

מדריך למורה - מבוא

ספר זה הינו המדריך למורה לספר השלישי מסדרת אולימפוס :

מתמטיקה לתלמידי 4 יח"ל חלק ג – סטטיסטיקה והסתברות

המדריך למורה לספר של 4 יח"ל חלק ג עוסק בסטטיסטיקה והסתברות ומיועד למורים המלמדים עם ספר זה.

בספר הלימוד בכל פרק תמצאו:

א. חלק תיאורטי

החלק התיאורטי מלווה בדוגמאות ובהסברים מפורטים.

ההגדרות והמסקנות מודגשות ברקע אפור ובמסגרת.

ב. דוגמאות פתורות

שאלות מלוות בפתרון מלא ובהסברים מפורטים.

ניתן להיעזר בדוגמאות הפתורות במהלך השיעור בכיתה, או להפנות אליהן תלמידים שזקוקים להסבר נוסף.

ג. תרגילים לעבודה עצמית

התרגילים בכל פרק בסדר קושי עולה ובהתאם לחלק התיאורטי ולדוגמאות.

במדריך למורה בכל פרק תמצאו:

א. פריסות הוראה

פריסות הוראה המותאמות לפריסות ההוראה המומלצות של הפיקוח על המתמטיקה. בפריסות ההוראה אנו

מציינים גם את שעות ההוראה המומלצות לכל נושא. זאת בהנחה שמלמדים 5 ש"ש.

יש להתייחס לשעות אלה בגמישות. ייתכן שיהיו נושאים שידרשו יותר זמן וכאלה, שפחות. זאת מסגרת הזמן

המומלצת אך יש להתאימה לקצב של הכיתה. כמובן שאם יש יותר שעות הוראה, ניתן להעמיק יותר, לעבור

על תרגילים נוספים או להתקדם מהר יותר.

ב. תרגילי ליבה

פירוט של תרגילי ליבה בפרק. הכוונה היא לתרגילים מומלצים לכיתה או כשיעורי בית על מנת להבטיח את

הבנת התלמידים. כמובן שניתן ומומלץ לפתור תרגילים נוספים מהפרק.

לקראת מבחן ניתן לפתור את התרגילים שלא עברתם עליהם עדיין, להיעזר בתרגול הנוסף בנספחים בסוף

הספר וכן בדפי עבודה נוספים שיועלו לאתר כתרגילי סיכום וחזרה בנושאים השונים.

המדריך הדיגיטלי למורה יתעדכן מדי פעם.

ג. דגשים מתמטיים ופדגוגיים הקשורים לנושא הנלמד כולל פתרונות והסברים לתרגילים נבחרים

מתוך ספר הלימוד או סעיפים נבחרים מתוכם.

ג. פתרונות והסברים לתרגילים / סעיפים נבחרים.

כרך ג – 4 יח"ל כיתה יוד התשפ"ז

פריסת שעות

לחודשים מרץ – מאי

המסמך מבוסס על ההנחות הבאות :

לסטטיסטיקה והסתברות מוקדשות בחודשים אלה סה"כ 41 שעות (20 לסטטיסטיקה ו- 21 להסתברות).
מרץ מוקדש כולו לסטטיסטיקה (פרקים 1 עד 4), אפריל מוקדש לסטטיסטיקה והסתברות (פרקים 4 עד 7),
מאי מוקדש להסתברות (פרקים 8 עד 11).
מרץ מתוכנן לפי 16 שעות בגלל פורים, חודש אפריל לפי 12 שעות בגלל פסח וחודש מאי לפי 13 שעות בגלל ימי
זיכרון וכדומה. הפריסה בהנחה של 5 ש"ש ממוצע 22 שעות לחודש רגיל.
הטבלה הבאה פורסת את הלימוד לפי מספרי עמודים בספר ולפי שעות ותרגילי ליבה לכל פרק.

פרק	סעיף	נושא	עמודים	מספר שעות	רשימת תרגילי ליבה
1		מושגי יסוד בסטטיסטיקה	6-7	1	
2	א	הצגת נתונים באמצעות רשימה וטבלת שכיחויות	8-10	1	(6), (5), (2)
	ב	שכיחות יחסית ושכיחות יחסית באחוזים	11-22	1	(15), (12), (6), (2), (1)
	ג	שכיחות מצטברת	23-24	1	(2), (1)
	ד	טבלת שכיחויות עם תחום ערכים וגבולות אמיתיים	25-28	1	(2), (1)
	ה	הצגת נתונים באמצעות ייצוג גרפי	28-32	2	(4), (2)
			33-39		(7), (4), (3), (1)
			40-42		(2), (1)
			42-44		(2), (1)
3	א	ממוצע	45-59	2	(13), (11) – (9), (7), (4), (3), (23) – (21), (19) – (17), (27), (26)
		ממוצע משוקלל	60-65		(9), (7), (5), (4), (1)
	ב	החציון	66-75	1	(9), (8), (6), (4), (2), (13) – (11)
	ג	השכיח	76-81	1	(9), (8), (6), (4), (3), (1)
	ד	השוואה של שניים (או יותר) ייצוגים שונים	82-99	1	(12), (9), (8), (6), (4), (1), (14)

פרק	סעיף	נושא	עמודים	מספר שעות	רשימת תרגילי ליבה
3	ה	תרגילי חזרה: ממוצע, חציון, שכיח	100-120	2	(2), (6), (7), (9), (12), (14), (16), (19), (21), (23) – (26), (30), (31), (33), (34), (37), (40) – (43)
	ו	רבעונים ועשירונים * נושא זה ירד במיקוד תשפ"ז	121-129	1	(1), (2), (6) – (8)
4	א	טווח * נושא זה ירד במיקוד תשפ"ז	130-131	1	
	ב	שונות וסטיית תקן * נושא זה ירד במיקוד תשפ"ז	131-145	2	(1), (2), (4), (6), (7), (9), (11), (12)
	ג	שאלות חזרה בסטטיסטיקה	146-157	2	(2), (4), (5), (6), (8), (10) – (13), (15), (17) – (20)
	א	מושגי יסוד בהסתברות	158-164 165-172 173-180	1	(2), (5), (8) (1), (3), (5), (6), (8) (3), (5), (9) – (11), (14)
5	ב	תיאור מרחב המדגם בניסוי דו-שלבי או תלת-שלבי	181-187	1	(1), (4), (9), (11), (12), (15)
		דיאגרמת עץ	188-209	4	(1), (4), (8), (12), (14), (17), (20), (26), (32), (33), (37), (39), (40), (42), (44), (45)
7		טבלה דו-ממדית	210-221	3	(1), (4), (5), (7), (9)
8	א	הסתברות מותנית	222-244	3	(1), (3), (7), (9), (11) – (13), (17), (19), (22), (25), (27), (29), (31)
	ב	תלות בין מאורעות	245-259		(3), (6), (7), (9), (10), (12), (15), (16), (18), (19)
9		הסתברות מותנית: נוסחת בייס, שאלות נוספות	260-262	1	(3), (4)

פרק	סעיף	נושא	עמודים	מספר שעות	רשימת תרגילי ליבה
10		סיכום ושאלות חזרה בהסתברות	263-282	4	(2), (4), (7) – (9), (11), (14), (18), (20), (22), (23), (25), (28), (29), (33), (35) – (37), (40) – (42), (47), (48), (50), (52), (56), (58) – (62), (64), (66) – (68)
11		שילוב סטטיסטיקה והסתברות	283-295	4	(3), (6) – (8), (11), (14), (15), (17) – (20)
			סה"כ 41 שעות		

דגשים מתמטיים ופדגוגיים לפרקי הסטטיסטיקה

לפי פריסת ההוראה המומלצת של הפיקוח על המתמטיקה, בחודשים מרץ - מאי יש ללמד את הנושאים המופיעים בפרקים 1 – 11.

פרק 1 – מושגי יסוד בסטטיסטיקה

בפרק זה נגדיר מושגים בסיסיים בסטטיסטיקה כגון: מדגם, משתנה, ערכי משתנה, סוגי משתנים ועוד. ההגדרות מלוות בדוגמאות. ניתן לבקש מהתלמידים לתת דוגמאות למושגים השונים.

פרק 2 – הצגת נתונים ותיאורם הגרפי

בפרק זה נלמד על הצגת נתונים בייצוגים שונים.

סעיף א – הצגת נתונים באמצעות רשימה ובאמצעות טבלת שכיחויות (עמודים 8 – 12)

בסעיף זה נעסוק ברשימה ובטבלת שכיחויות. נסביר גם מהי שכיחות.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית עמודים 9 – 10 :

מעבר בין רשימה לטבלת שכיחויות (תרגילים (1), (2), (6), (7)),

שימוש בטבלה **לשליפת מידע** (למשל בתרגיל (3) – כמה תלמידים קיבלו ציון 9).

או **לחישוב מידע** (לדוגמה בתרגיל (3) – כמה תלמידים יש בכיתה).

התרגילים פשוטים, ואם לאחר 2 - 3 תרגילים רואים שהנושא הובן, ניתן להמשיך לסעיף הבא.

סעיף ב – שכיחות יחסית ושכיחות יחסית באחוזים

בסעיף זה נעסוק בשכיחות יחסית ובשכיחות יחסית באחוזים. בתחילת הסעיף יש תזכורת בנושא האחוזים.

רצוי להזכיר לתלמידים שעל מנת לחשב שכיחות יחסית באחוזים יש לכפול את השכיחות היחסית ב- 100.

ההסבר נמצא בתחילת סעיף ב.

בדוגמאות (1) – (5) בעמודים 12 – 15 יש התייחסות למשתנה כמותי ואיכותי, שילוב של אחוזים, והכרת

המושגים לפחות, פחות מ-, לכל היותר, יותר מ-. אנו ממליצים לעבור על הדוגמאות וההסברים בכיתה.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית שעמודים 16 – 21

התרגול פשוט ונועד לביסוס ההבנה של המושגים שנלמדו בסעיף זה (שכיחות יחסית ושכיחות יחסית באחוזים).

בתרגיל (6) עמוד 17 –

נתונה שכיחות יחסית באחוזים של התלמידים שקיבלו ציון 9, ונתון מספר התלמידים שקיבלו ציון זה.

בסעיף (ב) יש לחשב את מספר התלמידים בכיתה. אם 15% הם 6 תלמידים, בעצם שואלים על ה- 100%.

$$\text{ניתן להיעזר ביחס } \frac{\text{אחוז השינוי}}{100} = \frac{\text{כמות השינוי}}{\text{הכמות הכללית}} \Leftarrow \frac{15}{100} = \frac{6}{x} \Leftarrow 15x = 6 \cdot 100$$

או ב"ערך משולש" שבעצם מתבסס על אותו היחס: כמות אחוז

$$\begin{array}{ccc} 15 & \triangle & 6 \\ 100 & & x \end{array}$$

ידע זה בא לידי ביטוי גם בתרגילים (7), (8), (10), (14).

בתרגיל (13) עמוד 19 –

הבנת הנתונים מעט מורכבת בגלל מושג אחוז המשקולת – אחוז של אותו רכיב במדד. אנו ממליצים לעבור על תרגיל זה בכיתה.

סעיף ג – שכיחות מצטברת

בסעיף זה נעסוק בשכיחות מצטברת ושכיחות יחסית מצטברת. בהמשך הלמידה נראה שימושים לשכיחות מצטברת בחישוב חציון, רבעונים ועשירונים. התרגילים לעבודה עצמית בעמוד 24

סעיף ד – טבלת שכיחויות בה המשתנה מקבל תחום ערכים וגבולות אמיתיים

בסעיף זה נעסוק בטבלת שכיחויות כאשר הנתונים מוצגים בקבוצות שבהן יש למשתנה תחום ערכים. בעמוד 25 בדוגמה (1) יש הסבר מפורט בנושא. ובדוגמה (2) עמוד 26 מוסבר מהם "גבולות אמיתיים". התרגילים לעבודה עצמית בעמודים 27 – 28

סעיף ה – הצגת נתונים באמצעות ייצוג גרפי

בסעיף זה נעסוק בהצגת נתונים באופן גרפי.

ה1 – דיאגרמת מקלות / עמודות

ה2 – דיאגרמת עיגול

ה3 – היסטוגרמה (דיאגרמת מלבנים)

ה4 – גרף בדיד (גרף של נקודות)

בכל תת סעיף יש דוגמה מלווה בפתרון מלא ובהסברים מפורטים, ובסופה יתרונות ומגבלות של הייצוג המתואר, ונקודות שיש לשים לב אליהן.

סעיף ה1

התרגילים לעבודה עצמית בעמודים 30 – 32

בתרגילים (1) – (2) יש מעבר מרשימה לטבלת שכיחויות ולדיאגרמת מקלות (עמודות).

בתרגילים (3) – (4) יש מעבר מדיאגרמת מקלות לטבלת שכיחויות ושאלות על מה שנלמד בסעיפים קודמים.

סעיף 2ה

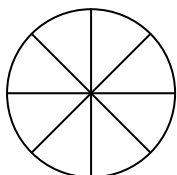
בסעיף זה נציג דיאגרמת עיגול. היא נוחה לקריאה לתלמידים אך קשה יותר לבנייה. המושג זווית מרכזית אינו מוכר לתלמידים בשלב זה, ולכן נמנענו מאזכור המושג.

התייחסות לשאלות לעבודה עצמית שבעמודים 35 – 39

שימו לב שישנן שאלות **פתוחות** ושאלות **מתפתחות** מסוגים שונים כגון:

- "לפי איזה ייצוג, לפי דעתכם, נוח לענות על סעיף..." (עמוד 35 תר' (3), עמוד 37 תר' (7))
- "מה הקשר בין הדיאגרמות..." (עמוד 31 תר' (5))
- שאלות אלה מעודדות דיון ושיח כיתתי.
- שאלות **מתפתחות** (עמוד 37 תר' (6), עמוד 37 תר' (7)).

כאשר התלמידים נדרשים לסרטט דיאגרמת עיגול, היא אינה חייבת להיות מדויקת אך כן צריכה להראות את היחס בין הגדלים השונים. חשוב לשים לב ולהיעזר בכך שניתן לחלק כל עיגול בקלות ל- 4 ול- 8 חלקים שווים, כך שכל חלק יהווה 25% מהשלם או 12.5% מהשלם (כמתואר משמאל). בתרגיל (3) מצורפת דיאגרמה ריקה המחולקת ל- 20 חלקים שווים. כדאי לברר ראשית כמה אחוזים מייצג כל חלק.

**סעיף 3ה**

בסעיף זה נעסוק בהיסטוגרמה. זהו המשך ישיר לסעיף ד, שבו עסקנו במשתנה רציף. הסבר מפורט על אופן בניית ההיסטוגרמה נמצא בעמוד 41 בסעיף זה.

השאלות לעבודה עצמית בנושא ההיסטוגרמה בעמודים 41 – 42**סעיף 4ה**

בסעיף זה נעסוק בגרף בדיד – גרף נקודות. **שימו לב:** בעמוד 42 – אין משמעות לחיבור הנקודות. אם קיים חיבור בין הנקודות, הוא נועד להסקת מגמות. בתרגילים (עמודים 43 – 44) יש מעברים בין ייצוגים שונים ושאלות על התאמת הייצוגים לשאלות ולנתונים.

פרק 3 – עיבוד הנתונים - מדדי מרכז

פרק זה עוסק בעיבוד נתונים ובמדדי מרכז.

סעיף א – ממוצע וממוצע משוקלל

סעיף ב – חציון

סעיף ג – שכיח

סעיף ד – השוואה של שניים (או יותר) ייצוגים שונים

סעיף ה – תרגילי חזרה בנושא מדדי מרכז (ממוצע, חציון, שכיח)

סעיף ו – רבעונים ועשירונים

סעיף א – ממוצע וממוצע משוקלל

א-1 – הממוצע

התלמידים מכירים את המושג מחיי היומיום. אפשר לבדוק איתם איפה שמעו את המילה ממוצע, להביא קטע אקטואליה שמשתמש במושג ועוד...

בדוגמאות מובא חישוב הממוצע בדרך הדרגתית כסכום כל ערכי המשתנה מחולק במספר הנתונים, הסכום מתוך טבלה כאשר כופלים כל ערך משתנה בשכיחות שלו ומתוך דיאגרמת מקלות.

דוגמאות (1) – (4), (6) – הינן דוגמאות פשוטות לחישוב ממוצע ולחישוב ערך משתנה כאשר הממוצע נתון. בדוגמה (5) יש שינוי של משתנה שאינו משפיע על הממוצע.

ניתן לקיים שיח כיתתי בנושא, להביא דוגמאות מספריות שונות ולבדוק באילו תנאים זה קורה.

דוגמאות (7) – (11) עוסקות בממוצע משוקלל.

בדוגמה (8) יש חישוב ממוצע של משתנה רציף הנתון בקבוצות. בסעיף (ג) – יש שאלה פתוחה שכדאי לקיים עליה דיון כיתתי.

בעמוד 50 מגדירים סטייה מהממוצע ומראים כי סכום הסטיות מהממוצע תמיד שווה ל-0.

נזקק למידע זה כאשר נלמד על סטיית התקן.

דוגמה (9) ממחישה שימוש בתכונה זו של הממוצע.

בעמוד 51 יש **פעילות מתוקשבת** מומלצת בנושא תכונות הממוצע (ניתן להוריד את הפעילות מאתר משבצת בכתובת הקישור המצורף לפעילות).

בפעילות זו ניתן להוסיף מספר מתחת לממוצע / מעל לממוצע / שווה לממוצע ולראות את השפעת התוספת על הממוצע. ניתן לכפול / לחלק כל ערך משתנה במספר קבוע או לחבר / לחסר מספר קבוע ולבדוק את השפעת הפעולה על הממוצע.

כמו כן ניתן להראות בפעילות שסכום הסטיות מהממוצע הוא תמיד אפס (כפי שצינו בעמוד 50).

פעילות זו תורמת להבנת תכונות הממוצע ולהגעה להכללה שמופיעה מיד אחריה בעמוד 52,

וגם להבנת שאלות כגון שאלה (13) בעמוד 54.

התרגילים לעבודה עצמית בעמודים 52 – 59.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית שבעמודים 52 – 59

התרגילים עוסקים בחישוב ממוצע בייצוגים שונים: רשימה, טבלה, גרף עמודות. התרגילים מסודרים ברמת קושי עולה.

שאלה (13) עמוד 54 היא שאלה על השפעת שינוי בנתונים על הממוצע. סעיפים (א) – (ד) הם סעיפים חישוביים, אך ניתן להרחיב אותם. לדוגמה:

בסעיף (א) ניתן להזכיר שאם נוסף נתון השווה לממוצע, הממוצע לא ישתנה. בסעיפים (ב) – (ג) ניתן להכליל:

(ב) אם נוסף נתון מעל הממוצע, הממוצע יגדל.

(ג) אם נוסף נתון מתחת לממוצע, הממוצע יקטן.

סעיפים (ה) ו- (ו) הם סעיפים איכותניים, הדורשים הכללה והבנה.

שאלה (17) עמוד 55 היא שאלה איכותנית על תוספת של 3 נתונים לחישוב הממוצע. אם נתון שהציון הממוצע 80 נשאר 80 לאחר תוספת של 3 ציונים, ברור שסכום הציונים שהתווספו צריך להיות $3 \cdot 80 = 240$.

לאחר שידועים את זה ניתן לחשב את הציונים השונים, בתנאים שונים שמוצגים בסעיפים.

סעיפים (ו) ו- (ז) הם שאלות פתוחות. סכום ציוניהם של דני רמי וגדי הוא 240.

(ו) אם ציונו של גדי 78, סכום ציוניהם של דני ורמי הוא $240 - 78 = 162$.

ניתן לבחור כל שני ציונים שסכומם הוא 162 $100 \leq \text{ציון} < 0$, לדוגמה: 82, 80.

(ז) ניתן לבחור כל 3 מספרים $100 \leq \text{ציון} < 0$ כך שסכומם יהיה 240.

לדוגמה: (100, 40, 100), (80, 80, 80), (75, 80, 85)

א-2 – ממוצע משוקלל

התלמידים מכירים את המושג ממוצע משוקלל בעיקר מחישוב ציונים לתעודה. מומלץ לפתח על כך שיח כיתתי.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית שבעמודים 64 – 65

שאלות (1) – (6) עוסקות ב-2 קבוצות עם ממוצעים שונים ומספר מסוים של נתונים בכל קבוצה.

התרגיל (9) עמוד 65:

(א) מספר המהנדסים: $\frac{2}{5} \cdot 30 = 12$

מספר הטכנאים: $30 - 12 = 18$

(ב) סכום המשכורות של כל המהנדסים: $120,000$ ש"ח $12 \cdot 10,000 =$

סכום המשכורות של כל הטכנאים: $135,000$ ש"ח $18 \cdot 7,500 =$

(ג) $\bar{X} = \frac{120,000 + 135,000}{30} = 8,500$ ש"ח

(ד) ניתן לענות על סעיף (ג) מבלי לפתור קודם את סעיפים (א) ו- (ב) בעזרת ממוצע משוקלל והשכיחויות

היחסיות של כל נתון: $8,500$ ש"ח $\bar{X} = \frac{2}{5} \cdot 10,000 + \frac{3}{5} \cdot 7,500 =$

סעיף ב – החציון

כאשר מחשבים חציון יש לסדר את הנתונים לפי סדר עולה.

בחישוב החציון יש להבחין בין מספר נתונים זוגי לבין מספר נתונים אי-זוגי.

בעמוד 67 יש טיפ לחישוב החציון ללא הבחנה אם מספר הנתונים הוא זוגי או אי-זוגי.

חשוב להבחין בין מיקום הנתון לבין ערכו.

בחישוב החציון נתייחס בנוסף: • לשינוי בנתונים – בדוגמאות (4), (7)

• לנתונים המוצגים בקבוצות – דוגמה (5)

בעמוד 71 (עם קישור להורדה מאתר של משבצת) יש פעילות מתוקשבת מומלצת בנושא תכונות החציון.

בקובץ הפעילות המוכן יש מספר זוגי או אי-זוגי של נתונים וניתן:

א - להוסיף / להחסיר מספר קבוע לכל נתון / מכל נתון.

ב - לכפול / לחלק כל נתון במספר קבוע.

ולחסיק כיצד פעולות אלו ישפיעו על החציון.

המסקנות מהפעילות נמצאות בעמוד 71 במסגרת.

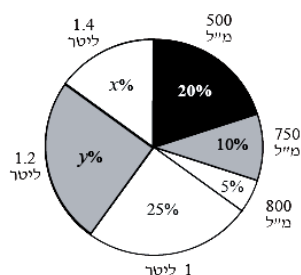
התרגילים לעבודה עצמית בעמודים 72 – 75

התרגילים לעבודה עצמית מסודרים לפי דרגת קושי עולה וכוללים ייצוגים שונים ומגוונים.

פתרון תרגיל (9) עמוד 74:

הערה: בדיאגרמה המופיעה בשאלה זו בספר המודפס נפלה טעות בהקלדה,

יש להחליף בין x ל- y (ראו סרטוט מתוקן משמאל).



$$20\% + 10\% + 5\% + 25\% + y\% + x\% = 100\% \quad (\text{א})$$

$$60\% + y\% + x\% = 100\% \Rightarrow y\% = 40\% - x\% \Rightarrow y = 40 - x$$

נפח (בליטרים)	0.5	0.75	0.8	1	1.2	1.4
שכיחות	0.2	0.1	0.05	0.25	$\frac{y}{100}$	$\frac{x}{100}$

(ב) ניעזר בטבלת השכיחות הבאה:

נתון:

$$0.975 \text{ ליטר} = 975 \text{ מ"ל} = \bar{x},$$

$$0.975 = 0.2 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.75 + 0.05 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 1 + \frac{y}{100} \cdot 1.2 + \frac{x}{100} \cdot 1.4 \quad \text{לכן:}$$

$$0.975 = 0.465 + 0.012y + 0.014x \Rightarrow 0.975 = 0.465 + 0.012(40 - x) + 0.014x$$

$$0.975 = 0.465 + 0.48 - 0.012x + 0.014x \Rightarrow 0.03 = 0.002x \Rightarrow x = 15 (\Rightarrow y = 25)$$

נפח (בליטרים)	0.5	0.75	0.8	1	1.2	1.4
שכיחות	0.2	0.1	0.05	0.25	0.25	0.15
שכיחות מצטברת	0.2	0.3	0.35	0.6	0.85	1

(ג) אם מסדרים את ערכי המשתנה בסדר עולה,

החציון הוא המשתנה הקטן ביותר, שעבורו

השכיחות המצטברת היא 50% או יותר.

כלומר ל- 35% מהקופסאות יש נפח של

800 מ"ל לכל היותר ($20\% + 10\% + 5\% = 35\%$).

כמו כן, ניתן לראות כי ל- 60% מהקופסאות יש נפח של 1 ליטר לכל היותר,

($20\% + 10\% + 5\% + 25\% = 60\%$), ולכן החציון הוא נפח גלידה של 1 ליטר.

בתר/ו תרגיל (13) עמ' 75 :

(א) אם החציון הוא ציון 6.5 הרי שמספר התלמידים שקיבלו ציון גבוה ממנו (ציון 7 או יותר)

שווה למספר התלמידים שקיבלו ציון נמוך ממנו (ציון 6 או פחות).

כלומר 20 תלמידים קיבלו ציון 6 או פחות.

$$z + 8 + 3 = 20 \Rightarrow z = 9$$

(ב) נתונים ציונים של 40 תלמידים מצאנו בסעיף (א) ש- $z = 9$.

$$1 + x + y + z + 8 + 3 = 40 \quad \text{לכן:}$$

$$x + y = 29 \Rightarrow y = 19 - x$$

$$\bar{x} = 6.3$$

נקבל את המשוואה:

$$6.3 = \frac{3 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 6 + (19 - x) \cdot 7 + 8 \cdot x + 1 \cdot 9}{40} \quad / \cdot 40$$

$$252 = 12 + 40 + 54 + 133 - 7x + 8x + 9 \Rightarrow x = 4$$

$$y = 19 - x = 19 - 4 = 15 \quad \text{ואז:}$$

סעיף ג – השכיח

השכיח הוא מושג פשוט. ניתן לשאול שאלות הדורשות חשיבה ולחזור על מושגים שכבר נלמדו כגון משתנה כמותי או איכותי, ממוצע, חציון, שכיחות.

תרגילים לעבודה עצמית בעמודים 79 – 81.

(4) שאלת הבנה.

השאלה משלבת שכיח, חציון וממוצע.

(א) אם המשכורת השכיחה היא 9,000 ש"ח, אז $y > x$.

אם סה"כ מספר העובדים אי-זוגי, אז החציון הוא בוודאות אחת המשכורות ולכן יהיה 9,000 ש"ח.

לדוגמה: עבור $x = 4$, $y = 6$,

מספר העובדים הוא 10,

החציון "נמצא" במקום ה- $5.5 = \frac{11}{2}$ (הממוצע בין המקום 5 ו-6),

כלומר החציון הוא 9,000 ש"ח.

סעיף ד – השוואה בייצוגים שונים

סעיף זה כולל קריאת מידע של קבוצות נתונים והשוואה כמותית ואיכותית ביניהם. השאלה "באיזה ייצוג היה נוח להשתמש כדי לענות על השאלה?" היא שאלה פתוחה ותלויה בתלמיד. ניתן לקיים שיח כיתתי בנושא. לעיתים התשובה ברורה למשל בדוגמה (2) עמוד 83: בחישוב חציון יעדיפו טבלת שכיחויות. בסעיף (ה) של אותה דוגמה – מהו אחוז התלמידים שקיבלו ציון גבוה מהממוצע? כנראה שתהיה העדפה לטבלת שכיחויות. לעומת סעיף (ג) – מהו החציון השכיח? נראה בבירור מהגרף. לעיתים בשאלות אין הנחייה לבנות טבלה, אבל זה יכול להועיל לתלמידים. זה נדרש בעיקר בחישוב חציון. זאת הזדמנות לדבר על כך גם עם התלמידים, ונמצא במסגרת בעמוד 84. בדוגמה (3) בעמוד 85 ניתן לחשב את ממוצע משקלי התינוקות בבית חולים ב' בשתי דרכים: דרך א - לפי האחוזים בדיאגרמה (ממוצע משוקלל), דרך ב - באמצעות טבלת שכיחויות.

תרגילים לעבודה עצמית בעמוד 88

תרגילים (1) – (2) הינם תרגילים פשוטים. תרגיל (3) המשיך לתרגיל (2). יש בו חישוב מחודש של חציון ממוצע וחציון בקבוצה מאוחדת. בסעיף (ב) נדרש ידע בחישוב ממוצע משוקלל של שתי קבוצות.

סעיף ה – תרגילי חזרה: ממוצע, חציון, שכיח

בסעיף זה תרגילים המסכמים את הנושא ועוסקים בשני סוגי משתנים, בייצוגים שונים, בממוצע חציון ושכיח. אנו ממליצים להקדיש לסעיף זה 2 ש"ש, ולחזור אליו לקראת מבחן בנושא.

התייחסות לתרגילי החזרה שבעמודים 100 – 120**הסבר תרגיל (i) - תרגיל (2) עמ' 100:**

(i) (b) שימו לב המשתנה הוא איכותי (שם של מספר קו אוטובוס) ולא כמותי למרות שהוא מכיל מספר.

פתרון תרגיל (19) עמ' 104:

(א) ממוצע הגבהים של 12 הבנים הוא 164 ס"מ.
ולכן סכום הגבהים שלהם הוא: $164 \cdot 12 = 1,968$ ס"מ
ממוצע הגבהים של 13 הבנים (שכולל את הבן שהצטרף) הוא: 163.5 ס"מ
 $164 - 0.5 = 163.5$ ס"מ
ולכן סכום הגבהים שלהם הוא $163.5 \cdot 13 = 2,125.5$ ס"מ
לכן גובה התלמיד שהצטרף הוא $2,125.5 - 1,968 = 157.5$ ס"מ
באופן דומה הגובה של התלמידה שהצטרפה:
 169.5 ס"מ $19 \cdot 160.5 - 18 \cdot 160 =$

(b) דפנה טועה.

הגובה הממוצע של 30 התלמידים הוא $\bar{x} = \frac{12 \cdot 164 + 18 \cdot 160}{30} = 161.6$ ס"מ

הגובה הממוצע של 32 התלמידים

(שכולל את הבן והבת שהצטרפו) הוא $\bar{x} = \frac{13 \cdot 163.5 + 19 \cdot 160.5}{32} = 161.72$ ס"מ

התרגון סעיף (א) תרגיל (42) עמ' 114 :

(א) בכיתה י 4 ל- $3\frac{1}{3}\%$ מהתלמידים יש 7 נפשות הגרות בביתם.

$$\frac{3\frac{1}{3}\%}{100\%} = \frac{1}{30}$$
 מתקיים

לכן מספר התלמידים בכיתה י 4 צריך להיות כפולה של 30 ולכן התשובה הנכונה היא (iii) 30.

התייחסות לתרגיל (33) עמ' 109 :

הנתונים בדיאגרמת עיגול באחוזים.

סעיף (א) – שכיח.

בסעיף (ג) – שימוש באחוזים. נתון האחוז ומספר התלמידים שמעדיפים לטייל באזור אילת, ויש למצוא את כמות כלל התלמידים המתכננים לצאת לטיול.

ניעזר בטבלה כדוגמת הטבלה משמאל,

$$30x = 24 \cdot 100$$

$$x = 80$$

ומכאן התשובה: 80 תלמידים מתכננים לצאת לטיול.

השאלה מתפתחת, ובסעיף (ד) מתווספים נתונים על מספר ימי הטיול המועדפים על התלמידים.

כיוון שמשנתנה זה כמותי (לעומת מיקום הטיול, שהוא משתנה איכותי), ניתן לחשב חציון.

30%	100%
24	x

סעיף ו – רבעונים ועשירונים (* נושא זה ירד במיקוד תשפ"ז)

הנושא נלמד עבור משתנה בדיד בלבד.

נסדר את הנתונים בטבלת שכיחויות הכוללת שורת שכיחות מצטברת, נציג נוסחה לחישוב מיקום האיבר ברבעון מסוים ונבחין בין תוצאה שלמה ותוצאה שאינה שלמה.

רבעון הוא האיבר במקום ה- $\frac{i(n+1)}{4}$ אם התוצאה שלמה.

אם התוצאה אינה מספר שלם, אז ערכו של הרבעון המתאים יהיה ממוצע של האיברים בשני המקומות השלמים הקרובים לתוצאה.

(כזכור מצאנו חציון לפי המקום ה- $\frac{N+1}{2}$ ראו "טיפ" בעמוד 67 בספר).

באופן דומה לרבעונים, נגדיר גם עשירונים.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית שבעמודים 125 – 129

תרגילים (1) – (6) עוסקים בנושא רבעונים ועשירונים בלבד בייצוגים שונים.

פתרון מלא לתרגיל (6) בעמוד הבא.

בתרגילים (7) – (8) מתייחסים גם למדדי מרכז שנלמדו.

קטרון תרגיל (6) עמוד 127 :

מספר העובדים במפעל $6 + 14 + 30 + 20 + 8 + 2 = 80$
 כדי לענות על סעיפים (א) – (ד) כדאי להוסיף טבלת שכיחויות עם שורת שכיחות מצטברת.

הכנסה חודשית (בש"ח)	7,000	7,500	8,000	8,500	9,000	9,500
מספר עובדים	6	14	30	20	8	2
שכיחות מצטברת	6	20	50	70	78	80

(א) נמצא את מיקום הרבעון השלישי (לפי סדר עולה) $\frac{3(80+1)}{4} = 60.75$

הרבעון השלישי הוא הממוצע של הנתונים במקומות ה- 60 וה- 61 לפי סדר עולה.

ניעזר בשכיחות המצטברת ונסיק כי הרבעון השלישי הוא 8,500 ש"ח $\frac{8,500 + 8,500}{2}$

(ב) נמצא את מיקום העשירון התשיעי $\frac{9(80+1)}{10} = 72.9$

לכן העשירון התשיעי הוא הממוצע של הנתונים במקומות ה- 72 ו- 73 לפי סדר עולה.

כלומר 9,000 ש"ח $\frac{9,000 + 9,000}{2}$

(ג) מיקום העשירון השני הוא $\frac{2(80+1)}{10} = 16.2$ כלומר העשירון השני הוא 7,500 ש"ח $\frac{7,500 + 7,500}{2}$.

מיקום העשירון השביעי הוא $\frac{7(80+1)}{10} = 56.7$

כלומר העשירון השביעי הוא 8,500 ש"ח $\frac{8,500 + 8,500}{2}$

כלומר הכנסה של 8,000 גבוהה מהעשירון השני ונמוכה מהעשירון השביעי.

(ד) ניעזר בשורת השכיחות המצטברת ונסיק כי מספר העובדים בעלי הכנסה של עד 7,000 ש"ח הוא 6,

ומספר העובדים בעלי הכנסה של עד 7,500 ש"ח הוא 20.

מיקום העשירון הראשון: $\frac{1(80+1)}{10} = 8.1 \Leftarrow$ מסקנה: העשירון הראשון הוא 7,500 ש"ח.

מיקום העשירון השני: $\frac{2(80+1)}{10} = 16.2 \Leftarrow$ מסקנה: העשירון השני הוא 7,500 ש"ח.

מיקום העשירון השלישי: $\frac{3(80+1)}{10} = 24.3 \Leftarrow$ מסקנה: העשירון השלישי אינו 7,500 ש"ח.

לכן התשובה:

להכנסה של 7,500 ש"ח מתאימות ההכנסות החודשיות של העשירון הראשון והעשירון השני.

פרק 4 – עיבוד נתונים - מדדי פיזור

(* נושאי פרק זה ירדו במיקוד תשפ"ז)

פרק זה עוסק בעיבוד נתונים בעזרת מדדי פיזור.

סעיף א – טווח

טווח הנתונים הוא ההפרש בין הערך המקסימלי של המשתנה שנמדד לבין ערכו המינימלי. אנו ממליצים לעבור על שתי הדוגמאות הפתורות, וכן על המסקנות בעמוד 131.

סעיף ב – שונות וסטיית תקן

לעיתים מדדי המרכז לא נותנים מידע מספיק על פיזור הנתונים סביב הממוצע. אנו מתחילים בדוגמה (1) עמוד 131 שבה יש שתי כיתות בעלות אותו ממוצע ציונים, אך יש הבדל גדול בין שתי הכיתות. המטרה בדוגמה זו היא לתת מוטיבציה ללמידת הנושא של מדד פיזור.

בעמוד 132 אנו מציגים את הדרך לחישוב סטיית התקן באופן כללי, תוך כדי הסברים, ומיד אחר כך מחשבים את סטיית התקן בדוגמה שהובאה לפני כן.

אנו רוצים לפתח אצל התלמיד את הבנת המשמעות של סטיית התקן ולכן בעמוד 133 יש הפנייה לפעילות חקר מתוקשבת לחישוב סטיית תקן. בפעילות זו התלמידים יבחינו בקשר בין סטיית התקן לבין מידת הפיזור סביב הממוצע. בנוסף ניתן לבדוק כיצד משפיעה הוספת מספר קבוע או כפל במספר קבוע של כל אחד מהנתונים על הממוצע ועל סטיית התקן.

בעמוד 134 בדוגמה (2) ראשית נבקש לדרג את הקבוצות לפי מידת הפיזור סביב הממוצע על סמך התבוננות בלבד, ורק אחר כך נבקש לחשב את סטיית התקן. ברור שניתן לעשות זאת רק במקרים שמידת הפיזור ברורה ומובהקת. בהמשך (דוגמאות (6) – (7) עמוד 138) נבדוק איך שינוי / תוספת נתונים תשנה את מידת הפיזור. נבקש להעריך אם סטיית התקן תהיה גדולה יותר / קטנה יותר / תישאר ללא שינוי ואז ניעזר בחישוב כדי לבדוק הערכה זו.

התרגילים לעבודה עצמית בעמודים 141 – 145

סעיף ג – שאלות חזרה בסטטיסטיקה

התרגילים מסכמים את כל נושא הסטטיסטיקה שנלמד בכיתה יוד. מומלץ לסיכום הנושא לעבור על שאלות ולתרגל מסעיף זה לקראת מבחן.

שאלות החזרה בעמודים 146 – 157 (כולל תשובות סופיות).

הסתברות - מבוא

חלק זה בספר מפגיש את התלמידים עם מושגים מתוך תורת ההסתברות. ההסתברות היא תורה מתמטית בעלת השלכות שימושיות לחיי היומיום. היא עוסקת בהתרחשויות הכרוכות באי-וודאות. פרק ההסתברות בכיתה יוד ברמת 4 יח"ל כולל מושגי יסוד בהסתברות, חוקי הסתברות, כלים לחישוב ההסתברות (כגון דיאגרמת עץ, טבלה דו ממדית ונוסחאות הנובעות מחוקי ההסתברות), הסתברות מותנית, תלות בין מאורעות, נוסחת בייס ושילוב נושא ההסתברות והסטטיסטיקה. השאלות בהסתברות הן בעלות אופי אורייני המצריך הבנת הנקרא.

הרקע התאורטי הבא מעובד מתוך עבודות הדוקטורט:

- 'תהליכי חשיבה ושיקול דעת בקרב תלמידי תיכון בעקבות לימוד הסתברות בשילוב סימולציות', מאת יונתן סגל מאוניברסיטת בר אילן, תשס"ו.
- 'אינטואיציות וסכימות בחשיבה הסתברותית- ההתפתחות עם הגיל של אינטואיציות הסתברותיות מוטעות', מאת דיצה שנרד, אוניברסיטת תל-אביב, תשנ"ט, 1998.
- שלוש סיבות להתמקדות בטעויות ובהטיות בלימוד הסתברות Kahneman, Slovic and Tversky (1982):
- הן חושפות חלק מהמגבלות האינטלקטואליות שלנו, ומורות על דרכים לשפר את איכות החשיבה שלנו.
- הן מגלות לעיתים את התהליכים המשתתפים בשיפוט ובקבלת החלטות.
- הן מסייעות למפות אינטואיציות אנושיות.
- לפי פיאיזה (1983), סכמה היא כלי שבאמצעותו האורגניזם מסתגל לסביבה הן במישור הביולוגי והן במישור הפסיכולוגי. הסכמות ההסתברותיות מובילות לאינטואיציות. אינטואיציות אלה הן לא תמיד נכונות. נדגים זאת בעזרת אחת הבעיות הקלאסיות בתחום ההסתברות, הלוקחה מתוך מחקר העוסק בקשר בין אינטואיציות לבין סכמות בגילאים שונים (Fischbein & Schnarch, 1997), והיא: בעיית המטבע. למטבע שני צדדים: עץ ופלי.

רמי הטיל מטבע הוגן 3 פעמים וקיבל את התוצאה עץ 3 פעמים ברציפות.

רמי עומד להטיל את המטבע פעם נוספת. לאיזו תוצאה סיכוי גדול יותר להתקבל ?

מסקנות המחקר שהתבצע על תלמידים מכיתה ה ועל תלמידי כיתה יא ובפרחי הוראה הראו כי שכיחותה של התשובה הנכונה עלתה עם הגיל. חלק מהנבדקים סבר כי **לפלי** יש סיכוי גדול יותר. שכיחותה של סכמה מוטעית זו פחתה עם הגיל. לדעת נבדקים אלה, העובדה **שעץ** הופיע 3 פעמים ברציפות, מגדילה את הסיכוי להופעת **פלי**, כדי שתישמר השכיחות היחסית של התוצאות השונות. למעשה, תשובה אינטואיטיבית מוטעית זו מבוססת על עיקרון לוגי שאינו מתאים לצורך פתרון בעיה זו: סכמת היציגות, שלפיה מדגם צריך לייצג את אוכלוסיית המקור שלו. דוגמה זו ממחישה כיצד סכמות מעצבות אינטואיציות בין אם הן מתאימות לבעיה ובין אם לאו. במחקר של Fischbein & Schnarch (1997), נמצא כי ההתפתחות של אינטואיציות הסתברותיות מוטעות הינה מגוונת מאוד. כמה מהאינטואיציות המוטעות הקשורות להסתברות משתפרות עם הגיל (כלומר שכיחות השימוש בהן הולכת וקטנה), וכמה מתחזקות עם הגיל (כלומר שכיחותן של תשובות שגויות גדולה יותר אצל תלמידים מבוגרים יותר). נמצא, שרק אינטואיציה מוטעית אחת נשארה יציבה לאורך כל הגילים. זוהי האינטואיציה בדבר שוויון הסיכויים לקבלת הצמדים 5-6 ו-6-6 בהטלת זוג קוביות.

נביא מספר גורמים מכשילים בלימוד הסתברות:

חוק המספרים הגדולים או חוסר רגישות לגודל המדגם

אחד הנושאים המרכזיים בהסתברות הוא ההשפעה שיש לגודל המדגם על הסקת מסקנות שונות לגבי האוכלוסייה. מחקרים שנערכו בארץ ובעולם מראים שלתלמידי בית-ספר התיכון, יש חוסר רגישות לגודל המדגם והם מסתמכים על גורמים לא רלוונטיים בהערכת הסתברות לאירועים.

על אף שלא ניתן לבא בוודאות את התוצאה של הטלת מטבע הוגן יחיד, או של קובייה מאוזנת, אפשר להעריך במידה רבה של ביטחון, שאחוז תוצאות ה"פלי" במספר גדול של הטלות יהיה קרוב ל-50, ושאחוז תוצאות "שש" במספר גדול של זריקות קובייה יהיה $\frac{2}{3}$ 16. המעבר מחוסר ודאות לוודאות כמעט מוחלטת: ככל שאנו משנים את מיקוד הסתכלותנו ממאורעות יחידים אל עבר מצבור גדול של אירועים, הינו כפי שניסח Ruelle (1991) תָּמָה מרכזית בלימוד הסתברות, רק בגלל סדר מצטבר זה ויכולת הניבוי הנובעת ממנו, אנו יכולים לדבר על 'חוקי הסיכויים'.

חוק המספרים הגדולים הוא אינטואיטיבי והולם את ניסיונם של בני האדם בתחומים רבים. הבעייתיות אינה נעוצה בהבנת עקרונות, אלא באה לידי ביטוי כאשר יש ליישם עקרונות אלו בבעיות מהחיים.

רבים נוטים להתעלם באופן אינטואיטיבי מהשפעת גודל המדגם כאשר הם מעריכים הסתברות.

למשל, הסיכוי ללדת 7 בנים לפחות ב-10% מהלידות נתפס כשווה לסיכוי ללדת 70 בנים לפחות ב-100% לידות. לפי חוק המספרים הגדולים, ככל שהמדגם גדול יותר, כך קרובה התוצאה להסתברות התיאורטית (במקרה זה, פרופורציית הבנים באוכלוסייה, 0.5).

לכן ממדגם בן 100 לידות, קיימת הסתברות נמוכה יותר שאחוז הבנים יסטה ביותר מ-20%, מאחוז הבנים באוכלוסייה. נביא שתי דוגמאות ידועות הממחישות את הנאמר:

- ממוצע הפגיעות של קלע בקשת וחץ הוא 60%. הקלע יורה בטכניקה חדשה במטווח בו הוא יורה

עשרה חיצים, ופוגע בשמונה מהם. האם כדאי לו לאמץ את הטכניקה החדשה?

לכאורה, התוצאות החדשות עדיפות על הישנות, אך לא התחשבנו במספר הקטן של הניסויים.

אולי עשרה ניסויים אינם מספיקים כדי להסיק מסקנה כלשהי? כאן חוק המספרים הגדולים איננו רק כלל תיאורטי אלא עיקרון רלוונטי המשמש כבסיס לקבלת החלטות.

- בעיר יש שני בתי יולדות, גדול וקטן. כל יום רושמים את מספר הבנים והבנות שנולדו.

מונים את כל הימים בהם היו יותר מ-60% לידות של בנים. באיזה בית יולדות היו יותר ימים

כאלה: הגדול? הקטן? או שמא אין הבדל? (כל זאת בהנחה שאין תלות בין לידה אחת לשנייה,

ושיש סיכוי שווה ללידת בן או בת).

בשאלה זו יש תחכום בשימוש בחוק המספרים הגדולים בבית היולדות הגדול, יהיו פחות סטיות מהממוצע.

בקטן יהיו יותר, ולכן יש לצפות ששם יהיו יותר ימים חריגים כאלה. תשובה לשאלה זו דורשת הבנה הנרכשת מביצוע ניסויים.

המחקרים מדווחים כי אנשים נוטים להאמין, שככל שהאוכלוסייה גדולה, כן חייב גם המדגם להיות גדול,

כדי לייצג אותה נאמנה. או באופן אחר, שמדגמים קטנים מתאימים יותר לאוכלוסיות קטנות

(Bar-Hillel, 1980; Evans & Bradshaw, 1986).

מסקנת החוקרים הייתה שיש לשים דגש על הבנה אינטואיטיבית ולהביא סיטואציות רלוונטיות לתלמידים.

אי-תלות

קיימת נטייה מוטעית להאמין שבתהליך מקרי, סטייה בכיוון אחד מתוקנת באמצעות סטייה בכיוון האחר במגמה לשמור על האיזון הכללי. לדוגמה נביא את "כשל המהמרים": בהטלה של מטבע הוגן, אחרי שהופיע עץ מספר פעמים ברציפות, אנשים מצפים שתגדל ההסתברות להופעת פלי כדי לשמור על איזון הסדרה. אמונה זו נקראת גם **Negative recency effect**. צורה דומה אחרת היא שכאשר רצף של אירוע אקראי מראה חסר של תוצאה אחת, הסיכויים של התוצאות הנותרות למהלכים הבאים עולים. נטייה פחות נפוצה היא האמונה ההפוכה, שאם תוצאה חוזרת מספר פעמים ברציפות, יש סיכוי גדול יותר שגם התוצאה הבאה תהיה כקודמותיה. אמונה זו נקראת **Positive recency effect**.

על פי העיקרון של אי-תלות התוצאות בניסוי **הסטוכסטי**, ההסתברות לקבלת פלי קבועה בכל הטלה, ואינה תלויה במה שקרה בהטלות הקודמות. עובדת היותו של המטבע הוגן, אינה מתבטאת בתיקון סטיות קודמות אלא בהקטנת השפעתה של הסטייה ככל שמספר ההטלות הולך וגדל (Falk & Konold, 1992; Fischbein, Nello & Marino, 1991). כשל באי-תלות באופן של **Negative recency effect** בא לידי ביטוי ביחס של אנשים רבים לאפשרות של אסונות טבע, שידועים כאירועים שאינם תלויים בזמן. אנשים רבים סוברים שהתפרצותו של אסון טבע כמו רעידת אדמה, שיטפון והוריקן, מבטיח פחות או יותר שאירוע מסוג זה לא יקרה שוב בעתיד הקרוב (Burton, Kates & White, 1978).

דוגמה נוספת:

מורה מבקש מתלמידי כיתתו לדווח כמה אחים ואחיות יש לכל אחד מהם (לא כולל עצמם).

למי לדעתך יש בממוצע יותר אחים, לבנים או לבנות?

שאלה זו מבוססת גם היא על אותו עיקרון, אך כאשר הוא מוצג, השאלה הופכת לאתגר מחשבתי של ממש. האינטואיציה של רוב האנשים אומרת כי בממוצע יהיו לבנים שבכיתה יותר אחיות מאשר לבנות. שיקול זה מתבסס על ההנחה שהבנים (וכן הבנות) באים ממשפחות שבהם יש בממוצע מספר שווה של זכרים ונקבות, ומכיוון שהם אינם מונים את עצמם יהיה יתרון לאחיות. התשובה הנכונה היא **שאין הבדל**. סוג היילוד אינו תלוי אם קודם נולד בן או בת. אף שהעיקרון נהיר, יישומו בשאלה מסוג זה אינו פשוט כלל.

יצוגיות (Representativeness)

השערה נוספת שנוסחה על ידי טברסקי וקהנמן (Kahneman, , 1982 ; Tversky & Kahneman, 1974) הייתה כי אנשים נוטים להעריך הסתברות של מאורע על פי המידה שבה המאורע מייצג את האופן שבו הם תופסים את אוכלוסיית התוצאות הבסיסיות שלו (אוכלוסיית האם), או לחלופין את התהליך המייצר אותו. למשל, אנשים מאמינים כי בהגרלה מקרית של שישה מספרים מתוך חמישים, יש סיכוי טוב יותר לקבלת קבוצת המספרים המקרית: 8, 13, 30, 37, 42, 46 מאשר קבוצת המספרים: 10, 11, 12, 13, 14, 15 מכיוון שהקבוצה הראשונה מייצגת בצורה טובה יותר את המקריות של תוצאות ההגרלה. למעשה, לכל קבוצה בת שישה מספרים יש סיכוי שווה להתקבל בהגרלה אקראית. לדרך חשיבה, או יוריסטיקה זו הם קראו **יצוגיות**.

דוגמה נוספת:

אנשים מייחסים לרצף הטלות המטבע הספציפי הבא HHTHTT (H = עץ, T = פלי) סיכוי גדול יותר מאשר לרצף הספציפי HHHHTT, וסיכוי הרבה יותר גדול מאשר לרצף HHHHHH, על אף העובדה שלכל הרצפים הללו הסתברות שווה. הסיבה לאטרקטיביות הגדולה של יוריסטיקת היציגות היא, שאנשים מצפים שלמדגם קטן של מספרים שנבחר באקראיות מאוכלוסייה גדולה יהיו אפיונים דומים לאלו של האוכלוסייה. לכשל מחשבתי זה הם נתנו את הכינוי "**חוק המספרים הקטנים**". קל לראות את הקשר הרעיוני בין שלושת הכשלים: **היצוגיות, המהמרים ואי-התלות**, כולם נובעים מציפייה לראות את המדגם, ואפילו הוא קטן, כדומה לאוכלוסייה אקראית ולא מסודרת.

הנחת האחידות (Uniformity assumption)

מכשלה נוספת, עיקשת אף היא, מבוססת על הנטייה שלנו לסימטריה, לייחס הסתברות שווה למצבים שבהם הסיכויים אינם ידועים. נטייה זו מכונה **הנחת האחידות**. הרוב המוחלט של המצבים ההסתברותיים הנידונים בנתי-ספר מבוססים על הנחת האחידות. חישוב ההסתברות של מאורע פשוט מתוך Ω אפשרויות הוא $\frac{1}{\Omega}$ בהנחה שלכל Ω האפשרויות יש הסתברות אחידה. בהקדמה לשעורי הסתברות, מורים משתמשים בקובייה מאוזנת בעלת שש פאות, מטבע הוגן או סביבון מאוזן. בכל דוגמה מניחים שלכל האירועים האפשריים יש סיכויים שווים לקרות. תלמידים נחשפים לדילמות של הסתברות בבית-הספר, או דרך התנסויות במשחקי מזל שבהם האירועים הם שווי הסתברות. מספר מחקרים דיווחו על שימוש נכון בהנחת האחידות של תלמידים בבואם לפתור בעיות, אך גם על הכללת יתר של הנחה זו שלא כראוי (Williams, 1994). במחקרו הוא מתריע שאי-ההבנות הרבות שהוא מצא בהסתברות אצל פרחי הוראה, ובייחוד אלו שנבעו מהכללת יתר של הנחת האחידות, נבעו מהרצון של פרחי ההוראה לתרגל את תלמידיהם במהירות, ולהניח אחידות של הסתברויות כדי לפשט את תהליך הלמידה. הוא מציע דווקא מטלות בהן קשה, ואולי אף לא ניתן לקבוע באופן תיאורטי את ההסתברויות של כל האפשרויות הקיימות.

המשך בעמוד הבא <<<

למשל, להטיל נעצים ולחשב לפי התוצאות את ההסתברות לנחיתה בכל אחד מהמצבים הבאים:



שלוש אפשרויות מצב של נעץ

פלק (2004) מביאה מספר דוגמאות לטעויות הנובעות משימוש שגוי של הנחת האחידות.

למשל, בעיית הקלפים הצבועים וחידת שלוש הדלתות.

נביא להלן את הבעיה "כמה בנים?" שהופיעה בנוסחים שונים בעיתונות הפופולרית והמקצועית בעולם.

ידוע כי מזל היא אם לשני ילדים, אולם אינכם יודעים מהו מינם של ילדיה.

נסמן: $B = \text{בן}$, $G = \text{בת}$.

לארבעת הזוגות הסדורים הבאים של ילדים, הרשומים לפי סדר הלידה (משמאל לימין)

BB, GG, BG, GB הסתברויות שוות; ומכאן שההסתברות שלמזל שני בנים היא $P(BB) = \frac{1}{4}$.

יום אחד אתם פוגשים את מזל בעיר עם ילד שהיא מציגה בתור בנה.

מהי עתה לדעתכם, ההסתברות שלמזל שני בנים?

נניח כמקובל, הסתברויות שוות לבן ולבת בכל לידה ואי-תלות בין מיני היילודים בלידות השונות. התשובה

הפשטנית היא $\frac{1}{2}$. כדי שמזל תהיה אם לשני בנים צריכה להיות הולדת בן בלידה האחרת, וההסתברות

לכך היא $\frac{1}{2}$. מאידך, מאחר שפגשנו בן, הרי שהאפשרות GG ירדה מהחשבון. נותרו שלוש אפשרויות שוות

הסתברות (GB, BG, BB) ולכן נראה כי ההסתברות שיש למזל שני בנים היא $\frac{1}{3}$ (שזו התשובה הנכונה).

פלק (2004) נכנסת לדיון מפורט באשר לשאלה איך קרה שפגשנו את מזל עם בן, מהו המנגנון המקרי

שהניב את התצפית המתוארת. אם היא בוחרת באופן מקרי מי יתלווה אליה, הרי שהתשובה היא $\frac{1}{2}$.

אם היא תמיד מעדיפה ליווי של בן ולוקחת איתה בת בלית בררה, התשובה היא $\frac{1}{3}$.

מה שחשוב לעניינינו הוא, שבמקרה הפשוט, שבו אנו מניחים כי היא בוחרת באקראי מי יתלווה אליה, ארבעת

המאורעות שהיו אפריורי שווי הסתברות, אינם נשארים כאלה. בעוד שההסתברות האפריורית של BB או של

GB היו שוות, ההסתברות אפוסטריורית של שלוש האפשרויות (GB, BG, BB) אינן שוות. יש סיכוי כפול שהבן

שאנו רואים "שייד" לסוג משפחה BB ($\frac{1}{2}$) מאשר הסיכוי שהוא שייד למשפחה GB ($\frac{1}{4}$), או למשפחה BG

($\frac{1}{4}$). כלומר ההסתברות שלמזל יש שני בנים היא $\frac{1}{2}$ ולא $\frac{1}{3}$, דווקא בהתאם לתשובה הפשטנית והנכונה.

הדוגמה מדגימה כיצד אינפורמציה תמימה לכאורה אך מיותרת, עשויה להכשיל את הנשאלים.

לשם מה פורט בנוסח השאלה ארבעת סוגי המשפחות? לשם מה הודגש כי $P(BB) = \frac{1}{4}$?

פריטי מידע אלו עלולים להוביל את המתמודד לאפיקי חשיבה שגויים.

מסקנות החוקרים היא שחשוב **שהמורים יבינו** את המנגנונים הפסיכולוגיים של החשיבה ההסתברותית.

יש לשים דגש על הבנה אינטואיטיבית ולהביא סיטואציות רלוונטיות לתלמידים.

כמו כן, חשוב שהמורים יחשפו בפני התלמידים את העובדה שפתרונות אינטואיטיביים ניתנים בהשראתם של

מבנים קוגניטיביים אשר יכולים להיות מקור לטעויות מסוימות. צריך להציג לתלמידים בעיות בהן השימוש

בסכמות מתאים לפתרון ולאחר מכן להדגים מצבים שבהם יישום העקרונות הכללים אינו מוביל לפתרון

המתאים.

מקורות

פיאז'ה ז. (1964/1980). שש מסות על ההתפתחות הנפשית.
ספריית הפועלים, הוצאת הקיבוץ הארצי השומר הצעיר, מרחביה.

פלך ר. (2004). אתגרים לתאים האפורים - בעיות, חידות ולקחיהן, הוצאת ספרית פועלים – הוצאת הקיבוץ המאוחד.

Bar-Hillel, M. (1980). The Base-rate Fallacy in Probability Judgments.
Acta Psychologica, 44, 211-233.

Burton, I., R.W. Kates and G.F. White (1978). *The Environment as Hazard*. Oxford University Press.

Evans, J. St B. T., & Bradshaw, H. (1986). *Estimating sample-size requirements in research design: A study of intuitive statistical judgment*. *Current Psychological Research & Reviews*, 5, 10–19.

Falk R. & Kendig K. (2013). *A tale of two probabilities*. *Teaching Statistics*, 35, 1, pp 49–52.

Falk, R. & Konold, C. (1992), The psychology of learning probability, In F. S. Gordon and S. P. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century* (MAA Notes #26), pp. 151-164. Mathematical Association of America.

Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 96-105.

Kahneman, D.; Tversky, A. (1972). "Subjective probability: A judgment of representativeness". *Cognitive Psychology* 3 (3): 430–454.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (Eds.) . (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. New York: Cambridge University Press (1991)

Ruelle D. (1991). *Chance and Chaos*, Princeton University Press.

Williams, 1994

דגשים מתמטיים ופדגוגיים לפרקי ההסתברות

פרק 5 – מושגי יסוד בהסתברות

בפרק זה נעסוק במושגי יסוד בהסתברות.
השאלות בהסתברות הן בעלות אופי אורייני המצריך הבנת הנקרא.
השאלות השונות המופיעות בפרק יסייעו בפיתוח המיומנויות הקשורות בהבנת הנקרא.

סעיף 1א – ניסוי מקרי, מאורעות ופעולות בין מאורעות

בסעיף זה נגדיר מושגי יסוד בהסתברות, מלווים בדוגמאות מילוליות ובדיאגרמת ון להדגמת מצבים שונים.
דיאגרמת ון מהווה אמצעי המחשה ויזואלי המסייע להבנה.
נגדיר קבוצה, ניסוי מקרי, מרחב מדגם, מאורעות, דיאגרמת ון, מאורע ודאי, מאורע בלתי אפשרי, מאורע חיתוך, מאורע איחוד, מאורעות זרים, מאורעות משלימים.
אנו ממליצים ללמד כל מושג, להראות דוגמה, ולסרטט דיאגרמת ון מתאימה (כאשר זה אפשרי), כפי שזה מוצג בספר.
במידת הצורך ניתן להוסיף דוגמה / דוגמאות כגון מטבע, רולטה עם מספרים (לבחירת התלמידים).
מומלץ לשתף את התלמידים בבחירת הדוגמאות הנוספות.

התרגילים לעבודה עצמית בעמודים 163 – 164

סעיף 2א – חישוב הסתברויות

בסעיף זה נעסוק בהגדרה של הסתברות, ובחישוב הסתברות כשכיחות יחסית (מושג שנלמד בפרק הסטטיסטיקה) לפי לפלס.
חשוב שהתלמידים יבינו שהסתברות היא סיכוי תיאורטי שמאורע יתרחש. סיכוי זה ניתן לחישוב בצורה מדויקת.
בעמוד 165 יש הפנייה לפעילות מתוקשבת. בפעילות זו המחשב מציג באופן אקראי תוצאות הטלת מטבע 1,000 פעמים ומחשב את השכיחות והשכיחות היחסית של כל תוצאה במספר מסויים של הטלות ראשונות (10, 25, 100, 500, 1,000).
כאשר משנים את המספר בריבוע הכחול, המחשב עורך את הניסוי שוב, באופן אקראי.
ניתן לראות שככל שמספר ההטלות גדל, השכיחות היחסית של כל אחת מהתוצאות תתקרב ל- 0.5.
למרות שייתכנו מצבים בהם תתקבל שכיחות יחסית של 0.5 במספר הטלות קטן יותר.
בדוגמאות בעמודים 167 - 168 נדגיש את המושגים מרחב מדגם אחיד, הוצאה באופן אקראי וחישוב הסתברות של מאורע פשוט ובאחוזים.
בנוסף נציג חישוב הסתברות מאורע כיחס שטחים.

השאלות לעבודה עצמית בעמודים 170 – 172

סעיף 3א – חוקי ההסתברות

בסעיף זה נציג מערכת כללים שבאמצעותה נוכל לחשב הסתברויות של מאורעות. אנו ממליצים להבנות את הידע יחד עם התלמידים ולנסות להגיע איתם לכלל. לדוגמה:

$$(1) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

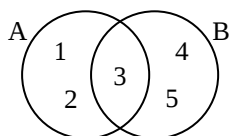
ניתן לשאול: האם ההסתברות של מאורע יכולה להיות כל מספר?

ניתן להסביר בעזרת ההסתברות כשכיחות יחסית.

(2) אפשר להתחיל בדוגמה של זריקת קובייה (או כל דוגמה אחרת)

$$P(U) = \frac{6}{6} = 1, \quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad P(U) = 1$$

(3) חוק האיחוד קשה יותר להבנה ולכן בספר הוא הוצג באמצעות דיאגרמת ון שהיא כלי מצוין להמחשה.



$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 4, 5\}$$

בדוגמה של זריקת הקובייה $P(A) + P(B)$ אז החיתוך ייספר פעמיים

ולכן מחסירים אותו.

כללים (4)–(6) מלווים בספר בדוגמאות ובדיאגרמות המתאימות.

הערה חשובה בעמוד 176 עם הדגמות להמחשת המונחים לכל היותר, לכל הפחות / לפחות, יותר מ (גדול מ) פחות מ (קטן מ) בהם ייעשה שימוש במהלך התרגול.

השאלות לעבודה עצמית בעמודים 177 – 180.

פתרון חלקי לתרגיל (3) עמוד 177:

(ב) (i) $A \cap B = \emptyset$ ולכן A ו-B מאורעות זרים.

(ii) $A \cap C = \{1\}$ ולכן A ו-C אינם מאורעות זרים.

(iii) $B \cap C = \{2\}$ ולכן B ו-C אינם מאורעות זרים.

(ד) (i) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = U$

ולכן המאורע $A \cup B \cup C$ הוא מאורע ודאי.

(ii) $A \cap B \cap C = \emptyset$

ולכן המאורע $A \cap B \cap C$ הוא מאורע בלתי אפשרי.

(ה) מאורעות משלימים הם כאלה שהחיתוך שלהם הוא הקבוצה הריקה והאיחוד שלהם הוא U.

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} \neq U$$

ולכן A ו-B אינם מאורעות משלימים.

(האיבר $\{5\}$ אינו שייך ל- $A \cup B$).

סעיף ב – תיאור מרחב המדגם בניסוי דו-שלבי או תלת-שלבי

בניסוי דו-שלבי נבחין בין טבלה המייצגת את מרחב המדגם המוצג בסעיף זה לבין טבלה דו-ממדית שתוצג בפרק 7 .

בטבלה המייצגת את מרחב המדגם נתאר את כל המאורעות הפשוטים שבמרחב המדגם האחד, שלכל אחד מהם הסתברות זהה להתקבל. חישוב ההסתברויות השונות ייעשה על ידי ספירת האפשרויות המתאימות מתוך גודל מרחב המדגם. בחטיבת הביניים טבלה זו נקראה טבלה דו-ממדית. והיא מתארת אירועים (ניסויים) שונים שבהם מרחב התוצאות זהה.

השאלות לעבודה עצמית בעמודים 185 – 187

ניתן לבנות טבלה דו-ממדית המתארת את מרחב המדגם.

ניתן גם להשתמש בטבלאות שהוצגו בדוגמאות: קובייה / לבנה וקובייה שחורה, שני מטבעות מאוזנים, קוביית משחק הוגנת וסביבון.

חשוב שהתלמידים יתנסו בבניית הטבלאות, אבל אין צורך לעשות זאת בכל שאלה מחדש.

פרק 6 – דיאגרמת עץ

דיאגרמת עץ מתארת את מרחב התוצאות האפשריות בכל אחד משלבי הניסוי. ניתן להשתמש גם בטבלה דו-ממדית, שתשמש (ברוב המקרים) כטבלת הסתברויות. קיים דיון לגבי סדר ההוראה מה ללמד קודם – דיאגרמת עץ או טבלה דו-ממדית.

בספר של משבצת החלטנו להתחיל מדיאגרמת עץ ממספר טעמים:

- מבחינה חזותית דיאגרמת עץ מובנת יותר.
- בדיאגרמת עץ רואים את שלבי הניסוי בצורה ברורה.
- לפי ניסיון מורים מהשטח, תלמידים מבינים טוב יותר עץ.
- נושא דיאגרמת עץ נלמד כבר בחט"ב.

בפרק 6 נלמד להשתמש בדיאגרמת עץ ובפרק 7 בטבלה דו-ממדית.

שלבי בניית העץ והמסלולים השונים מוסברים באמצעות דוגמאות מפורטות. בדוגמה בעמוד 188 ובדוגמאות (1) (2) בעמודים 191 – 193 וכן בפרק 8 בעמוד 252 (בנושא ההסתברות המותנית) נציג את "כלל הכפל" ו"כלל החיבור" לשימוש בחישוב הסתברויות באמצעות דיאגרמת עץ.

"כלל הכפל" – הקשר שלפיו כופלים את ההסתברויות לאורך המסלול.

בעמוד 189 יש הסבר אינטואיטיבי ל"כלל הכפל" באמצעות טבלה שהתלמידים מכירים.

בעמוד 252 יש הסבר מפורט לאחר שהתלמידים ילמדו מאורעות תלויים / בלתי-תלויים.

במאורעות **בלתי-תלויים** מתקיים $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

ולכן נכון לכפול הסתברויות $P(A)$, $P(B)$ אותן נמצא לאורך המסלול המבוקש.

במאורעות **תלויים** מתקיים $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

ולכן נכון לכפול הסתברויות $P(A)$, $P(B/A)$ אותן נמצא לאורך המסלול המבוקש.

"כלל החיבור" – כבר הוזכר בעמוד 175.

המסלולים השונים בדיאגרמת העץ מייצגים מאורעות זרים, ולכן כדי לחשב הסתברות של מאורע הכולל בתוכו יותר ממסלול אחד, יש לחבר את ההסתברויות הנמצאות בסופי המסלולים המתאימים.

(כאשר A ו-B מאורעות זרים $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$).

בפרק זה 9 דוגמאות פתורות.
 הדוגמאות מגוונות ומפורטות.
 אנו ממליצים לעבור בכיתה על כל הדוגמאות.
 לנושא דיאגרמת עץ (פרק 6) מומלץ בפריסת השעות להקדיש 4 שעות.
 בדוגמאות (1) – (4) בונים את העץ ועונים על שאלות תוך שימוש במושגים: לפחות, לכל היותר, מאורע משלים.
 בדוגמה (5) יש שימוש בנעלם שיש לחשבו.
 בדוגמאות (6) – (8) מתואר ניסוי הכולל הוצאת כדורים עם החזרה (דוגמה (7) וללא החזרה (דוגמה (8)).

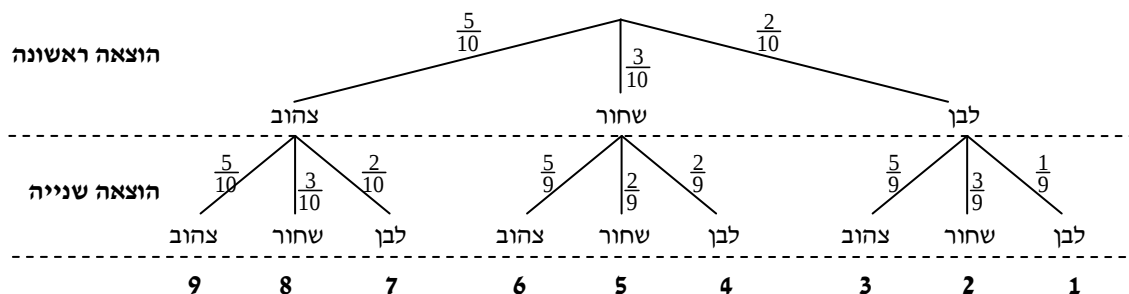
המלצה ל-4 שיעורים שמומלץ להקדיש לפרק 6 :

שיעור 1 – בניית עץ, "כלל הכפל", "כלל החיבור",
 דוגמה בעמוד 189, דוגמאות (1), (2) עמודים 191 – 193.
שיעור 2 – דוגמאות (3) – (5) עמודים 194 – 197 ותרגול.
שיעור 3 – דוגמאות (6) – (9) עמודים 198 – 200. שאלות המשלבות כדורים.
שיעור 4 – תרגול בלבד.

השאלות לעבודה עצמית בעמודים 200 – 209

הערות לתרגיל (37) עמוד 207 :

נסרטט דיאגרמת עץ מתאימה.



$$P(\text{שני הכדורים באותו צבע}) = P(\text{מסלול } 1) + P(\text{מסלול } 5) + P(\text{מסלול } 9) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{61}{180} \quad (\text{א})$$

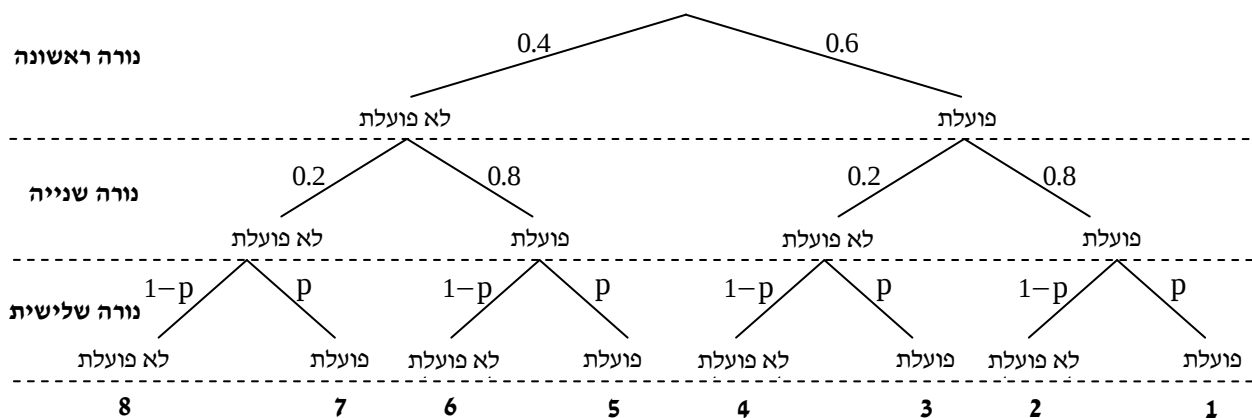
$$P(\text{לפחות כדור אחד לבן}) = P(\text{מסלול } 1) + P(\text{מסלול } 2) + P(\text{מסלול } 3) + P(\text{מסלול } 4) + P(\text{מסלול } 7) \quad (\text{ב})$$

כדאי לשים לב ששכום ההסתברויות של מסלולים 1, 2 ו-3 הוא $\frac{2}{10}$ ולכן:

$$P(\text{לפחות כדור אחד לבן}) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{11}{30}$$

בתרון/אתר 44) עמ' 208 :

נסרטט דיאגרמת עץ מתאימה.



$$P\left(\begin{array}{c} \text{בדיוק נורה אחת} \\ \text{פועלת} \\ \text{בהפסקת חשמל} \end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c} \text{מסלול} \\ 4 \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} \text{מסלול} \\ 6 \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} \text{מסלול} \\ 7 \end{array}\right) = \quad (\text{א})$$

$$= 0.6 \cdot 0.2 \cdot (1-p) + 0.4 \cdot 0.8 \cdot (1-p) + 0.4 \cdot 0.2 \cdot p =$$

$$= 0.12 - 0.12p + 0.32 - 0.32p + 0.08p = 0.44 - 0.36p$$

נתון שההסתברות שבדיוק נורה אחת תפעל במקרה של הפסקת חשמל היא 0.17, כלומר:

$$0.44 - 0.36p = 0.17 \Rightarrow p = 0.75$$

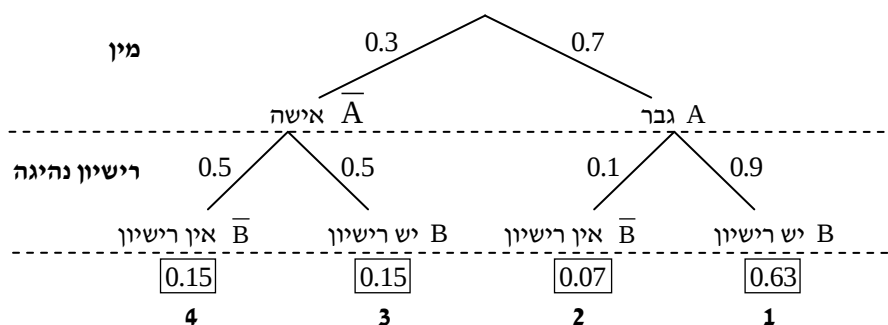
$$P\left(\begin{array}{c} \text{לפחות שתי נורות} \\ \text{פועלות} \\ \text{בהפסקת חשמל} \end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c} \text{מסלול} \\ 1 \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} \text{מסלול} \\ 2 \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} \text{מסלול} \\ 3 \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} \text{מסלול} \\ 5 \end{array}\right) = \quad (\text{ב})$$

$$= 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.75 + 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.25 + 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.75 + 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.75 = 0.81$$

פרק 7 – טבלה דו-ממדית

בפרק זה נשתמש בטבלה דו-ממדית שתשמש (ברוב המקרים) כטבלת הסתברויות. בתחילה נתונה רשימת תלמידים הכוללת מידע על התפלגות שלהם לפי מין (בת / בן), ציון במתמטיקה (גבוה / נמוך) וציון בספרות (גבוה / נמוך). בדוגמה התלמידים מתבקשים לבנות טבלה דו-ממדית מתאימה לפי משתנים מסויימים. מעבר זה מרשימה לטבלה לא נדרש בדרך כלל אך הוא תורם להבנת הטבלה. לאחר בניית הטבלה כדאי לשאול מה מייצגים המספרים בתוכה. בספר יש הסבר מפורט וסיכום האמצעות סימון הסתברויות (עמוד 213). בדוגמה (3) עמוד 213 יש שימוש בטבלה לחישוב הסתברויות ואף שאלה באיזו טבלה כדאי להיעזר. בדוגמאות הנוספות בעמודים 214 – 216 יש שימוש בבניית טבלה כדי לענות על שאלות בהסתברות. בדוגמה (4) יש משימה לפתור את הדוגמה בעזרת דיאגרמת עץ. מטרת המשימה להראות שלעיתים ניתן לפתור בשתי דרכים. דיאגרמת עץ וטבלה דו-ממדית מיועדים לעזור לפתור את השאלה. יש שאלות שברור (לאחר תרגול וניסיון) באיזה אופן קל יותר לפתור, ויש שאלות שבשתי הדרכים יהיה נוח. אנו ממליצים בהמשך, לאחר תרגול מספיק של הטבלאות, לתת לתלמידים אפשרות לפתור בדרך שיבחרו.

התרגיל המסומן:



לפי סימוני הדוגמה:

(א) האפשרות שנבחרה אישה בעלת רישיון נהיגה מתאימה למסלול 3 : $P(\bar{A} \cap B) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$

(ב) קבוצת בעלי הרישיון בדוגמה זו היא קבוצה B, ואיבריה משתייכים לקבוצת הנשים

או לקבוצת הגברים. כלומר המסלולים המייצגים קבוצה זו הם מסלול 1 ומסלול 3,

לפיכך: $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0.63 + 0.15 = 0.78$

(i) אחוז בעלי הרישיון בקבוצה זו הוא 78%.

(ii) ההסתברות לבחירת אדם (גבר או אישה) שיש לו/ה רישיון היא 0.78.

השאלות לעבודה עצמית בעמודים 217 – 221

בסעיף זה נלמד נושא טבלה דו-ממדית ולכן נבחרו שאלות שלדעתנו נוח לפתור באמצעות טבלה.

יחד עם זאת, יש לאפשר לתלמידים לפתור בדרך שנוחה להם (טבלה דו-ממדית / דיאגרמת עץ / נוסחאות).

במרבית התרגילים בפרק זה ביקשנו לבנות טבלה על מנת לבסס את הידע שנלמד בפרק זה.

בתרון לסעיף (א) תרגיל (1) עמוד 217 :

(א)

טבלת שכיחויות	אישה	גבר	סה"כ
מבוגר	7	6	13
צעיר	5	4	9
סה"כ	12	10	22

בתרון לסעיף (א) תרגיל (2) עמוד 217 :

(א)

טבלת שכיחויות	בקבוק גדול	בקבוק קטן	סה"כ
מים	20	12	32
מיץ	12	4	16
סה"כ	32	16	48

בתרון לסעיף (א) תרגיל (3) עמוד 217 :

(א)

טבלת שכיחויות	הקבצה א'	הקבצה ב'	סה"כ
בנים	10	6	16
בנות	16	8	24
סה"כ	26	14	40

קטרון/לטרק (5) עמ' 218 :

(א) נתון: $P(A \cap B) = 0.1$, $P(\bar{A} \cap B) = 0.2$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$
את שאר ההסתברויות נשלים בטבלה הבאה לפי סכום ההסתברויות בעמודה או בשורה המתאימה:

סה"כ	$\bar{B}$ אין סוס	B יש סוס	
0.4	0.3	0.1	A יש פרה
0.6	0.4	0.2	$\bar{A}$ אין פרה
1	0.7	0.3	סה"כ

$$P(A) = 0.1 + 0.3 = 0.4 \quad \text{לפי השורה הראשונה}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6 \quad \text{ואז}$$

$$P(B) = 0.1 + 0.2 = 0.3 \quad \text{לפי העמודה הימנית}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{ואז}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.7 - 0.3 = 0.4 \quad \text{לפי העמודה האמצעית}$$

(ב) $P(A) = 0.4$
כלומר ל- 40% מהמשפחות יש פרה.

(ג) $P(B) = 0.3$
כלומר ל- 30% מהמשפחות יש סוס.

(ד) מהטבלה נקבל $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.4$.

לחישוב $P(A \cup B)$ ניתן להשתמש באחת משתי הנוסחאות:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.4 = 0.6 \quad \text{או:}$$

כנ"ל לגבי ההסתברות $P(\bar{A} \cup \bar{B})$:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.6 + 0.7 - 0.4 = 0.9$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9 \quad \text{או:}$$

קטרון לסלי (ט) תרגיל (7) עמוד 219 :

(ט) המאורע "נבחר בן או תלמיד/ה שהוא בעד תלבושת אחידה"
זהה למאורע "לא נבחרה בת שהיא נגד תלבושת אחידה".

קטרון לסלי (ב) תרגיל (8) עמוד 219 :

$$P(A) = P\left(\begin{smallmatrix} \text{נבחר} \\ \text{אישה} \end{smallmatrix}\right) = 0.4 \quad \text{(ב) לפי סעיף (א) מתקיים}$$

$$P(B) = P\left(\begin{smallmatrix} \text{נבחר} \\ \text{אקדמאי} \end{smallmatrix}\right) = 0.25$$

$$P(A \cap B) = P\left(\begin{smallmatrix} \text{נבחר} \\ \text{אישה אקדמאית} \end{smallmatrix}\right) = 0.16$$

$$0.4 \cdot 0.25 \neq 0.16$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = \quad \text{כלומר מתקיים}$$

פרק 8 – הסתברות מותנית, תלות בין מאורעות

סעיף א – ההסתברות המותנית

בסעיף זה נגדיר תלות בין מאורעות.

נתחיל בדוגמה ובאמצעותה נבחין בין שני מקרים:

1. מה ההסתברות שנבחר תלמיד שגר בקריית ביאליק מבין תלמידי הכיתה?

2. ידוע שהתלמיד שנבחר הוא בן. מה ההסתברות שהוא מקריית ביאליק?

אנו משנים את מרחב המדגם.

בהמשך ההסבר נגיע גם לכלל של הסתברות מותנית (עמוד 223) ונוסחת ההסתברות השלמה עם שימוש

בהסתברות מותנית.

יש לשים לב למילים המרמזות על הסתברות מותנית "מבין", "ידוע כי נבחר".

בדוגמה (6) הפתורה עמוד 229 – מובאת דוגמה לשימוש בטבלה דו-ממדית 2×3 .

בדוגמה (7) עמוד 231 – חוזרים שוב לדוגמה מעמוד 191, הפעם ניתן להסביר את שלבי הפתרון ובניית העץ באמצעות הסתברות מותנית.

בדוגמה (8) עמוד 232 – יש פתרון הן באמצעות טבלה והן באמצעות דיאגרמת עץ הסתברויות.

בעמוד 234 יש הערה חשובה על הוצאה ללא החזרה באוכלוסייה גדולה.

בדוגמה (9) בעמוד 234 – נראה שמבחינה מספרית ניתן להתייחס להוצאה ללא החזרה באוכלוסייה גדולה, כאל הוצאה עם החזרה, שכן ההבדל המספרי מזערי.

כאשר בשאלה נתון – מדינה גדולה / עיר גדולה / אוניברסיטה גדולה ועוד, ניתן להתייחס לבחירה כלשהי כאל הוצאה עם החזרה.

התייחסות לתרגילים לעבודה עצמית שבעמודים 235 – 244

בתרגילים (1) – (5) חישובי הסתברויות פשוטים מאוד, וניתן לפתור אותם ללא טבלה או עץ.

בחלק מהסעיפים התלמידים מתבקשים לנסח בצורה מילולית את ההסתברויות המבוקשות.

עוברים מייצוג סימבולי לניסוח מילולי.

את תרגילים (6) – (8) אנו ממליצים לפתור באמצעות טבלה דו-ממדית,

את תרגילים (9) – (11) בעזרת דיאגרמת עץ

ואת תרגילים (12) – (31) ניתן לפתור בדרך שנוחה לתלמיד.

בתרון לסעיף (ג) תרגיל (17) עמ' 239 :

(ג) ניעזר בטבלת ההסתברויות :

סה"כ	פרח צהוב	פרח לבן	טבלת הסתברויות
0.7	0.4	0.3	עמיד
0.3	0.2	0.1	לא עמיד
1	0.6	0.4	סה"כ

$$p_1 = P\left(\frac{\text{פרח עמיד}}{\text{פרח לבן}}\right) = \frac{P(\text{פרח עמיד} \cap \text{פרח לבן})}{P(\text{פרח לבן})} = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4}$$

$$p_2 = P\left(\frac{\text{פרח עמיד}}{\text{פרח צהוב}}\right) = \frac{P(\text{פרח עמיד} \cap \text{פרח צהוב})}{P(\text{פרח צהוב})} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3}$$

כלומר $p_1 > p_2$

סעיף ב – תלות בין מאורעות

נמחיש אי-תלות / תלות בין מאורעות באמצעות דוגמה של הוצאת כדורים עם החזרה / ללא החזרה (בהתאמה), ונגיע לנוסחה שמתקיימת עבור מאורעות בלתי-תלויים.

בעמוד 247 יש 3 הגדרות שקולות למאורעות בלתי-תלויים, ובהמשך יש הוכחה לשקילות ההגדרות. בדרך כלל אנו משתמשים בכלל (2).

בכיתות חלשות ניתן לוותר על הוכחת השקילות.

בעמוד זה גם נמצאת הערה חשובה שהתנאי $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ הוא תנאי אם ורק אם. בפרק זה, לאחר הגדרת הסתברות מותנית, ניתן להסביר את כלל הכפל הן עבור מאורעות תלויים והן עבור מאורעות בלתי-תלויים. ההסבר מובא בעמוד 252, ומלווה בדוגמה פתורה ומפורטת (בעמוד 253).

התרגילים לעבודה עצמית בעמודים 254 – 259.

פתרון לתרגיל (16) עמ' 257:

לפי הנתון: $P(\bar{A}) = 0.35$, $P(B) = 0.2$

A ו-B הם מאורעות בלתי-תלויים.

מהנתונים נקבל: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.35 = 0.65$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.2 = 0.8$

מהנתון על אי-תלות נסיק כי מתקיים: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.65 \cdot 0.2 = 0.13$

נרכז את הידוע לנו בטבלת הסתברויות ונשלם את שאר ההסתברויות על ידי סכום הסתברויות בעמודה או בשורה המתאימה:

טבלת הסתברויות	A מבוגר	$\bar{A}$ צעיר	סה"כ
B השכלה תיכונית	0.13	0.07	0.2
$\bar{B}$ השכלה אקדמאית	0.52	0.28	0.8
סה"כ	0.65	0.35	1

$$P(\text{השכלה תיכונית}) = P(B) = 0.2 \quad (\text{א})$$

כלומר השכיחות היחסית של בעלי השכלה תיכונית בקבוצה זו היא 0.2 (או 20%).

$$P(\text{צעיר עם השכלה אקדמאית}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.28 \quad (\text{ב})$$

(ג) 84 הצעירים בעלי ההשכלה האקדמאית מהווים, לפי סעיף (ב), 0.28 ממספר האנשים שענו לסקר.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{N(\bar{A} \cap \bar{B})}{N(U)} = \frac{84}{N(U)} = 0.28 \quad \text{נקבל:}$$

$$N(U) = \frac{84}{0.28} = 300 \quad \text{כלומר מספר האנשים שענו לסקר הוא:}$$

קטרון / תרגיל (19) עמ' 258 :

שאלה זו חשובה להבנת המשמעות שהמאורע "העובד/ת שנבחר/ה עבר/ה הכשרה מקצועית"

והמאורע "העובד/ת שנבחרה היא אישה" הם מאורעות בלתי-תלויים.

אם מבינים את המשמעות אז ניתן לענות על כל הסעיפים ללא צורך בבניית טבלת הסתברויות.

$$P(\text{אין הכשרה} / \text{מקצועית}) = 1 - 0.6 = 0.4 \quad (\text{א})$$

$$P(\text{גבר}) = P(\text{הכשרה} / \text{מקצועית} / \text{גבר}) = 1 - 0.45 = 0.55 \quad (\text{ב})$$

נובע מאי-תלות

$$P(\text{גבר שלא עבר} / \text{הכשרה מקצועית}) = P(\text{גבר}) \cdot P(\text{אין הכשרה מקצועית}) = 0.55 \cdot 0.4 = 0.22 \quad (\text{ג})$$

נובע מאי-תלות

$$P(\text{גבר שעבר} / \text{הכשרה מקצועית}) = P(\text{גבר}) \cdot P(\text{עבר הכשרה מקצועית}) = 0.55 \cdot 0.6 = 0.33 \quad (\text{ד})$$

נובע מאי-תלות

$$P(\text{אין הכשרה} / \text{אישה} / \text{מקצועית}) = P(\text{אישה}) = 0.45 \quad (\text{ה})$$

נובע מאי-תלות

$$P(\text{יש הכשרה} / \text{אישה} / \text{מקצועית}) = P(\text{יש הכשרה} / \text{מקצועית}) = 0.6 \quad (\text{ו})$$

נובע מאי-תלות

פרק 9 – הסתברות מותנית: נוסחת בייס, שאלות נוספות

נוסחת בייס יכולה לסייע בפתרון שאלות העוסקות בהסתברות מותנית.

ניתן לפתור שאלות מסוג זה בפתרון דו-שלבי בהסתמך על הידע שנצבר עד כה בהסתברות מותנית.

דוגמה פתורה עמוד 260 – להלן פתרון ללא שימוש בנוסחת בייס.

לפי סימוני הפתרון: מהנתונים מתקבל: $P(A / B) = 0.9 \cdot P(B) = 0.05$, $P(A) = 0.08$

(א) צריך למצוא $P(B / A)$.

$$* P(B / A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{0.08}$$

כדי לחשב את $P(B \cap A)$ נשתמש בנתון $P(A / B) = 0.9$:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0.9 = \frac{P(A \cap B)}{0.05} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.9 \cdot 0.05 = 0.045$$

$$* P(B / A) = \frac{0.045}{0.08} = 0.5625$$

נציב במשוואה המסומנת ב-* ונקבל:

השאלות לעבודה עצמית בעמוד 262

פרק 10 – סיכום ושאלות חזרה בהסתברות

בעמודים 263 – 266 יש סיכום נוסחאות ואמצעי המחשה שעומדים לרשות התלמידים בפתרון שאלות בהסתברות.

טבלה דו-ממדית, דיאגרמת עץ, חוקי הסתברות, כל אלה מלווים בהסברים קצרים.

השאלות לעבודה עצמית בעמודים 266 – 282.

התרון (11) אלף 268 :

נסמן ב- x את השכיחות היחסית של הפרחים הריחניים ולכן $4x$ יסמן את השכיחות היחסית של הפרחים שאינם ריחניים.

נקבל את המשוואה $4x + x = 1 \Rightarrow 5x = 1$

ומכאן $x = 0.2$

נסמן ב- y את השכיחות היחסית של הפרחים הוורודים הריחניים

ולכן $3y$ יסמן את השכיחות היחסית של הפרחים הוורודים שאינם ריחניים.

ניעזר בטבלת ההסתברויות הבאה :

טבלת הסתברויות	פרח ריחני	פרח שאינו ריחני	סה"כ
פרח ורוד	y	$3y$	
פרח אדום			
סה"כ	0.2	0.8	1

נשלים את ההסתברויות החסרות בטבלה לפי סכום ההסתברויות בשורה או בעמודה המתאימה, ונקבל :

טבלת הסתברויות	פרח ריחני	פרח שאינו ריחני	סה"כ
פרח ורוד	y	$3y$	$4y$
פרח אדום	$0.2 - y$	$0.8 - 0.3y$	$1 - 4y$
סה"כ	0.2	0.8	1

נתון שמספר הפרחים האדומים שאינם ריחניים גדול פי 5 ממספר הפרחים האדומים הריחניים.

נקבל את המשוואה : $0.8 - 3y = 5(0.2 - y) \Rightarrow 0.8 - 3y = 1 - 5y \Rightarrow 2y = 0.2 \Rightarrow y = 0.1$

כעת טבלת ההסתברויות מלאה :

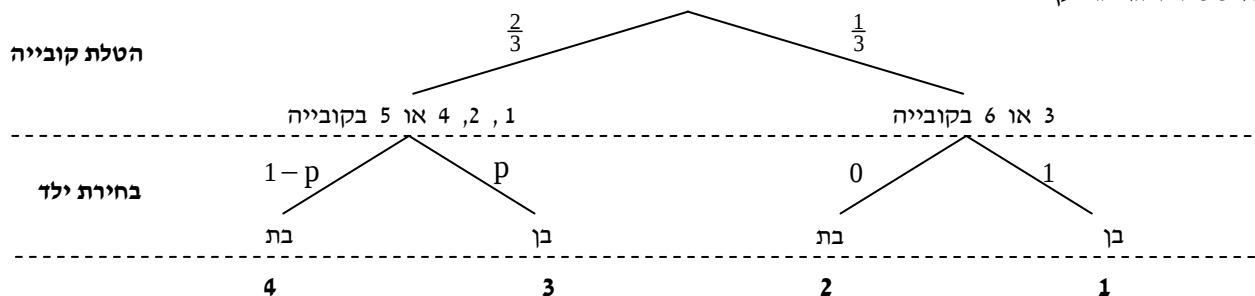
טבלת הסתברויות	פרח ריחני	פרח שאינו ריחני	סה"כ
פרח ורוד	0.1	0.3	0.4
פרח אדום	0.1	0.5	0.6
סה"כ	0.2	0.8	1

(א) $P(\text{אדום}) = 0.6$

(ב) $P(\text{אדום} \cap \text{ריחני}) = \frac{P(\text{אדום} \cap \text{ריחני})}{P(\text{ריחני})} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$

פתרון (28) עמ' 271 :

נסרטט דיאגרמת עץ.



$$P(\text{בן}) = 0.8 \quad \text{נתון}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot p = 0.8 \quad \text{כלומר:}$$

$$\frac{2}{3}p = \frac{7}{15}$$

$$p = 0.7$$

כלומר ההסתברות לבחור באקראי בן מקבוצה ב' היא 0.7

ואז ההסתברות לבחור באקראי בת מקבוצה ב' היא 0.3.

לכן היחס בין מספר הבנות למספר הבנים בקבוצה ב' הוא 3:7.

פתרון (52) עמ' 276 :

יש 9 בנים שגבוהים מהממוצע. לכן השכיחות היחסית של הבנים הגבוהים מהממוצע היא $\frac{9}{40} = 0.225$

או 22.5%.

ניעזר בטבלת ההסתברויות.

סה"כ	בת	בן	טבלת הסתברויות
			נמוך מהממוצע
		0.225	גבוה מהממוצע
1	0.6	0.4	סה"כ

נתון שבקבוצת הגבוהים מהממוצע, הבנות מהוות 55%, כלומר בקבוצה זו הבנים מהווים 45%.

נסמן ב- x את השכיחות היחסית של התלמידים הגבוהים מהממוצע,

$$0.45x = 0.225 \Rightarrow x = 0.5$$

ונקבל את המשוואה: $x = 0.5$

כעת נוכל להשלים את ההסתברויות החסרות בטבלה לפי סכום ההסתברויות בשורה או בעמודה המתאימה.

נקבל:

סה"כ	בת	בן	טבלת הסתברויות
0.5	0.325	0.175	נמוך מהממוצע
0.5	0.275	0.225	גבוה מהממוצע
1	0.6	0.4	סה"כ

אם בוחרים באקראי תלמיד מהכיתה, אז לפי הטבלה נקבל: $P(\text{בת נמוכה מהממוצע}) = 0.325$

בכיתה לומדים 40 תלמידים, לכן מספר הבנות שנמוכות מהממוצע בכיתה זו הוא: $0.325 \cdot 40 = 13$.

בתרון חלקי אלף (59) עמוד 277 :

מהנתונים מקבלים את הטבלה הבאה :

טבלת הסתברויות	זוהה כנושא מתכת	זוהה כלא נושא מתכת	סה"כ
נושא מתכת	0.245	0.0375	0.2825
לא נושא מתכת	0.005	0.7125	0.7175
סה"כ	0.25	0.75	1

$$P\left(\frac{\text{זוהה כנושא מתכת}}{\text{נושא מתכת}}\right) = \frac{P\left(\begin{smallmatrix} \text{זוהה} \\ \text{נושא מתכת} \end{smallmatrix} \cap \begin{smallmatrix} \text{נושא מתכת} \end{smallmatrix}\right)}{P(\text{נושא מתכת})} = \frac{0.245}{0.2825} < 0.9 \quad (\text{א})$$

ולכן הטענה אינה נכונה.

$$P\left(\frac{\text{זוהה לא נושא מתכת}}{\text{נושא מתכת}}\right) = \frac{P\left(\begin{smallmatrix} \text{זוהה} \\ \text{נושא מתכת} \end{smallmatrix} \cap \begin{smallmatrix} \text{לא נושא מתכת} \end{smallmatrix}\right)}{P(\text{לא נושא מתכת})} = \frac{0.005}{0.7175} < 0.01 \quad (\text{ב})$$

ולכן הטענה נכונה.

$$P\left(\frac{\text{זוהה כלא נושא מתכת}}{\text{נושא מתכת}}\right) = \frac{P\left(\begin{smallmatrix} \text{זוהה כלא} \\ \text{נושא מתכת} \end{smallmatrix} \cap \begin{smallmatrix} \text{נושא מתכת} \end{smallmatrix}\right)}{P(\text{נושא מתכת})} = \frac{0.035}{0.2825} > 0.12 \quad (\text{ג})$$

ולכן הטענה אינה נכונה.

פרק 11 – שילוב סטטיסטיקה והסתברות

לאחר ששני הנושאים נלמדו, ניתן לשלב ביניהם בשאלות.

שאלות החזרה בעמודים 285 – 297 .

בתרון חלקי *akel* (19) עמוד 292 :

$$P\left(\begin{matrix} \text{משתתף ב-2} \\ \text{או 3 חוגים} \end{matrix}\right) = 0.24 + 0.12 = 0.36 \quad (i) \quad (א)$$

$$P\left(\begin{matrix} \text{משתתף בחוג אחד} \\ \text{לכל היותר} \end{matrix}\right) = 1 - P\left(\begin{matrix} \text{משתתף ב-2} \\ \text{או 3 חוגים} \end{matrix}\right) = 1 - 0.36 = 0.64 \quad (ii)$$

(ב) יש $32 + 96 = 128$ תלמידים שמשתתפים בחוג אחד לכל היותר.

(ג) (i) 128 התלמידים שמשתתפים בחוג אחד לכל היותר מהווים 0.64 ממספר התלמידים

שיש בשכבת כיתות יוד.

$$\text{לכן יש } 200 = \frac{128}{0.64} \text{ תלמידים בשכבת כיתות יוד.}$$

$$x = 200 \cdot 0.24 = 48 \quad (ii)$$

כלומר בשכבה זו יש 48 תלמידים שמשתתפים ב-2 חוגים.

$$y = 200 \cdot 0.12 = 24$$

כלומר בשכבה זו יש 24 תלמידים שמשתתפים ב-3 חוגים.