונקציה ל- $\pm\infty$ קיום אסימפטוטה אנכית. זוהי חזרה על תהליך שהראינו בפרק 1, ולכן ההסבר פה תמציתי יותר. בתרגיל (13) ברור שאם $x \neq \pm 1$ בביטוי אחד, ו- $x \neq 1$ בביטוי שני, אז תחום ההגדרה הוא $x \neq \pm 1$ (איחוד של הפתרונות).

סעיף ב

אסימפטוטה אופקית של פונקציה רציונלית

בפרק 1 עסקנו באסימפטוטה אנכית של $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ עבור $f(x)$ פולינום ממעלה ראשונה ושנייה. ידע זה ישמש אותנו גם בסעיף זה. בסעיף זה נתייחס לפונקציות רציונליות מהצורה $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ כאשר f ו- g הן פונקציות פולינום ממעלה ראשונה או שנייה.

שימו לב שבסעיף זה הנגזרת של פונקציה רציונלית עדיין לא נלמדה, וכדי לסרטט גרפים של פונקציות יש להשתמש בידע קודם, כפי שתואר.

נדון באסימפטוטות האופקיות של פונקציות רציונליות מהצורה $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ כאשר f ו- g הן פונקציות פולינום ממעלה שנייה לכל היותר.

נתחיל בדוגמאות למציאת האסימפטוטות האופקיות על ידי חילוק בחזרה הגבוהה ביותר של X (של המונה ושל המכנה), ואחרי הדוגמאות נציג את הכלל.

גם כאן השתמשנו בטבלת ערכים על מנת להראות שאיפה למספר מסוים, כאשר X שואף ל- ∞ (או ל- $-\infty$).

התלמידים כבר מכירים את מושג האסימפטוטה האופקית ואנו מרחיבים את מגוון הפונקציות שבהן אנו עוסקים.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

בתרגילים יש למצוא אסימפטוטה אופקית.

בסעיף (ב) של תרגילים (7) – (19) יש חזרה על הנלמד **בסעיף א**, והתלמידים מתבקשים למצוא אסימפטוטות אנכיות.

סעיף ג

הנגזרת של פונקציה רציונלית ושימושיה

לאחר שעסקנו בתחום ההגדרה, באסימפטוטות אנכיות ובאסימפטוטות אופקיות של פונקציות רציונליות, נלמד את הנגזרת של פונקציות אלה.

נפריד בין הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ (**בסעיף ג1**) לבין פונקציה רציונלית כללית (**בסעיף ג2**) כיוון שמניסיונו כמורים, לתלמידים רבים זה יותר קל.

יחד עם זאת, מי שמעוניין בכך, יכול לעבור ישירות **לסעיף ג2**, אך לתרגל גם **מסעיף ג1**.

נמצא את הנגזרת של $y = \frac{1}{x}$ לפי כלל המכפלה,

ואת הנגזרת של $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ לפי כלל המכפלה, ולפי הנגזרת של פונקציה מורכבת.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

התרגילים כוללים תרגול לסעיפים **ג1** ו- **ג2**.

בתרגילים הראשונים יש חישוב נגזרת בלבד, ומתרגיל (23) יש יישומים שונים של הנגזרת, כגון:

מציאת משוואת משיק בנקודה נתונה (ת' (23) – (32))

מציאת משוואת משיק כאשר השיפוע נתון (ת' (33) – (37)) ועוד.

בתרגיל (40) –

יש התייחסות לזווית שהמשיק יוצר עם ציר ה- x .

נתון שהמשיק הוא ישר עולה. זהו נושא שנלמד בכיתה יוד **ומומלץ מאוד** לחזור עליו בתרגיל זה.

התרגילים מסודרים לפי רמת קושי עולה והחל מתרגיל (46) יש שימוש בפרמטר.

פתרון לשאלה (38) בעמוד 70 –

נמצא את שיעורי ה- x עבור $y_0 = -1$.

$$-1 = x^2 - \frac{2}{x^2} \quad / \cdot x^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$$

נסמן $x^2 = t$ ונקבל את המשוואה הריבועית: $t^2 + t - 2 = 0$

שפתרונותיה: $t_2 = -2$, $t_1 = 1$

עבור $t = 1$ נקבל $x^2 = 1$ כלומר $x = \pm 1$.

עבור $t = -2$ נקבל $x^2 = -2$ ולמשוואה זו אין פתרון.

לפיכך התקבלו שתי נקודות השקה ששיעוריהן הם $(1, -1)$, $(-1, -1)$.

המשך בעמוד הבא <<<

נקבל ביטוי לשיפוע המשיק לגרף הפונקציה הנתונה על ידי גזירה שלה :

$$y = x^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$y' = 2x - \frac{0 \cdot x^2 - 2 \cdot 2x}{x^4} = 2x + \frac{4x}{x^4} = 2x + \frac{4}{x^3}$$

עבור $(1, -1)$, שיפוע המשיק הוא $y'(1) = 2 \cdot 1 + \frac{4}{1^3} = 6$

ומשוואת המשיק היא $y + 1 = 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 7$

עבור $(-1, -1)$, שיפוע המשיק הוא $y'(-1) = 2(-1) + \frac{4}{(-1)^3} = -6$

ומשוואת המשיק היא $y + 1 = -6(x + 1) \Rightarrow y = -6x - 7$

סעיף ד

פונקציות רציונליות: מציאת תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון

בסעיף זה נעסוק כבר בחקירת פונקציות רציונליות, אך ללא סרטוט גרף הפונקציה.

סרטוט גרף של פונקציה רציונלית עשוי להיות מאתגר לחלק מהתלמידים.

יחד עם זאת, ניתן להרגיל אותם לסרטוט באופן מדורג, תחילה בשיעור על הלוח.

סרטוט הגרף הוא גם המחשה ויזואלית שיכולה לסייע לתלמידים.

בטבלת החקירה נסמן את נקודת אי-ההגדרה ונבדוק עלייה / ירידה משני צידי נקודת אי-ההגדרה.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

בחלק מהשאלות יש שימוש בהזזות, התייחסות לפונקציה זוגית / אי-זוגית, משיק לגרף הפונקציה ופרמטר.

בתרגיל (22) –

יש להוכיח שלפונקציה $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{x}{4}$ אין נקודות קיצון, ולמצוא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

כפי שהערנו בתחילת הפרק, מומלץ תמיד, ראשית למצוא תחום הגדרה של הפונקציה.

במקרה זה $x \neq 0$.

נבדוק בטבלת חקירה עלייה וירידה באמצעות סימן הנגזרת ונמצא שעבור $x > 0$, $x < 0$ הפונקציה יורדת.

סעיף ה

חקירת פונקציות רציונליות

כפי שצינו, בסעיף זה ייושם כל הידע שיש לתלמיד על פונקציה רציונלית.

כאשר נדרש סרטוט גרף הפונקציה, אנו ממליצים להתחיל לסרטוט את הגרף במקביל לשלבי החקירה השונים.

בכל שלב נסמן את הידע שנצבר : אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון.

בשלב הסרטוט נותר רק לחבר את כל הידע שהתקבל ולבדוק שהסרטוט מסתדר.

אם משהו לא מסתדר בסרטוט, יש לבדוק את התוצאות שהתקבלו בסעיפים השונים ולתקן בהתאם עד לקבלת

התאמה מלאה.

בסעיף זה הוספנו גם שאלות על הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת, כחזרה על נושא שנלמד בכיתה יוד.

נושא זה מופיע גם בדוגמה (2) ומלווה ביישומון להמחשה.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

התרגילים מסודרים לפי רמת קושי עולה.

תרגילים (1) – (31) הם תרגילי חקירה סטנדרטיים של פונקציה רציונלית.

בתרגילים הבאים משולבים נושאים שונים שנלמדו:

הזזות, פונקציה זוגית / אי-זוגית, קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת שלה, ערך מוחלט של פונקציה, שימוש בפרמטר ועוד.

פתרון לשאלה (21) בעמוד 95 –

(א) $x^2 + 3 > 0$ לכל x , לכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל x .

(ב) בביטוי $\frac{3x+3}{x^2+3}$, המכנה ממעלה 2 והמונה ממעלה 1, ולכן משוואת האסימפטוטה האופקית

היא $y = 0 - 1 \Rightarrow y = -1$.

מכיוון שהפונקציה מוגדרת לכל x , אין לגרף הפונקציה אסימפטוטה אנכית.

(ג) + (ד)

למציאת שיעורי נקודות חשודות לקיצון, יש להשוות את נגזרת הפונקציה הנתונה ל-0.

$$y = \frac{3x+3}{x^2+3} - 1 \Rightarrow y' = \frac{3(x^2+3) - (3x+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 9}{(x^2+3)^2} \quad \text{תחילה נגזור:}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2 - 6x + 9}{(x^2+3)^2} = 0 \Rightarrow -3x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \text{נשווה לאפס:}$$

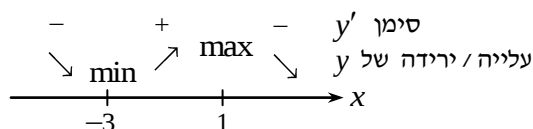
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$

$$y_1 = \frac{3 \cdot 1 + 3}{1^2 + 3} - 1 = 0.5, \quad y_2 = \frac{3(-3) + 3}{(-3)^2 + 3} - 1 = -1.5$$

$$(1, 0.5)$$

$$(-3, -1.5)$$



כדי לקבוע את סוג הנקודות ניעזר בציר המספרים:

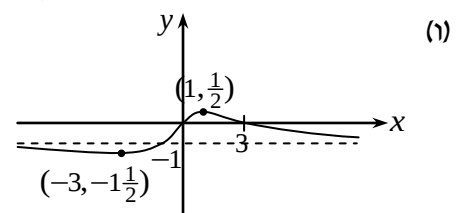
ונקבל: $\max(1, 0.5)$, $\min(-3, -1.5)$.

תחום עלייה: $-3 < x < 1$, תחומי ירידה: $x > 1$, $x < -3$.

(ה) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$\frac{3x+3}{x^2+3} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{3x+3}{x^2+3} = 1 \Rightarrow 3x+3 = x^2+3 \quad \text{נקודות החיתוך עם ציר ה-} x:$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3 \Rightarrow (0, 0), (3, 0)$$



פתרון לשאלה (43) בעמוד 100 –

$$y' = \frac{0 - 2(2x - a)}{(x^2 - ax)^2} = \frac{-4x + 2a}{(x^2 - ax)^2} \quad (\text{א})$$

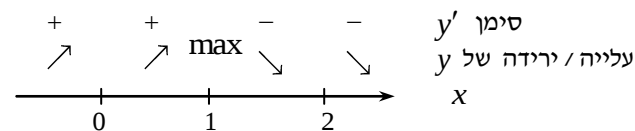
$$0 = -4 \cdot 1 + 2a \Rightarrow a = 2 \quad \text{נתון } y'(1) = 0 \text{ ולכן:}$$

$$y = \frac{2}{x^2 - 2x} \quad (\text{ב}) + (\text{ג})$$

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x \neq 0, 2$$

$$y' = \frac{-4x + 4}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, -2)$$



תחום ההגדרה של הפונקציה:

נגזרת הפונקציה:

נשווה לאפס ונקבל:

ניעזר בציר המספרים:

נקבל: $\max(1, -2)$

תחומי עלייה: $x < 0$, $0 < x < 1$

תחומי ירידה: $1 < x < 2$, $x > 2$

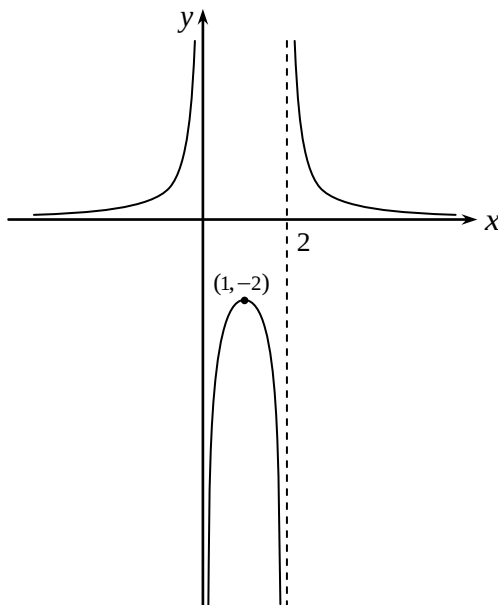
(ד) הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$ או $x = 2$,

ולכן משוואות האסימפטוטות האנכיות הן $x = 0$ ו- $x = 2$.

$$y = \frac{2}{x^2 - 2x} \Leftarrow \text{המונה ממעלה 0 (מספר) והמכנה ממעלה 2,}$$

ולכן משוואת האסימפטוטה האופקית היא $y = 0$ (ציר ה- x).

(ה) ראו סרטוט משמאל.



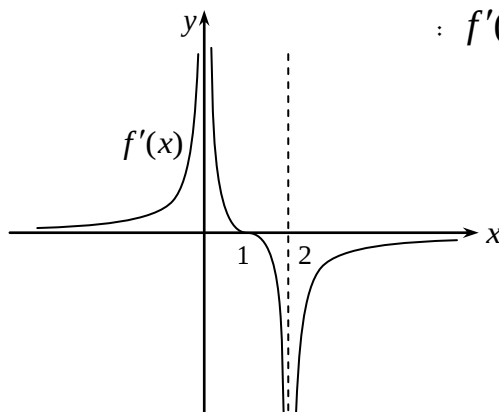
(ו) גרף הפונקציה $f(x)$ מתקבל על ידי הזזת גרף הפונקציה y

ב- $|k|$ יחידות למעלה.

כדי שגרף הפונקציה $f(x)$ ישיק לציר ה- x , נקודת

המקסימום צריכה לזוז מעלה ולהיות על ציר ה- x .

כלומר $k = 2$.



(ז) מהסעיפים הקודמים, ניתן לדעת את הדברים הבאים לגבי $f'(x)$:

$$f'(x) \text{ חיובית בתחומים } 0 < x < 1, x < 0$$

(ראו ציר מספרים שבפתרון סעיפים (ב) + (ג)).

$$f'(x) \text{ שלילית בתחומים } 1 < x < 2, x > 2$$

$$f'(1) = 0, \text{ כי עבור } x = 1 \text{ ל- } f(x) \text{ יש נקודת קיצון.}$$

ובעזרת המשוואות של האסימפטוטות לגרף הפונקציה

המאונכות לצירים $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ נקבל את הגרף

של $f'(x)$.

סעיף ו

פונקציות רציונליות: פתרון שאלות ערך קיצון

נושא שאלות ערך קיצון יכול להופיע בכל פונקציה שנלמדת או בנושא בפני עצמו.

בספר זה שאלות ערך קיצון מופיעות בפרק 3 סעיף ו, ובפרק 4 סעיף ג **.

**** שימו לב:** לפי הפיקוח, פרק 4 סעיף ג לא ילמד בשנת הלימודים תשפ"ז.

אנו ממליצים ללמד את נושא ערך קיצון כחלק מיישומי הנגזרת.

יחד עם זאת, מורה שמעוניין בלמידת הנושא יחד במרוכז, יכול לחבר את שני הסעיפים הנ"ל בפרק 4.

בנושא שאלות ערך קיצון יש בעיות מספרים, בעיות כלכליות, פונקציות וגרפים, בעיות גיאומטריות במישור ובעיות גיאומטריות עם תיבה וקובייה.

בתחילת הסעיף ריכזנו הגדרות ונוסחאות של תיבה וקובייה.

מומלץ להביא לכיתה תיבה וקובייה ולהמחיש לתלמידים את המושגים השונים:

בסיס, פאה, אלכסוני פאה, אלכסוני בסיס, אלכסוני תיבה, מקצועות, נפח, שטח מעטפת ושטח פנים.

יש גם תזכורת לשלבי הפתרון של שאלות ערך קיצון, ודוגמאות פתורות.

בבעיות הגיאומטריות לעיתים יש להיעזר בדמיון משולשים – למשל בדוגמה (3) עמוד 116.

בדוגמה (4) העוסקת בשאלת קיצון על פונקציות גרפים, יש יישומון להמחשה.

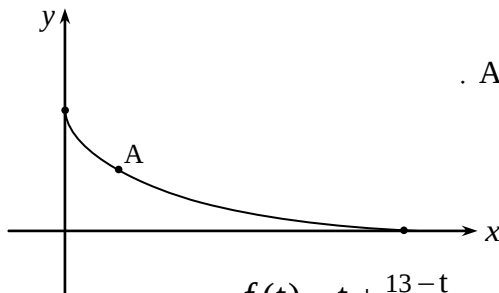
התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

פתרון לשאלה (24) בעמוד 124 –

(א) + (ב)

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A , ואז $A(t, \frac{13-t}{t+3})$.

תחום ההגדרה $0 \leq t \leq 13$.



פונקציית המטרה היא סכום שיעורי הנקודה A : $f(t) = t + \frac{13-t}{t+3}$

$$f'(t) = 1 + \frac{-1(t+3) - (13-t) \cdot 1}{(t+3)^2} = 1 + \frac{-t-3-13+t}{(t+3)^2}$$

$$f'(t) = 1 - \frac{16}{(t+3)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow (t+3)^2 = 16 \Rightarrow t+3 = 4 \text{ או } t+3 = -4$$

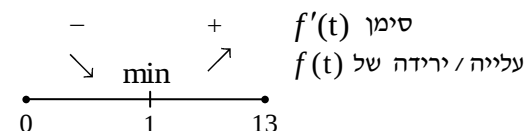
$$t = 1 \text{ או } t = -7$$

לא בתחום ההגדרה.

ניעזר בציר המספרים (ראו משמאל) ונקבל:

עבור $t = 1$ סכום שיעורי הנקודה $A(1, 3)$

הוא מינימלי, וערכו: $f_{\min} = f(1) = 1 + 3 = 4$.



כדי למצוא את שיעורי הנקודה A שעבורה סכום השיעורים הוא מקסימלי, יש למצוא את ערך הפונקציה $f(t)$ בנקודות קצה תחום ההגדרה:

$$f(0) = 0 + \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}, \quad f(13) = 13 + \frac{0}{16} = 13$$

כלומר עבור $t = 13$ סכום שיעורי הנקודה $A(13, 0)$ הוא מקסימלי, וערכו $f_{\max} = f(13) = 13$.

פרק 4 – חשבון דיפרנציאלי של הפונקציות $y = \sqrt{f(x)}$, $y = \sqrt{x}$

הפרק עוסק בפונקציה אי-רציונלית (פונקציה עם שורש ריבועי). בכיתה יוד נלמד חשבון דיפרנציאלי של פונקציית השורש $y = \sqrt{f(x)}$, כאשר $f(x)$ פולינום ממעלה שנייה לכל היותר, ו- $y = g(x) \cdot \sqrt{f(x)}$, כאשר $g(x)$ פולינום ממעלה שנייה לכל היותר, ו- $f(x)$ פולינום ממעלה ראשונה לכל היותר. בכיתה יא יש הרחבה לפונקציות מהצורה $y = g(x) \cdot \sqrt{f(x)}$, כאשר $f(x)$ פולינום ממעלה שנייה. לכן בתחילת הפרק יש חזרה על הנלמד בנושא בכיתה יוד.

סעיף א

הוא סעיף חזרה על הנלמד בכיתה יוד בפונקציית שורש, ומכיל תרגול מסוגים שונים.
שימו לב: לפי הפיקוח, בפרק 4 סעיף א, יילמדו רק פונקציות שורש עם גורם לינארי בתוך השורש. כלומר אין ללמד דוגמאות (1) ו- (3) ואין לתת תרגילים לעבודה עצמית שמספרם: (3) – (6), (8), (17), (19), (20).

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

החל מעמוד 133 בספר:

תרגילים (1) – (6) עוסקים בתחום ההגדרה של פונקציית שורש.
 בתרגילים (7) – (12) מבקשים לגזור את הפונקציות.
 תרגילים (13) – (17) קצרים וממוקדים ודורשים יישומים של הנגזרת.
 תרגילים (18) – (22) הנם תרגילי חקירה של פונקציית שורש.
 תרגילים (23) – (24) הינם תרגילים עם פרמטר.
 בסעיף (א) יש למצוא את ערך הפרמטר, ולפני סעיף (ב) ערך הפרמטר נתון.

פתרון לשאלה (22) בעמוד 134 –

$$25 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 25 \quad (\text{א})$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 \sqrt{25 - 0} = 0 \Rightarrow (0, 0) \quad (\text{ב})$$

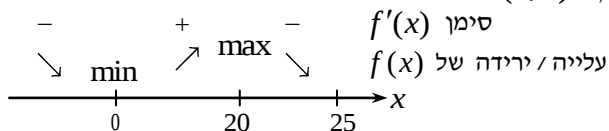
$$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = x^2 \sqrt{25 - x} \Rightarrow \begin{array}{ll} x = 0 & \text{או} \\ x = 0 & \text{או} \\ (0, 0) & \end{array} \quad \begin{array}{l} 25 - x = 0 \\ x = 25 \\ (25, 0) \end{array}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt{25 - x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{25 - x}} \cdot (-1) = \quad (\text{ג}) + (\text{ד})$$

$$= 2x\sqrt{25 - x} - \frac{x^2}{2\sqrt{25 - x}} = \frac{4x \cdot (25 - x) - x^2}{2\sqrt{25 - x}} = \frac{-5x^2 + 100x}{2\sqrt{25 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -5x^2 + 100x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 20$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ (0, 0) & , & (20, 400\sqrt{5}) \end{array}$$



ניעזר בציר מספרים:

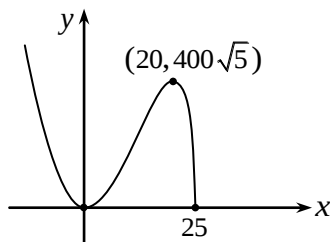
$$\text{כלומר } \min(0, 0), \max(20, 400\sqrt{5}).$$

בנוסף, יש לזכור כי נקודת הקצה היא תמיד נקודת קיצון, ומכיוון שמשמאלה יש ירידה,

הרי שהיא נקודת מינימום $\min(25, 0)$.

תחום עלייה: $0 < x < 20$; תחומי ירידה: $x < 0$, $20 < x \leq 25$.

(ה) ראו סרטוט משמאל.



סעיף ב

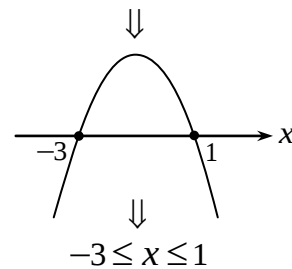
שימו לב: לפי הפיקוח, פרק 4 סעיף ב לא יילמד בשנת הלימודים תשפ"ז.

הרחבה של הפונקציות. רמת קושי עולה.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

פתרון לשאלה (12) בעמוד 139 –

(א) תחום ההגדרה: $3 - 2x - x^2 \geq 0$



(ב) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = x\sqrt{3 - 2x - x^2} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 1$

כלומר שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים: $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(-3, 0)$.

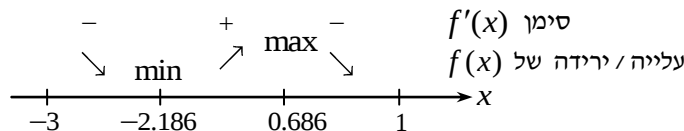
(ג) + (ד)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\sqrt{3 - 2x - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3 - 2x - x^2}} \cdot (-2 - 2x) = \\ &= \sqrt{3 - 2x - x^2} + \frac{x(-2 - 2x)}{2\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \\ &= \sqrt{3 - 2x - x^2} + \frac{-2x(1+x)}{2\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \\ &= \frac{(3 - 2x - x^2) - x(1+x)}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \frac{-2x^2 - 3x + 3}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.686, x_2 = -2.186$

$\Downarrow \quad \Downarrow$
 $(0.686, 0.738) \quad (-2.186, -3.52)$

ניעזר בציר מספרים:



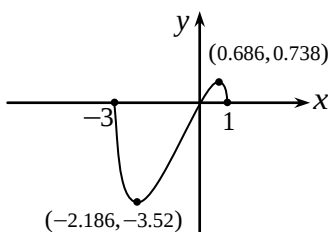
כלומר $\min(-2.186, -3.52)$, $\max(0.686, 0.738)$

בנוסף יש את נקודות הקצה $\max(-3, 0)$, $\min(1, 0)$

(ה) תחום עלייה $-2.186 < x < 0.686$.

תחומי ירידה $0.686 < x \leq 1$, $-3 \leq x < -2.186$.

(ה) ראו סרטוט משמאל.



סעיף ג

שימו לב: לפי הפיקוח, פרק 4 סעיף ג לא יילמד בשנת הלימודים תשפ"ז.

שאלות ערך קיצון של פונקציות עם שורש ריבועי.

בסעיף זה, בתחום הגיאומטריה, לעיתים יש שימוש במשפט פיתגורס.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

פתרון לשאלה (9) בעמוד 145 –

(א) x הוא ניצב ב- $\triangle BFC$, ולכן תחום ההגדרה של x

הוא $0 < x < 6$.

לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle BFC$

$$BF^2 + FC^2 = BC^2 \quad \text{כלומר} \quad FC = \sqrt{36 - x^2} \text{ ס"מ}$$

במשולש שווה-שוקיים BAC הגובה לבסיס והתיכון לבסיס

$$AF = 2 \cdot FC = 2\sqrt{36 - x^2} \text{ ס"מ} \quad \text{מתלכדים, לכן:}$$

$$S_{ABCDE} = S_{\triangle BAC} + S_{ACDE} = \frac{AC \cdot BF}{2} + AC \cdot CD$$

$$S_{ABCDE}(x) = \frac{\cancel{2} \sqrt{36 - x^2} \cdot x}{\cancel{2}} + 2\sqrt{36 - x^2} \cdot 3 = (x + 6)\sqrt{36 - x^2} \text{ סמ"ר}$$

$$S(x) = (x + 6)\sqrt{36 - x^2}$$

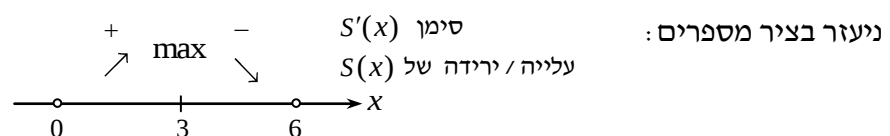
$$S'(x) = 1 \cdot \sqrt{36 - x^2} + (x + 6) \cdot \frac{1}{\cancel{2} \sqrt{36 - x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) = \quad (ב)$$

$$= \sqrt{36 - x^2} - \frac{x(x + 6)}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{36 - x^2 - x^2 - 6x}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 6x + 36}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 - 6x + 36 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -6$$

↓

לא בתחום ההצבה.



כלומר עבור $x = 3$ שטח המחומש הוא מקסימלי.

חשבון אינטגרלי

את נושא החשבון האינטגרלי הפרדנו לפי סוגי הפונקציות.
פרקים 5 – 8 עוסקים באינטגרל של פונקציות פולינום כולל אינטגרל לא מסוים, מציאת פונקציה קדומה, אינטגרל מסוים וחישובי שטחים.
בדרך זו התלמידים יתמקדו בהבנת נושא האינטגרל ולא בטכניקה מורכבת יותר של ביצוע האינטגרל.

פרק 5 – פונקציות קדומות ואינטגרל לא מסוים של פולינום

בפרק זה נגדיר מהי פונקציה קדומה, נראה כללי אינטגרציה פשוטים ונעיר שניתן לבדוק פתרון של אינטגרל באמצעות גזירה.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

החל מעמוד 151

בתרגילים התלמידים נדרשים למצוא אינטגרל בלתי-מסוים.

בתרגילים (31)–(33) יש גם שימוש בפרמטר.

יש להדגיש כי באינטגרל נתייחס לפרמטר כאל מספר.

פתרון לשאלה (24) בעמוד 151 –

$$\int \left(\frac{3x^2}{4} - \frac{7}{3}x^6 + 4x^7 \right) dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{7}{3} \cdot \frac{x^7}{7} + 4 \cdot \frac{x^8}{8} + c = \frac{x^3}{4} - \frac{x^7}{3} + \frac{x^8}{2} + c$$

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

פתרון לשאלה (27) בעמוד 151 –

$$\int \frac{8x^2 - 6x^6 - 12x}{2x} dx = \int (4x - 3x^5 - 6) dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^6}{6} - 6x + c = 2x^2 - \frac{x^6}{2} - 6x + c$$

פרק 6 – שימוש באינטגרל לא מסוים למציאת פונקציה קדומה של פולינום

בפרק זה נמצא פונקציה קדומה של פולינום $(f(x))$, כאשר יש נתון נוסף על הפונקציה. למשל:

- נתונה נקודה שגרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרכה.
- נתונה נקודת חיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- נתון הערך המינימלי / המקסימלי של הפונקציה $f(x)$.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

עמודים 156 – 158

התרגילים לפי סדר קושי עולה.

בכל התרגילים יש לבצע אינטגרל על פונקציית פולינום. זאת פעולה קלה לביצוע. הקושי מתבטא בהבנת התנאי הנוסף על הפונקציה כדי למצוא את הפונקציה הקדומה, בפרמטר שיש בתרגיל, בשתי פונקציות באותה שאלה ועוד. מומלץ לתרגל עם התלמידים ניסוחים שונים. לדוגמה ראו פתרון תרגילים (13), (24) להלן.

פתרון לשאלה (13) בעמוד 156 –

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-5x - 10) dx = -5 \cdot \frac{x^2}{2} - 10x + c \quad (א)$$

משמעות המשפט: "הערך המקסימלי של הפונקציה $f(x)$ הוא אפס"

היא שיעור ה- y של נקודת המקסימום היא 0.

נמצא את שיעור ה- x של נקודת המקסימום:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -5x - 10 = 0 \Rightarrow x = -2$$

כלומר $(-2, 0)$ היא נקודת המקסימום של $f(x)$.

$$0 = -5 \cdot \frac{(-2)^2}{2} - 10 \cdot (-2) + c \quad \text{ניעזר בנתון זה ונקבל:}$$

$$0 = -10 + 20 + c \Rightarrow c = -10$$

$$f(x) = -2.5x^2 - 10x - 10 \quad \text{כלומר:}$$

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y :

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -10 \Rightarrow (0, -10)$$

כלומר בנקודה $(0, -10)$ מעבירים מקביל לציר ה- x ולכן משוואת ישר מקביל זה היא $y = -10$.

כלומר שיעור ה- y של נקודה P הוא -10.

נמצא את שיעור ה- x של נקודה P כאשר ידוע $f(x_p) = -10$.

$$-10 = -2.5x^2 - 10x - 10 \quad \text{נקבל:}$$

$$0 = -2.5x^2 - 10x$$

$$0 = -2.5x(x + 4) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -4$$

$$P(-4, -10) \quad \text{כלומר:}$$

פתרון לשאלה (24) בעמוד 158 –

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x^2 - 6) dx = 12 \cdot \frac{x^3}{3} - 6x + c \quad (\text{א})$$

$$f(x) = 4x^3 - 6x + c$$

מכיוון שמשוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = -1$ היא $y = -2x + 5$,

הרי ששיפוע המשיק לגרף $g(x)$ (הנגזרת $g'(x)$) עבור $x = -1$ שווה ל-2

$$. g'(-1) = -2 \quad \text{כלומר מתקיים}$$

$$, g'(x) = f(x) \quad \text{אך מכיוון ש-}$$

$$, f(-1) = -2 \quad \text{הרי שגם מתקיים}$$

$$. g'(-1) = f(-1) = -2 \quad \text{ובסה"כ מתקיים}$$

(ב) מכיוון ש- $f(-1) = -2$, הרי הנקודה ששיעוריה $(-1, -2)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

$$f(x) = 4x^3 - 6x + c$$

$$-2 = 4(-1)^3 - 6(-1) + c \quad \text{ולכן מתקיים}$$

$$-2 = -4 + 6 + c \Rightarrow c = -4$$

$$f(x) = 4x^3 - 6x - 4$$

ולכן

(ג) נקודת ההשקה של המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה על הגרף שבה $x = -1$,

נמצאת על המשיק שמשוואתו $y = -2x + 5$, ולכן $y(-1) = -2(-1) + 5 = 7$.

כלומר הנקודה ששיעוריה $(-1, 7)$ נמצאת על גרף $g(x)$, כלומר $g(-1) = 7$.

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int f(x) dx = \int (4x^3 - 6x - 4) dx = \quad (\text{ד})$$

$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + c_1 = x^4 - 3x^2 - 4x + c_1$$

נציב את שיעורי הנקודה $(-1, 7)$ שעל הגרף של $g(x)$, ונקבל:

$$7 = (-1)^4 - 3(-1)^2 - 4(-1) + c_1$$

$$7 = 1 - 3 + 4 + c_1 \Rightarrow c_1 = 5 \Rightarrow g(x) = x^4 - 3x^2 - 4x + 5$$

פרק 7 – אינטגרל מסוים של פולינום

זהו פרק קצר המתרגל טכניקה של חישוב אינטגרל מסוים, כמבוא לחישוב שטחים בעזרת אינטגרלים.

מוסבר מדוע ניתן לבחור את קבוע האינטגרציה C כאפס.

כמו כן יש 3 דוגמאות פתורות.

ניתן להקדיש לפרק זה חלק של שיעור.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

[פתרון לשאלה \(13\) בעמוד 162 –](#)

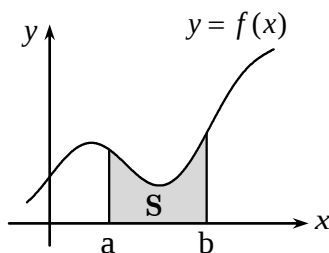
$$\begin{aligned} \int_m^{m+3} (x-2) dx &= \left. \frac{x^2}{2} - 2x \right|_m^{m+3} = \\ &= \left(\frac{(m+3)^2}{2} - 2(m+3) \right) - \left(\frac{m^2}{2} - 2m \right) = \\ &= \left(\frac{m^2 + 6m + 9}{2} - 2m - 6 \right) - \frac{m^2}{2} + 2m = 3m - 1.5 \end{aligned}$$

$$3m - 1.5 = 3 \Rightarrow 3m = 4.5 \Rightarrow m = 1.5 \text{ ואז}$$

פרק 8 – חישובי שטחים בעזרת אינטגרלים של פולינום

בפרק זה ניעזר באינטגרלים של פולינום לחישובי שטחים. ראשית ננסה לקשר בין השטח התחום בין הגרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן שעבר מרגע היציאה, ציר ה- x (זמן) וציר ה- y לבין הדרך שעברה הרכבת. בדוגמה הראשונה המהירות קבועה. בדוגמה השנייה המהירות משתנה בתאוצה קבועה ולכן נדבר על מהירות ממוצעת. בדוגמה השלישית, שבה גרף הפונקציה המתאר את המהירות הוא פרבולה, נגיע למסקנה שאין אפשרות לחשב ישירות את השטח, ולכן חייבים לחשב באמצעות אינטגרל. הרעיון יפה, ומקשר נושאים שונים, ומעורר מוטיבציה. יחד עם זאת, בכיתות חלשות ניתן להראות את חישובי השטחים בדוגמאות (1), (2) בשתי דרכים שונות, ולהסיק בדוגמה (3) שחייבים אינטגרל.

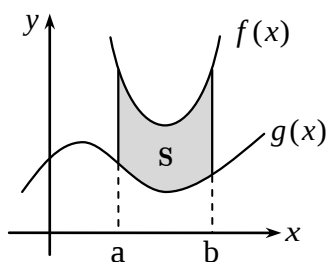
בפרק נביא 4 כללים לחישוב שטחים באמצעות אינטגרל. יש חשיבות לסדר לימוד הכללים, כפי שנסביר להלן:



כלל 1

$f(x)$ מוגדרת בתחום $a \leq x \leq b$, אי שלילית לכל x בתחום. השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים $x = a$, $x = b$, הוא:
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

בדוגמה (1) נראה את חישוב השטח כאשר $f(x)$ היא פונקציה קווית, בשתי דרכים שונות.

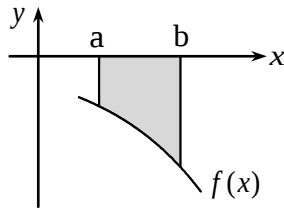


כלל 2

נתונות הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ המוגדרות בתחום $a \leq x \leq b$, ונתון כי לכל x בתחום זה מתקיים $f(x) \geq g(x)$. השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות ובין הישרים $x = a$ ו- $x = b$, הוא:
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

בספר יש הסבר לכלל כאשר השטח המבוקש כולו מעל ציר ה- x . בדוגמה בעמוד 167, בהערה, יש הסבר שניתן להזיז אנכית את הגרפים, כך ששניהם יהיו מעל ציר ה- x , ועדיין לקבל אותה תוצאה. לכן כאשר מחשבים שטח בין שני גרפים, שאינם נחתכים בתחום המבוקש, אין חשיבות למיקום הגרפים ביחס לציר ה- x .

המשך בעמוד הבא <<<

כלל 3

נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $a \leq x \leq b$ ונתון כי הפונקציה **לא חיובית** לכל x בתחום זה.

השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $y = f(x)$,

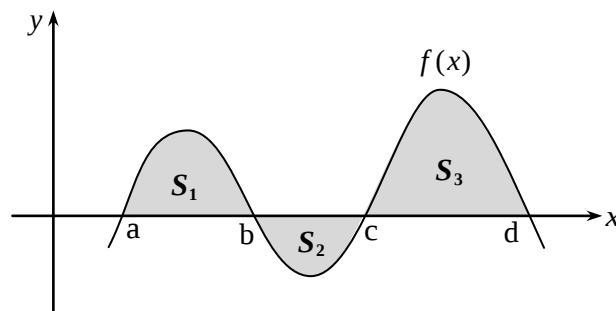
ציר ה- x והישרים $x = a$ ו- $x = b$

$$\text{הוא: } S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx$$

ניתן להסביר את חישוב השטח גם כהפרש בין שני הגרפים $(0 - f(x))$, ראו הערה עמוד 168. באמצעות 3 כללים אלה ניתן לחשב כל שטח שנתבקש.

כלל 4

חישובי שטחים באמצעות סכום או הפרשי שטחים.



לדוגמה:

כדי לחשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין ציר ה- x בתחום $a \leq x \leq d$ יש לחשב את סכום שלושת השטחים המסומנים בסרטוט:

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx \quad \text{כלומר:}$$

כל כלל מלווה בדוגמאות בהסברים ובהערות חשובות.

אנו ממליצים לעבור על כל הדוגמאות.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית

התרגילים מסודרים על פי רוב לפי סדר הכללים שנלמדים.

נלמד את כלל 1, ונוכל לפתור תרגילים (1) – (4).

כלל 2 יאפשר לפתור תרגילים (5) – (6).

כלל 3 יאפשר לפתור תרגילים (7) – (8).

מתרגיל (9) נשתמש בכל הידע שנרכש.

כאשר הגרף של אחת הפונקציות הוא קו ישר המקביל לציר ה- x , ניתן להשתמש בשטח מלבן ובחיסור שטחים. לדוגמה:

תרגיל (11) בעמוד 175 –

דיר 1: ניתן לחשב את S_1 כהפרש השטחים בין שטח המלבן (S_{OCBA}) לשטח S_2 .

$$S_1 = S_{OCBA} - S_2 \quad \text{כלומר:}$$

$$S_1 = S_{OCBA} - \int_0^{x_A} g(x) dx$$

דיר 2: ניתן לחשב את S_1 באמצעות אינטגרל על הפרש פונקציות:

$$S_2 = \int_0^{x_A} g(x) dx$$

$$S_1 = \int_0^{x_A} (4 - g(x)) dx$$

פרק זה חשוב ביותר, ואנו ממליצים (אם אפשר) להקדיש לו יותר מ-4 שעות.

עד תרגיל (15) התרגילים יחסית בסיסיים.

בתרגיל (16) התלמידים צריכים לסרטט את גרף הפונקציה.

בתרגילים (17) – (18) השטחים יותר מורכבים.

בתרגילים (22) – (23) יש למצוא ערך של פרמטר.

מתרגיל (31) השטחים כוללים גם משוואת משיק.

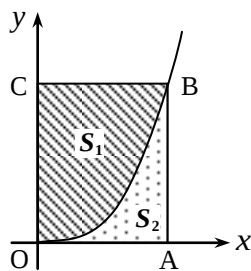
מומלץ להזכיר לתלמידים מציאת משוואת משיק.

תרגיל (31) פשוט יחסית, אך יש למצוא בו משוואת משיק.

בתרגיל (32) יש למצוא משוואת משיק וניתן לחשב את השטח המבוקש במספר דרכים.

תלמידים יצירתיים יציעו דרכים שונות. ניתן להציג בפני הכיתה את הדרכים השונות ולדון בהן.

גם אם הדרך שגוייה, ניתן ללמוד מזה.

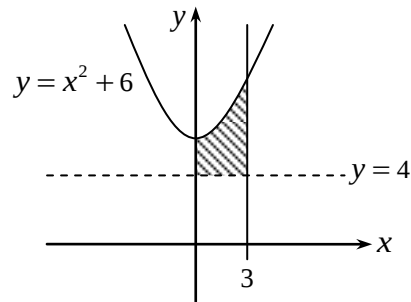


פתרון לשאלה (2) בעמוד 173 –

$$S = \int_0^3 (x^2 + 2) dx = \left. \frac{x^3}{3} + 2x \right|_0^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3 \right) - (0) = 9 + 6 = 15 \quad (\text{א})$$

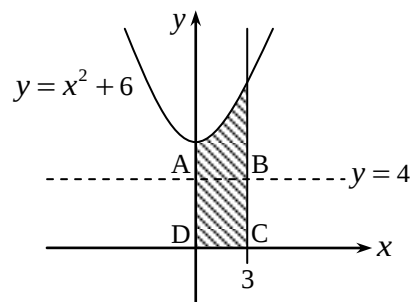
(ב) + (ג)

גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל על ידי הזזה של 4 יחידות מעלה של גרף הפונקציה $f(x)$.
הישר שמשוואתו $y = 4$ הוא ישר שמקביל לציר ה- x ונמצא 4 יחידות מעליו.



השטח המבוקש הוא השטח המקווקו שבסרטוט, והוא זהה ושווה לשטח שמצאנו בסעיף (א),
כלומר $S = 15$.

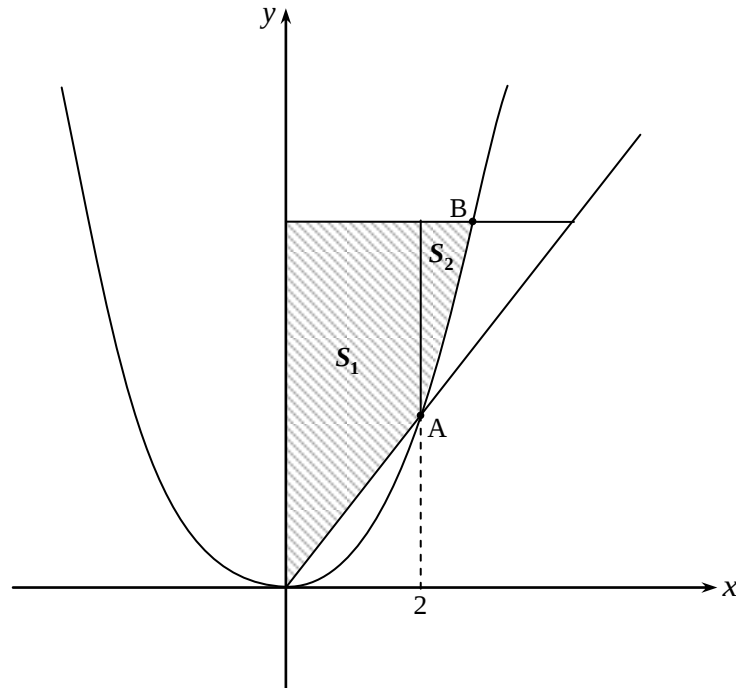
(ד) השטח המבוקש מקווקו בסרטוט הבא:



השטח המבוקש הוא הסכום של השטח שחושב בסעיף (ג) ושטח המלבן ABCD.

$$S_{\text{מבוקש}} = 12 + 15 = 27 \Rightarrow S_{\text{ABCD}} = 4 \cdot 3 = 12$$

פתרון לשאלה (17) בעמוד 176 –



נמצא את שיעור ה- x של הנקודה A .

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

שיעור ה- x המתאים לנקודה A הוא $x_2 = 2$.

נמצא את שיעור ה- x של הנקודה B :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$$

שיעור ה- x המתאים לנקודה B הוא $x_1 = 3$.

נעביר אנך לציר ה- x מנקודה A ונחלק את השטח המבוקש לשני שטחים S_1 ו- S_2 .

$$S_1 = \int_0^2 (9 - 2x) dx = 9x - x^2 \Big|_0^2 = (9 \cdot 2 - 2^2) - (0) = 14$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_2^3 (9 - x^2) dx = 9x - \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) = (27 - 9) - \left(18 - 2\frac{2}{3}\right) = \\ &= 18 - 15\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$S_{\text{מבוקש}} = 14 + 2\frac{2}{3} = 16\frac{2}{3}$$

כלומר: