

## متواليات

## الفصل 15: مقدمة للمتواليات

المتوالية هي مجموعة حدود مرتبة، حيث يكون لمكان كل حدٍ بالنسبة للحدود الأخرى أهمية. نقرأ المتوالية من اليسار إلى اليمين. سنتناول متوالياتٍ عدديةً مختلفة، تتميز بوجود قانونية تربط بين حدودها. حتى عند ظهور بارامترات في المتواليات، سنظل نعاملها كمتوالياتٍ عددية.

## مهمة: قانونية في المتوالية

معطاة متوالية الأعداد 1, 4, 9, 16, 25, 36

الحد في المكان الأول هو 1، الحد في المكان الثاني هو 4، الحد في المكان الثالث هو 9، وهكذا دواليك.

(أ) خمنوا ما هي القانونية في المتوالية المعطاة (انتبهوا: هناك أكثر من إجابة ممكنة).

(ب) يريد ربيع الاستمرار في كتابة حدود المتوالية. أكتبوا ماذا ستكون قيمة الحدين التاليين اللذين سيكتبهما ربيع

(الحد في المكان السابع والحد في المكان الثامن)، وفقاً للقانونية التي كتبتموها في البند (أ).

(ج) أكتبوا متوالية لها نفس قانونية المتوالية المعطاة، بحيث يكون حدّها الأول مختلفاً، بحسب اختياركم.

(د) أكتبوا متوالية عددية لها قانونية كما تشاؤون، ودعوا صديقكم يكتشف ما هي القانونية التي وضعتموها.

## تمثيلات مختلفة للمتواليات

## 1) تمثيل كلامي للمتوالية

فتح حسين برنامج توفير في المصرف.

في الأسبوع الأول أودع حسين 1,000 شافل، وفي كل أسبوع، أضاف حسين إلى البرنامج 100 شافلٍ أخرى.

في الأسبوع الثاني، كان رصيد حسين في البرنامج 1,100 شافل،

في الأسبوع الثالث، كان رصيد حسين في البرنامج 1,200 شافل،

في الأسبوع الرابع، كان رصيد حسين في البرنامج 1,300 شافل وهكذا دواليك...

يمكن كتابة مبلغ المال (بالشافل) الذي يملكه حسين في البرنامج بحسب عدد الأسابيع على النحو التالي:

1,000, 1,100, 1,200, 1,300, ...

(أ) ما هو المبلغ الذي سيكون في رصيد حسين في الأسبوع السادس؟

(ب) في أي أسبوع، سيصل رصيد حسين في البرنامج إلى 2,000 شافل؟

## الحل:

(أ) لتكتمل متوالية الأعداد وفقاً لقانونيتها حتى نصل إلى مبلغ المال في الأسبوع السادس.

القانونية: ينتج كل عددٍ من إضافة العدد 100 إلى العدد السابق له في المتوالية.

لذا نحصل على:

1,000, 1,100, 1,200, 1,300, 1,400, 1,500  
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓  
الأسبوع الأسبوع الأسبوع الأسبوع الأسبوع الأسبوع  
الأول الثاني الثالث الرابع الخامس السادس

جواب: سيكون بحوزة حسين في الأسبوع السادس 1,500 شافل.

(ب) نستمر في كتابة متوالية الأعداد حسب القانونية، حتى نصل إلى مبلغ 2,000 شافل، ونحصل على:

1,000, 1,100, 1,200, 1,300, 1,400, 1,500, 1,600, 1,700, 1,800, 1,900, 2,000  
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓  
الأسبوع الأسبوع الأسبوع الأسبوع الأسبوع الأسبوع الأسبوع الأسبوع الأسبوع الأسبوع  
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

جواب: سيصل رصيد حسين في البرنامج إلى 2,000 شافل في الأسبوع الـ 11.

**(2) تمثيل عددي للمتوالية بواسطة جدول قيم**

يمكننا أيضًا كتابة مبلغ المال (بالشّاقِل)، الموجود في برنامج توفير حسين (في المثال السابق)، بواسطة جدول قيم.

أكملوا في دفاتركم القيم الناقصة في الجدول، وأجيبوا:

في أيّ أسبوعٍ سيصل مبلغ المال في برنامج توفير حسين إلى 1,900 شاقِل؟

المبلغ في برنامج التوفير (بالشّاقِل)	الأسبوع
1,000	الأول
1,100	الثاني
	الثالث
	الرابع
	الخامس
1,500	السادس
	السابع
	الثامن
	التاسع
	العاشر
	الحادي عشر

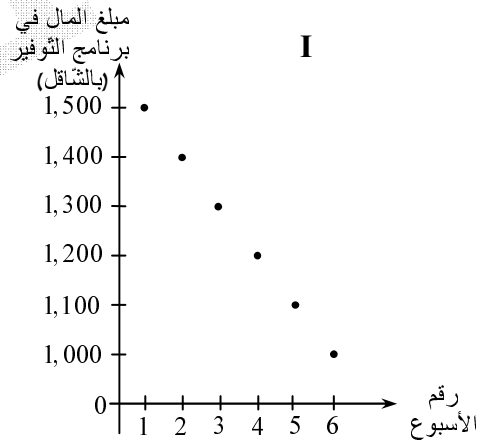
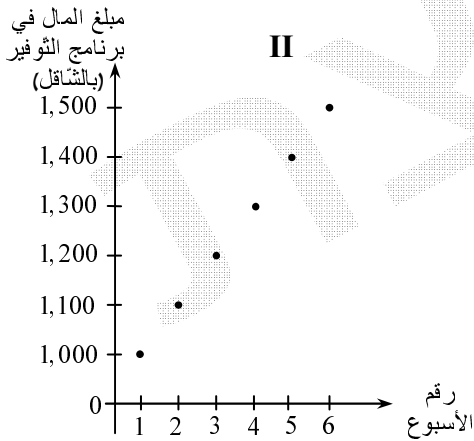
**(3) تمثيل بياني للمتوالية**

يمكننا أن نصف حدود المتوالية كنقاطٍ على رسم بيانيٍ نقطيٍ غير متصلٍ في هيئةٍ محاور.

استعينوا بمعطيات برنامج توفير حسين في الصفحة السابقة، أو بجدول القيم الذي أكملتموه في أعلى الصفحة،

وأجيبوا عن السؤال:

في أيّ الرّسمين البيانيّين أمامكم (I أو II)، تم وصف متوالية مبالغ المال التي بحوزة حسين في برنامج توفيره في كلّ أسبوعٍ؟ علّوا إجابتكم.



#### (4) تسجيل حدود المتوالية في سطر

عند تسجيل حدود المتوالية في سطر، يُسمى الحدّ الأول الموجود في يسار المتوالية الحدّ الأول في المتوالية، ويسمى الحدّ الذي يتلوه (على يمينه) الحدّ الثاني في المتوالية، والذي يتلوه الحدّ الثالث في المتوالية، وهكذا دواليك.

نعرض فيما يلي عدة أمثلة لمتواليات، ونصف القانونيّة التي تتحقّق في المتوالية:

$$(1) \quad \dots, 21, 17, 13, 9, 5 \quad \text{كل حد أكبر بـ } 4 \text{ من الحد السابق له.}$$

$$(2) \quad \dots, -5, 4, -3, 2, -1 \quad \text{الأعداد الطبيعيّة بحسب الترتيب مع تغيير إشارات الأعداد الواقعة في الأماكن الفرديّة.}$$

$$(3) \quad \dots, 1111, 111, 11, 1 \quad \text{الرقم } 1 \text{ يظهر في كل حدّ عدد مرّات يساوي العدد الذي يدلّ على مكان الحدّ في المتوالية.}$$

$$(4) \quad \dots, 25, 16, 9, 4, 1 \quad \text{كل حدّ هو مربع العدد الذي يدلّ على مكان الحدّ في المتوالية.}$$

النقاط الثلاث التي تظهر في كل مثال، تعني "وما إلى ذلك"، وهي تُشير إلى أنّه هناك حدود إضافية في المتوالية وفقاً للقانونيّة التي حُدّدت سابقاً.

لا يظهر في الأمثلة (1) – (3) الحدّ الأخير في المتوالية، لذا فإنّ النقاط الثلاث تُمثّل عدداً غير محدودٍ (لانهايي) من الحدود الإضافيّة، أي أنّ المتوالية تحتوي على عددٍ لانهايي من الحدود.

في المثال (4)، يظهر الحدّ الأخير في المتوالية (لا يوجد بعده ثلاث نقاط)، لذا فإنّ النقاط الثلاث في هذه المتوالية، تُمثّل عدداً نهائياً من الحدود.

#### نُجمل:

في الأمثلة (1) – (3) معطاة متواليات لانهاية من الأعداد، وفي المثال (4) معطاة متوالية نهائية من الأعداد.

إشارات: نشير إلى الحدّ الأول في المتوالية بـ  $a_1$ ، نشير إلى الحدّ الثاني في المتوالية بـ  $a_2$ ، وإلى الحدّ الثالث بـ  $a_3$  وإلخ... في المثال (1):  $a_3 = 13$ ، في المثال (2):  $a_3 = -3$ ، وفي المثال (4):  $a_3 = 9$ .

الحدّ  $a_n$  يشير إلى حدّ أيّا كان في المتوالية، يقع في المكان  $n$  (الّوني).

$n$  (مكان الحدّ في المتوالية) يُسمى أيضاً، فهرس.

مكان الحدّ في المتوالية يجب أن يكون عدداً طبيعيّاً:  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ .

عادةً ما نقول أيضاً،  $a_n$  هو الحدّ العامّ للمتوالية.

في بعض الأحيان سنستعمل الحرف  $k$  أو الحرف  $i$  للإشارة إلى الحدّ  $a_k$  (الحدّ في المكان  $k$ )

أو إلى الحدّ  $a_i$  (الحدّ في المكان  $i$ ).

وفي أحيانٍ أخرى، سنشير إلى الحدّ العامّ وإلى حدود المتوالية بحروفٍ مختلفة عن الحرف  $a$ ، مثل  $b_n$  أو  $c_n$ .

**ملاحظة:** هناك متواليات عدديّة، لا توجد فيها قانونيّة. لن نتعامل مع هذه المتواليات، لأنّها غير مطلوبة في المنهج التعليمي.

#### حدود متتالية (متعاقبة) في المتوالية

الحدّان المتجاوران في المتوالية:  $a_n, a_{n+1}$  يُسمّيان، حدّين متتاليين (متعاقبين) في المتوالية.

**مثال:**  $a_{13}$  و  $a_{14}$  هما حدّان متتاليان في المتوالية.

على نفس النّحو:  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$  هي ثلاثة حدودٍ متتالية في المتوالية.

**مثال:**  $a_{55}, a_{56}, a_{57}$  هي ثلاثة حدودٍ متتالية في المتوالية.

**الحدّ التالي** لحدّ معيّن، هو الحدّ الذي يقع بعده. **مثال:**  $a_9$  هو الحدّ التالي للحدّ  $a_8$ .

**إنتبهوا!**  $a_8$  هو ليس الحدّ التالي للحدّ  $a_9$ .

**توضیح مُحوسَب: البحث في متوالية من خلال الرَّسْم البياني**



أدخلوا إلى الموقع [www.mishbetzet.co.il](http://www.mishbetzet.co.il) ← 4 وحدات ← الصَّف الثاني عشر ← فعاليَّات محوسبة تابعة لهذا الكتاب ← أنزلوا مَلَف "إكسل: "البحث في متوالية من خلال الرَّسْم البياني"، وافتحوه.  
 معطى في الرَّسوم البيانيَّة أمامكم، الحدود الـ 7 الأولى لـ 3 متواليات.  
 (أ) خَمَّنوا قانونيَّة كلِّ واحدة من هذه المتواليات.  
 (ب) في أيِّ من المتواليات يتحقَّق: كلِّما كَبُرَت قيمة مكان الحدِّ في المتوالية، كلِّما كَبُرَت قيمة الحدِّ أيضًا؟  
 أجيبوا عن البنود (ج) – (هـ) بالنسبة للمتوالية ب فقط:  
 (ج) ما هو مكان الحدِّ الذي قيمته 8 في المتوالية ب؟ في أيِّ مكانٍ يقع الحدِّ الذي يتلوه، وما هي قيمته؟  
 (د) أكتبوا حدَّين متتاليَّين في المتوالية ب، قيمة أحدهما 35. ما هو عدد الإمكانات الموجودة؟  
 (هـ) جدوا حدَّين متتاليَّين في المتوالية، مجموعهما 39. ما هو مكان هَذَيْنِ الحدَّين؟  
 (و) غَيِّروا في المتوالية أ قيم عدَّة حدود، بحيث تتحقَّق قانونيَّة معيَّنة بحسب اختياركم.

**(5) تمثيل رمزيٍّ لمتوالية بواسطة صيغة قانون (قانون حسب المكان)**

في تمثيل متوالية حسب المكان، نعبّر عن حدود المتوالية بواسطة تعبير جبريٍّ (قانون).  
 يسمّى هذا القانون، قانون الحدِّ العامّ  $a_n$ .

قانون الحدِّ العامّ هو قالب جبريٍّ لمتغيّر مُنفصل،  $a_n = f(n)$ ، مجال تعريفه هو الأعداد الطبيعيَّة  $N$ ، لأنَّ مكان الحدود في المتوالية هو عددٌ طبيعيٌّ (الأول، الثاني، الثالث، الرابع...).

**مثال:** في متوالية الحدِّ العامّ فيها هو  $a_n = 900 + 100n$ :

قيمة الدالة بالنسبة لـ  $n = 1$  هي قيمة الحدِّ الأوَّل في المتوالية  $(a_1)$ :  
 $a_1 = 900 + 100 \cdot 1 = 1,000$   
 قيمة الدالة بالنسبة لـ  $n = 2$  هي قيمة الحدِّ الثاني في المتوالية  $(a_2)$ :  
 $a_2 = 900 + 100 \cdot 2 = 1,100$   
 قيمة الدالة بالنسبة لـ  $n = 3$  هي قيمة الحدِّ الثالث في المتوالية  $(a_3)$ :  
 $a_3 = 900 + 100 \cdot 3 = 1,200$   
 وهكذا دواليك.

**مثال محلول**

بالنسبة للمتوالية التي قانون حدِّها العامّ هو  $a_n = 900 + 100n$ .

- (أ) ما هي قيمة الحدِّ الثامن في المتوالية؟  
 (ب) ما هو مكان الحدِّ الذي قيمته 1,900 في هذه المتوالية؟  
 (ج) هل الحدِّ الذي قيمته 1,950 هو حدٌّ في هذه المتوالية؟  
 (د) (i) عبّروا بدلالة  $n$  عن الحدِّ الذي يقع في المكان الـ  $n + 1$ .  
 (ii) جدوا حدَّين متتاليَّين في المتوالية، مجموعهما 4,300.

**الحل:**

(أ) نعوض  $n = 8$  في قانون الحدِّ العامّ  $a_n = 900 + 100n$ ، ونحصل على:  
 $a_8 = 900 + 100 \cdot 8 = 1,700$  **جواب:**  $a_8 = 1,700$ .  
 (ب) يجب إيجاد قيمة  $n$ ، التي بالنسبة لها يتحقَّق  $a_n = 1,900$ .  
 نعوض  $a_n = 1,900$  ونحصل على:  
 $1,900 = 900 + 100 \cdot n \Rightarrow 100n = 1,000 \Rightarrow n = 10$   
**جواب:** الحدِّ الذي قيمته 1,900، يقع في المكان العاشر ( $a_{10} = 1,900$ ).

يتبع في الصَّفحة التالية <<<

(ج) نعوض  $a_n = 1,950$  ونفحص قيمة  $n$  في هذه الحالة.

$$1,950 = 900 + 100n \Rightarrow 100n = 1,050 \Rightarrow n = 10.5$$

نحصل على: بما أن مكان الحد  $n$  هو عددٌ طبيعيٌّ، والعدد  $10.5$  ليس عددًا طبيعيًا (وأيضًا ليس صحيحًا)،

نستنتج أن العدد  $1,950$  ليس حدًا في المتوالية.

(د) (i) يجب أن نعبر بدلالة  $n$  عن  $a_{n+1}$  (الحد الذي يلي الحد  $a_n$ ).

نستعين بقانون الحد العام المعطى:

$$a_n = 900 + 100n$$

يمثل  $n$  في هذا القانون مكان الحد، نعوض بدلًا منه  $(n+1)$  ونحصل على:

$$a_{n+1} = 900 + 100(n+1)$$

$$a_{n+1} = 900 + 100n + 100 = 1,000 + 100n$$

$$a_{n+1} = 1,000 + 100n \quad \text{كجواب:}$$

انتبهوا إلى أهمية الأقواس، عندما عوضنا بدلًا من  $n$  التعبير  $(n+1)$ .

وكذلك، انتبهوا إلى عملية فتح الأقواس الصحيحة للتعبير  $900 + 100(n+1)$ ،

فحسب ترتيب العمليات الحسابية تسبق عملية الضرب عملية الجمع.

(ii) الحدان  $a_n$  و  $a_{n+1}$  هما حدان متتاليان. نجد الحدّين المتتاليين اللذين يحققان:

$$a_n + a_{n+1} = 4,300 \Rightarrow 900 + 100n + 1,000 + 100n = 4,300$$

$$1,900 + 200n = 4,300 \Rightarrow 200n = 2,400 \Rightarrow n = 12$$

كجواب: الحدان المتتاليان اللذان مجموعهما  $4,300$  هما  $a_{12}$  و  $a_{13}$ .

## (6) تمثيل رمزيّ لمتوالية بواسطة دستور تراجعيّ

في تعريف متوالية حسب دستور تراجعيّ، نستعرض المتوالية، من خلال إعطاء (عادةً) الحدّ الأول (هذا المعطى يسمّى

الشرط الابتدائيّ)، وإعطاء قانونٍ يمكننا من حساب كلّ حدٍ من حدود المتوالية (عدا الحدّ الأول) بمساعدة الحدّ الذي

قبله. بصورةٍ مشابهة، يمكننا إعطاء شروطٍ ابتدائيةٍ مختلفة، مثل: الحدّ الثاني، الحدّ الثالث، والخ.

في بعض الأحيان، يُعطون أكثر من حدٍ واحد (مثلًا، يعطون  $a_2$  و  $a_3$ )، وأيضًا قانونًا، يمكننا من حساب كلّ حدٍ

آخر في المتوالية بمساعدة الحدود المعطاة. سنصادف تمثيلاتٍ مختلفة في الأمثلة والأسئلة المختلفة.

لأسبابٍ تتعلق بالراحة والتنظيم، سنكتب، عادةً، المتتالية في سطرين.

في السطر الأول، سنكتب الشرط الابتدائيّ (عادةً قيمة الحدّ الأول).

في السطر الثاني، سنكتب مساواةً، عادةً ما ستصف العلاقة بين الحدّ  $a_{n+1}$  (الذي يقع في المكان الـ  $n+1$ )

في المتوالية)، وبين الحدّ  $a_n$  (الذي يقع في المكان الـ  $n$  في المتوالية).

أي  $a_{n+1} = f(a_n)$  (الحدّ في المكان الـ  $n+1$  هو دالةٌ للحدّ  $a_n$  الذي قبله، بحيث  $n$  هو عددٌ طبيعيّ).

السطر الثاني هذا يسمّى أيضًا "قانون الانتقال"، لأنّه يبيّن كيفية الانتقال من الحدّ  $a_n$  إلى الحدّ  $a_{n+1}$ .

يمكن، بالطبع، عكس ترتيب السطرين، أو كتابة كليهما في نفس السطر.

يسمّى هذا القانون دستورًا تراجعيًا، لأنه إذا وُصفت في "قانون الانتقال" علاقةً بين  $a_n$  و  $a_{n+1}$ ، ونريد ان نحسب

حدًا معينًا (لنفترض  $a_{10}$ )، سيتوجّب علينا حساب قيمة الحدّ السابق له ( $a_9$ )، الذي يُحسب حسب الحدّ الذي قبله

( $a_8$ )، وهكذا دواليك، وعلى هذا النحو، نظلّ نتراجع حتى  $a_1$ .

### مثال محلול

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 3n \end{cases} \quad \text{معطاة متوالية معرفة لكل } n \text{ طبيعي بواسطة الدستور التراجعي:}$$

(أ) احسبوا  $a_2$  ،  $a_3$  و  $a_4$  .

(ب) جدوا مكائى حدّين متتاليين في المتوالية، الفرق بينهما يساوي 60 .

(ج) معطى:  $a_8 = 86$  .

احسبوا  $a_7$  و  $a_9$  .

### الحل:

(أ) كي نجد  $a_2$  ، عندما يكون معلوماً  $a_1$  ، نعوض  $n = 1$  في "قانون الانتقال"،

$$a_{1+1} = a_2 = a_1 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5 \quad \text{ونحصل على:}$$

كي نجد  $a_3$  ، عندما يكون معلوماً  $a_2$  ، نعوض  $n = 2$  في "قانون الانتقال"،

$$a_{2+1} = a_3 = a_2 + 3 \cdot 2 = 5 + 6 = 11 \quad \text{ونحصل على:}$$

كي نجد  $a_4$  ، عندما يكون معلوماً  $a_3$  ، نعوض  $n = 3$  في "قانون الانتقال"،

$$a_{3+1} = a_4 = a_3 + 3 \cdot 3 = 11 + 9 = 20 \quad \text{ونحصل على:}$$

$$a_{n+1} = a_n + 3n$$

(ب) وفقاً للدستور التراجعي المعطى:

$$a_{n+1} - a_n = 3n$$

نطرح  $a_n$  من الطرفين، ونحصل على أنّ الفرق بين كلّ حدّين متتاليين هو:

$$\text{نحلّ المعادلة } 60 = 3n \text{ ، ونحصل على } n = 20 \text{ . أي، الفرق } a_{21} - a_{20} \text{ يساوي } 60 \text{ .}$$

كجواب: مكانا الحدّين المتتاليين اللذين، الفرق بينهما يساوي 60 ، هما: 20 و 21 .

(ج) كي نجد  $a_7$  ، عندما يكون معلوماً  $a_8$  ، نعوض  $n = 7$  في "قانون الانتقال"، ونحصل على:

$$a_{7+1} = a_8 = a_7 + 3 \cdot 7$$

$$86 = a_7 + 21 \Rightarrow a_7 = 65$$

كي نجد  $a_9$  ، عندما يكون معلوماً  $a_8$  ، نعوض  $n = 8$  في "قانون الانتقال"، ونحصل على:

$$a_{8+1} = a_9 = a_8 + 3 \cdot 8$$

$$110 = a_8 + 24 \Rightarrow a_9 = 86 + 24 = 110$$

$$a_7 = 65 , a_9 = 110 \quad \text{كجواب:}$$

• **انتبهوا!** "قانون الانتقال" (في هذا المثال) يربط بين  $a_n$  و  $a_{n+1}$  ، ولذا فهو يمكّننا من حساب حدّ

في مكان معين بواسطة الحدّ الذي قبله او الحدّ الذي بعده.

• عندما يكون معلوماً  $a_1$  ونريد أن نحسب  $a_n$  ، يجب أن نعرف قيم كلّ الحدود التي قبله.

• في حلّ البند (ب) كما عُرض، لا نعلم قيمتيّ الحدّين  $a_{21}$  و  $a_{20}$  ، وإتّما نعلم فقط

الفرق بينهما. بالطبع، نستطيع حساب قيمتيّ الحدّين بمساعدة الدستور التراجعي المعطى

وإستخدام "قانون الانتقال" 20 مرّة.

• عندما يربط "قانون الانتقال" بين  $a_n$  و  $a_{n+1}$  ، ونفقط أحد هذين الحدّين معلوم،

يمكننا إيجاد الحدّ الثاني عن طريق تعويض القيمة الصغرى من بين قيمتيّ مكانهما

في "قانون الانتقال".

**مثال:** إذا كان  $a_{77}$  معلوماً، ونريد أن نجد  $a_{76}$  ، نعوض في "قانون الانتقال"  $n = 76$  .

إذا كان  $a_{77}$  معلوماً، ونريد أن نجد  $a_{78}$  ، نعوض في "قانون الانتقال"  $n = 77$  .

لمحة تاريخية



متوالية أعداد "فيوناتشي"

عالم رياضيات إيطالي بارز يُدعى "ليوناردو فيوناتشي" من مدينة بيزا في إيطاليا (1170 – 1250). وصف في كتابه "كتاب الحساب" (عام 1202) عددًا من اكتشافاته المهمة، وأشهرها وأكثرها مركزية تُعرف باسمه: متوالية "فيوناتشي".

فيما يلي الأعداد الأولى من هذه المتوالية:  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$

كلّ حدّ في المتوالية هو مجموع الحدّين الموجودين قبله.

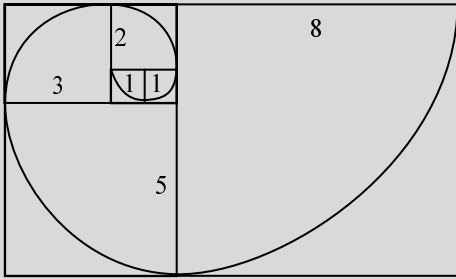
قدّم فيوناتشي هذه المتوالية في كتابه من خلال "الغز الأراب".

يُفترض أنّ زوجًا واحدًا من الأراب يمكنه أن يُنجب زوجًا واحدًا فقط، ولكن لا يمكنه فعل ذلك إلا بعد مرور شهرين من ولادته.

فكم سيكون عدد أزواج الأراب في نهاية السنة، إذا وُضع في الغرفة زوج أراب وُلد للتو؟

يمكنكم استكشاف تفاصيل حلّ هذا اللغز ومعلوماتٍ إضافيةٍ حوله بسهولة على الإنترنت.

في النهاية، يتبيّن أنّ عدد أزواج الأراب في كلّ شهر يساوي مجموع عدد الأزواج في الشهرين السابقين له.



في سبعينيات القرن التاسع عشر، وبعد مئات السنين من اكتشافات فيوناتشي،

تمّ التّعريف على أنماط ونسبٍ عدديّةٍ أخرى مرتبطة بأعداد هذه المتوالية،

وأشهرها هو "النسبة الذهبية" التي تتحقّق بين كلّ حدّين متتاليين في هذه

المتوالية. تقترب القيم في المتوالية من هذه النسبة كلّما تقدّمنا في أماكن الحدود.

وتقدّر هذه النسبة تقريبًا بـ 1.61803... (تحققوا بأنفسكم!).

النسبة الذهبية مرتبطة بالنمو والتزايد الحلزوني، ويمكن ملاحظتها في الطبيعة

(مثل: الأصداف، مخاريط الصنوبر، بذور زهرة دوار الشمس، وغيرها).

كذلك، يمكن العثور على أعداد المتوالية في الفنّ والموسيقى.

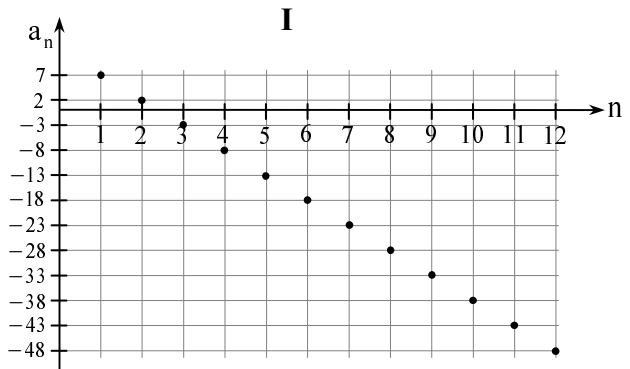
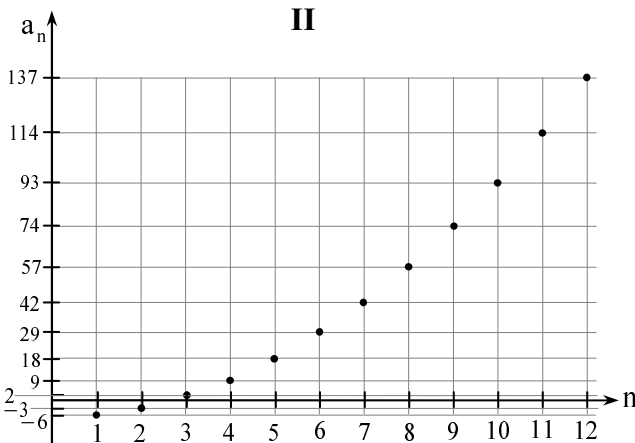
مثال: "الأوكتاف" في البيانو يتكوّن من 13 مفتاحًا، منها 8 بيضاء و 5 سوداء في مجموعاتٍ مؤلّفة من: 2 و 3.

\* \* \*

تمارين للعمل الذاتي

(1) يصف كلّ واحد من الرّسمين البيانيّين أمامكم حدود متوالية بحسب مكانها.

جدوا في كلّ رسمٍ بيانيّ الحدود الأربعة الأولى في المتوالية، وأيضًا الحدّ  $a_{10}$ .





$$(6) \text{ מעטה מטוליה מערפה לכל } n \text{ טביעי בוסטה הדסטר התראעי: } \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + 5n \end{cases}$$

(א) אכסבו  $a_2$  ,  $a_3$  ו  $a_4$  .

(ב) אדוה מכותי אדני מתנליני, الفرق بينهما يساوي 70 .

$$(7) \text{ מעטה מטוליה מערפה לכל } n \text{ טביעי بوسטה الدسטר التراجعي: } \begin{cases} a_1 = -17 \\ a_{n+1} = a_n + 4n \end{cases}$$

(א) אכסבו  $a_4$  .

(ב) אכסבו الفرق:  $a_{10} - a_9$  .

(ג) ברهنوا أنه لا يوجد في المتولية حدان متتاليان, الفرق بينهما 50 .

$$(8) \text{ מעטה מטוליה מערפה לכל } n \text{ טביעי بوسטה الدسטר التراجعي: } \begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 4n - 5 \end{cases}$$

(א) אכסבו  $a_2$  ו  $a_3$  .

(ב) מעטי:  $a_9 = 114$  .

(i) אדוה  $a_7$  ו  $a_8$  .

(ii) אדוה  $a_{11}$  .

$$(9) \text{ מעטה מטוליה מערפה بوسטה الدسטר التراجعي: } a_{n+1} = n^2 a_n \text{ לכל } n \text{ טביעי.}$$

מעטי:  $a_4 = 36$  . אכסבו قيمتي  $a_2$  ו  $a_1$  .

$$(10) \text{ מעטה מטוליה מערפה بوسטה الدسטר التراجعي: } \begin{cases} a_1 = 1 , a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 2 \cdot a_n - 4 \cdot a_{n+1} \end{cases} \text{ לכל } n \text{ טביעي.}$$

(א) אדוה قيم الحدود  $a_3$  ,  $a_4$  ,  $a_5$  .

(ב) מעטי  $a_8 = 17,976$  ,  $a_{10} = 355,888$  .

أدوה  $a_9$  .

$$(11) \text{ מעטה מטוליה מערפה بوسטה الدسטר التراجعي: } \begin{cases} a_1 = 1 , a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases} \text{ לכל } n \text{ טبيعي.}$$

(א) אדוה قيم الحدود  $a_4$  ,  $a_5$  ,  $a_6$  .

(ב) מעטי  $a_{13} = 233$  ,  $a_{14} = 377$  . אדוה  $a_{11}$  .

**מلاحטה:** תسمى هذه المتولية: "متولية فيبوناتشي" (أنظروا اللوحة التاريخية, في الصفحة 278).

היום	עדד الأشخاص الالین شاهدوا الإعلان
الأول	
الثاني	240
الثالث	480
الرابع	
الخامس	
السادس	
السابع	
الثامن	

- (12) شركة إعلانات تروج لمنتج ما في وسيلة إعلامية معينة. في اليوم الأول، يشاهد الإعلان عدد معين من الأشخاص، وفي كل يوم يليه، يشاهد الإعلان عدد أشخاص جدد يساوي ضعف عدد الأشخاص الذين شاهدوه في اليوم السابق. (أ) أكملوا الجدول الذي أمامكم وفقاً للمعطيات. (ب) ما هو عدد الأشخاص الذين شاهدوا الإعلان في اليوم الأول؟ (i) في اليوم السابع؟ (ii) في أي يوم سيكون عدد الأشخاص الذين شاهدوا الإعلان يساوي 3,840؟ (ج)

- (13) اشترى سامي ثلاثة أقساط. كل قسط كان أكبر من القسط الذي قبله بعدد أضعاف ثابت معين. قيمة القسط الثالث كانت 160 شاقلاً. قيمة القسط الرابع كانت 320 شاقلاً. (أ) جدوا بكم ضعف كل قسط أكبر من القسط الذي قبله. (ب) جدوا ما هي قيمة القسط الثاني. (ج) جدوا ما هي قيمة القسط الأول.

- (14) توفر شادية مالا لشراء تذكرة طائرة إلى جنوب أمريكا، سعرها 7,000 شاقلاً. في الأسبوع الأول أودعت في صندوق توفيرها 5,000 شاقلاً، وفي الأسابيع التالية أودعت في كل أسبوع 200 شاقلاً إضافية إلى الصندوق. (أ) ما هو المبلغ (بالشاقلاً) الذي سيكون في صندوق توفير شادية في الأسبوع العاشر؟ (ب) في أي أسبوع ستمكن شادية من شراء تذكرة الطائرة؟

- (15) يتمرن أمين على الركض في مسار بطول معين. وفقاً لبرنامج تدريبه، عليه أن يركض في كل دقيقة مسافة تزيد بعدد ثابت من الأمتار عن المسافة، التي ركضها في الدقيقة السابقة. يصف الجدول التالي المسافة التي يجب على أمين أن يركضها في كل دقيقة، وفقاً لبرنامج تدريبه. (أ) أكملوا في دفاتركم الناقص في الجدول.

الدقيقة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة	السادسة
المسافة (بالأمتار)				192	204	

- (ب) بكم متر المسافة التي يجب أن يركضها أمين في كل دقيقة أكبر من المسافة التي ركضها في الدقيقة التي قبلها؟ (ج) كم متراً يجب أن يركض أمين في الدقيقة الأولى؟

- (16) وفقاً لأسعار السفر في شركة لسيارات الأجرة لعام 2022: يدفع الزبون 11.3 شاقلاً عن أول كيلومتر من سفره، ويضيف لكل كيلومتر إضافي، 1.7 شاقلاً.  
(أ) أكملوا في دفاتركم الجدول التالي.

المسافة (بالكيلومتر)	1	2	3	4	5	6
السعر (بالشاقلاً)						

- (ب) عيّنوا في هيئة محاور النقاط التي حصلتكم عليها في الجدول.  
(ج) إختاروا صيغة قانون الحد العام، الملازمة للرسم البياني الذي حصلتكم عليه في البند (ب).  
(د) ما هو المبلغ الذي يدفعونه مقابل سفر 100 كيلومتر؟ بيّنوا حسابات مناسبة.  
(هـ) سافر سمير في سيارة أجرة تابعة لهذه الشركة، ودفع 215.3 شاقلاً.  
كم كيلومتراً سافر سمير؟

### أجوبة نهائية

- (1) رسم بياني I :  $a_{10} = -38$   $a_4 = -8$   $a_3 = -3$   $a_2 = 2$   $a_1 = 7$   
رسم بياني II :  $a_{10} = 93$   $a_4 = 9$   $a_3 = 2$   $a_2 = -3$   $a_1 = -6$   
(2) (أ) متوالية أ :  $a_5 = 20$   $a_4 = 12$   $a_3 = 6$   $a_2 = 2$   $a_1 = 0$   
متوالية ب :  $a_5 = -15$   $a_4 = -8$   $a_3 = -3$   $a_2 = 0$   $a_1 = 1$   
(ب) في المتوالية أ. (ج) متوالية أ : رسم بياني II ، متوالية ب : رسم بياني I.  
(3) (أ)  $a_4 = -5$  ,  $a_5 = -2$  ,  $a_6 = 1$  (ب) مكانه 3. (ج)  $a_5 = -2$   
(4) (أ)  $a_7 = 5$  ,  $a_8 = 0$  ,  $a_9 = -5$   
(ب) (i) 28 (ii)  $a_{29} = -105$  (iii)  $a_{27} = -95$  (ج) كلاً.  
(د) تنتمي إلى المتوالية: 25 , -25 , -50 . لا تنتمي إلى المتوالية: -37 , 12 , 40 .  
(5) (أ)  $a_1 = 3$  ,  $a_2 = 8$  ,  $a_3 = 15$  ,  $a_4 = 24$  (ب)  $n = 8$  (ج)  $n = 20$   
(د) (i)  $a_{n+1} = n^2 + 4n + 3$  (ii)  $a_{16} + a_{17} = 611$   
(6) (أ)  $a_2 = 2$  ,  $a_3 = 12$  ,  $a_4 = 27$  (ب)  $a_{15} - a_{14} = 70$   
(7) (أ)  $a_4 = 7$  (ب)  $a_{10} - a_9 = 36$  (ج) إحصوا مع المعلم في الصف.  
(8) (أ)  $a_2 = 9$  ,  $a_3 = 12$  (ب)  $a_7 = 64$  ,  $a_8 = 87$  (ii)  $a_{11} = 180$   
(9)  $a_1 = 1$  وأيضا  $a_2 = 1$   
(10) (أ)  $a_5 = -204$  ,  $a_4 = 46$  ,  $a_3 = -10$  (ب)  $a_9 = -79,984$   
(11) (أ)  $a_6 = 8$  ,  $a_5 = 5$  ,  $a_4 = 3$  (ب)  $a_{11} = 89$

(ب) (i) 120

(ii) 680,7

(ج) في اليوم السؤس.

اليوم	عدد الأشؤاص الؤلن شاهدهوا الإعلان
الأؤل	120
الثؤاني	240
الثؤلت	480
الزؤبع	960
الخامس	920,1
السؤس	840,3
السؤبع	680,7
الثؤامن	360,15

(12) (أ)

(13) (أ) بؤ ضعف . (ب) 80 شؤقلؤ. (ج) 40 شؤقلؤ.

(14) (أ) 6,800 شؤقل. (ب) في الأسبوع الـ 11 .

(15) (أ) إفتصوا مع المعلم في الصفت. (ب) بؤ 12 متراً. (ج) 156 متراً.

مسافة (كم)	1	2	3	4	5	6
السعر (شؤقل)	11.3	13	14.7	16.4	18.1	19.8

(16) (أ)

(ب) إفتصوا مع المعلم في الصفت.

(ج) (i) (ؤ) 179.6 شؤقلؤ. (هـ) 121 كيلومتراً.

## الفصل 16: المتواليه الحسابيه

### أ. المتواليه الحسابيه بتمثيلات مختلفه

#### مهمه: متواليات حسابيه

(أ) جدوا القانونيه، وأكملوا الحدود الناقصه في كل واحده من المتواليات التاليه:

① 3, 8, 13, 18, 23, \_\_, \_\_

② 5, 3, 1, -1, -3, \_\_, \_\_

③ 20, 25, 30, 35, \_\_, \_\_, \_\_

④ 3, 10½, 18, 25½, \_\_, \_\_, \_\_

⑤ 8, 6, 4, 2, 0, \_\_, \_\_

⑥ 24, 23, 22, 21, 20, \_\_, \_\_

(ب) ما هي الصفة المشتركة لكل المتواليات أعلاه (اخترها الإجابة الصحيحة).

1. القانونيه، التي تتحقق في كل المتواليات، هي أن كل حد في المتواليه (عدا الحد الأول) أكبر أو أصغر من الحد الذي قبله بمقدار ثابت.

2. القانونيه، التي تتحقق في كل المتواليات، هي أن كل حد في المتواليه (عدا الحد الأول) أكبر أو أصغر من الحد الذي قبله بعدد أضعاف ثابت.

(ج) من بين المتواليات المعطاه، جدوا متواليتين، حدهما الأول ( $a_1$ ) هو نفس الحد.

(د) من بين المتواليات المعطاه، جدوا متواليتين، الفرق الثابت بين الحد ( $a_n$ )

والحد السابق له ( $a_{n-1}$ )، هو نفس الفرق (بحيث  $n$  هو عدد طبيعي أكبر من 1).

(هـ) أكتبوا متواليه لها قانونيه، مطابقه لقانونيه إحدى المتواليات وفقاً لاختياركم، والحد الأول فيهما مختلف.

(و) أكتبوا متواليه أيًا كانت كما تشاؤون، فيها أربعة حدود (على الأقل)، بحيث الفرق بين كل حد وحد، ثابت.

#### تعريف:

المتواليه الحسابيه هي متواليه عدديه فيها، الفرق بين كل حد (عدا الحد الأول)

والحد السابق له، هو مقدار ثابت (لا يتعلق بمكان الحدود).

نسمي الفرق الثابت فرق المتواليه، ونرمز إليه بالحرف  $d$ ،

(الذي هو الحرف الأول من الكلمه difference وتعني الفرق باللغه الإنجليزيه).

وفقاً لهذا التعريف، لكل  $n$  طبيعي أكبر من 1 تتحقق المساواة:

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

**מְהִמָּה: אַנְוָע הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת הַחֲסָבִייתִית**



(א) גְּדוּא פֶּרֶק הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת  $d$  בִּי כָּל וָאֶחָד מִן הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת הַחֲסָבִייתִית הַתְּאֵלִית:

- ① 4, 7, 10, 13, ...
- ② 2, 4.5, 7, 9.5, ...
- ③ 10, 6, 2, -2, -6, ...
- ④ -5, -5, -5, ...
- ⑤ -5, -7, -9, -11, ...

(ב) (i) בִּי אֵי הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת אֲעֵלֵה, הַפֶּרֶק  $d$  הוּא עֵדֵד מוֹגֵב?

(ii) מָדָא יִמְכַנְּנָא הַקּוֹל עַן קִיַּם חֲדוּד הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת בִּי הַזֶּה הַחֲלָה, כְּלָמָּא כָּאֵן  $n$  (מְכָאן הַחֲדָ) אֲכִיר?

(ג) (i) בִּי אֵי הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת אֲעֵלֵה, הַפֶּרֶק  $d$  הוּא עֵדֵד סָאֵלֵב?

(ii) מָדָא יִמְכַנְּנָא הַקּוֹל עַן קִיַּם חֲדוּד הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת בִּי הַזֶּה הַחֲלָה, כְּלָמָּא כָּאֵן  $n$  (מְכָאן הַחֲדָ) אֲכִיר?

(ד) (i) בִּי אֵי הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת אֲעֵלֵה, הַפֶּרֶק  $d$  יִסָּאוּי סִפְרָא?

(ii) מָדָא יִמְכַנְּנָא הַקּוֹל עַן קִיַּם חֲדוּד הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת בִּי הַזֶּה הַחֲלָה?

**מְתוֹאֲלִיּוֹת חֲסָבִייתִית תַּעֲסָדִית, תַּזְרִילִית וְנֹאֵבֵת:**

- אִדָּא כָּאֵן פֶּרֶק הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת הַחֲסָבִייתִית מוֹחָבָא ( $d > 0$ ), עַנְדָּהָ, הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת הִיא מְתוֹאֲלִיּוֹת תַּעֲסָדִית.
- אִדָּא כָּאֵן פֶּרֶק הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת הַחֲסָבִייתִית סָאֵלֵבָא ( $d < 0$ ), עַנְדָּהָ, הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת הִיא מְתוֹאֲלִיּוֹת תַּזְרִילִית.
- אִדָּא כָּאֵן פֶּרֶק הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת הַחֲסָבִייתִית הוּא סִפְרָא ( $d = 0$ ), עַנְדָּהָ, הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת לִיִּסְת תַּעֲסָדִית וְלִיִּסְת תַּזְרִילִית, וְכָל חֲדוּדָהָ מְתַסָּאוּי. בִּי מִתְּל הַזֶּה הַחֲלָה תְּסָמֵי הַמְּתוֹאֲלִיּוֹת מְתוֹאֲלִיּוֹת נֹאֵבֵת.

1. א. תערף עלל מוואלל חסבבל במוכלל מכללל: כלמל, לסכל חסוד מוואלל (פל סטר), סדול קלמ, רסמ בללל

### אמלה מכללה

מוכלל כלמל למוואלל חסבבל

- (1) מעפלה מוואלל חסוד האול פלה 5- , וכל חס (עא חס האול) אכר ב- 3 מ חס האל קבל. (א) אשרחא למהא מוואלל הל מוואלל חסבבל. (ב) סדוא חס  $a_7$  . (ג) סדו  $n$  , אלל באלסבל לה הלחף  $a_n = 19$  .

**הכל:**

- (א) במא אן הפרק בלל כל חס פל הל מוואלל (עא חס האול) וחס האל קבל הל עסלל לבל (3) , נסלללל אן הל מוואלל הל מוואלל חסבבל.

נכלל חסוד מוואלל:  $-5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$

(ב)  $a_7 = 13$

(ג)  $a_9 = 19$  , וללא,  $n = 9$  .

כלבל חסוד מוואלל חסבבל (פל סטר)

- (2) מעפלה מוואלל חסבבל:  $11, 7, 3, -1, -5, \dots$  (א) מה הל קאנונל חסוד מוואלל? (ב) אכלבוא חסוד אל 10 האולל פל מוואלל.

**הכל:**

- (א) כל חס (עא חס האול) אסגר ב- 4 מ חס האל קבל. (ב) חסוד העשרה האולל פל מוואלל הל:  $11, 7, 3, -1, -5, -9, -13, -17, -21, -25$

מוכלל מוואלל חסבבל בואסלה סדול קלמ

- (3) מוואלל פל המל (2) , למא אן נערשל (או נערפל) בואסלה סדול קלמ אכלל. (א) סדוא חס הלל מוואלל. (ב) הל בובל חס פל מוואלל, קלמל 24- ?

**הכל:**

- (א) עלל גרר חל המל (2) פל בלל (ב) , למא אן האסלמלרר ואכלל הסדול ופלל ללקאנונל, וחصول עלל נפל חסוד אל 10 האולל:

$11, 7, 3, -1, -5, -9, -13, -17, -21, -25$

נכלל עלל  $a_8 = -17$

- (ב) במא אן  $a_9 = -21$  ו  $a_{10} = -25$  , וחסוד אלל לעל פל האמאן האכר מ 10 (חסוד אלל לל חס העאשר) אסגר מ 25- , וללא, לא בובל פל מוואלל חס קלמל 24- .

11	$a_1$
7	$a_2$
3	$a_3$
-1	$a_4$
-5	$a_5$
	.
	.
	.



(3) (أ) أكتبوا الحدود الخمسة الأولى في متوالية حسابية، بحيث يكون الحد الثالث 14 ،  
وفرقتها هو 5 .

(ب) في المتوالية التي حصلتم عليها في البند (أ)، جدوا حدّين متتاليين مجموعهما 33 .  
(ج) جدوا قيمة الحد السابع في هذه المتوالية.

(4) (أ) أكتبوا الحدود الخمسة الأولى في متوالية حسابية، بحيث يكون الحد الثالث 10 ،  
وفرقتها هو -8 .

(ب) في المتوالية التي حصلتم عليها في البند (أ)، جدوا حدّين متتاليين مجموعهما 44 .  
(ج) جدوا قيمة الحد الثامن في هذه المتوالية.

(5) في كل واحد من الجداول الجزئية التالية يوجد وصف لمتوالية حسابية.

متوالية ج	
	$a_1$
0	$a_2$
	$a_3$
30	$a_4$
	$a_5$

متوالية ب	
21	$a_1$
	$a_2$
15	$a_3$
	$a_4$
	$a_5$

متوالية أ	
	$a_1$
	$a_2$
15	$a_3$
	$a_4$
15	$a_5$

(أ) جدوا في كل جدول فرق المتوالية الحسابية، وأكملوا الحدود الناقصة فيه.  
(ب) حدّدوا هل المتوالية الحسابية، الموصوفة في كل جدول، تصاعدية، تنازلية أم ثابتة.

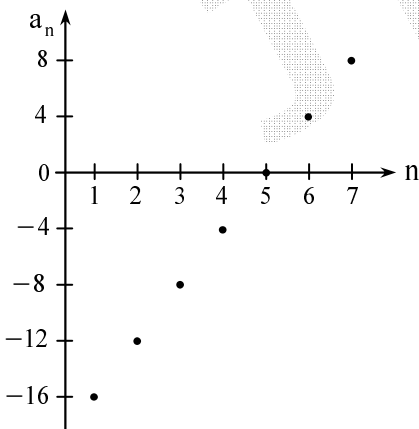
(6) معطى أن أحد ثلاثة حدود متتالية في متوالية حسابية هو 2 .  
جدوا الحدود الثلاثة هذه، إذا عَلِمَ أن فرق المتوالية هو 7 .  
ما هو عدد الإمكانيات الموجودة ؟

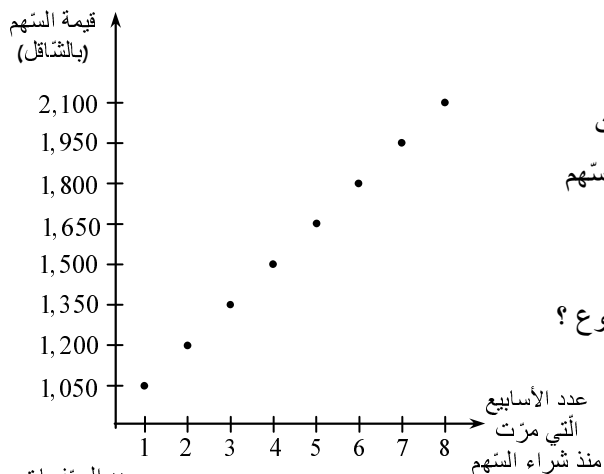
(7) متوالية حسابية مُعرّفة بواسطة الرّسم البيانيّ أمامكم:

(أ) ما هو فرق المتوالية ؟

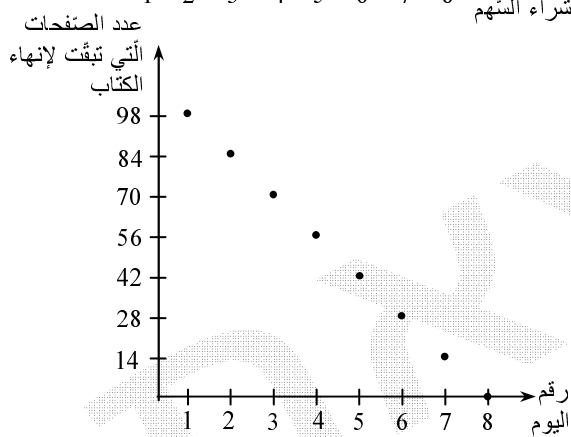
(ب) جدوا الحدّ  $a_4$  .

(ج) جدوا مكان الحدّ الذي قيمته -8 .





- (8) اشترى طلال سهمًا في البورصة سعره 1050 شافلًا. في الأسبوع الأول لم تتغير قيمة السهم، لكن ابتداءً من الأسبوع الثاني فصاعدًا، بدأ سعر السهم بالارتفاع كل أسبوع بمقدار ثابت مقارنة بالأسبوع السابق له. يصف الرسم البياني أمامكم سعر السهم بحسب عدد الأسابيع، التي مرت منذ لحظة شرائه.
- (أ) اشرحوا لماذا يصف الرسم البياني متواليات حسابية.  
(ب) ما هو المقدار الثابت، الذي ارتفعت به قيمة السهم كل أسبوع؟  
(ج) ما هو الحد الأول في المتوالية؟  
(د) ما هو الحد السابع في المتوالية، وما مفهومه؟



- (9) تقرأ أحلام كتابًا. يصف الرسم البياني أمامكم عدد الصفحات التي تبقت لأحلام لإنهاء قراءة الكتاب، في بداية كل يوم (قبل أن تبدأ القراءة في ذلك اليوم).
- (أ) اشرحوا لماذا يصف الرسم البياني متواليات حسابية.  
(ب) هل المتوالية الحسابية تصاعديّة أم تنازليّة؟  
(ج) جدوا فرق المتوالية و اشرحوا مفهومه في الرسم البياني.  
(د) ما هو الحد الأخير في المتوالية، وما هو مفهومه؟  
(هـ) ما هو عدد الصفحات الكلي للكتاب، الذي تقرأه أحلام؟  
أي واحد من حدود المتوالية يدل على هذا العدد؟

### أجوبة نهائية

- (1) (أ) المتواليات الحسابية هي: ①, ④, ⑤, ⑦, ⑧.  
(ب) ① (i)  $d = 3$  تصاعديّة. (ii)  $d = 2.5$  تصاعديّة.  
⑤ (i)  $d = -4$  تنازليّة. (ii)  $d = 0$  ثابتة.  
⑧ (i)  $d = 1$  تصاعديّة. (ii) تصاعديّة.
- (2) (أ) 1, 4, 7, 10, 13, 16 (ب) 5, 0, -5, -10, -15 (ج) 12, 22, 32, 42 (د) 27, 27.5, 28, 28.5, 29  
(3) (أ) 4, 9, 14, 19, 24, ... (ب)  $a_4$  و  $a_3$  (ج)  $a_7 = 34$   
(4) (أ) 26, 18, 10, 2, -6, ... (ب)  $a_2$  و  $a_1$  (ج)  $a_8 = -30$

متوالية ج	
-15	$a_1$
0	$a_2$
15	$a_3$
30	$a_4$
45	$a_5$
$d = 15$	

متوالية ب	
21	$a_1$
18	$a_2$
15	$a_3$
12	$a_4$
9	$a_5$
$d = -3$	

متوالية أ	
15	$a_1$
15	$a_2$
15	$a_3$
15	$a_4$
15	$a_5$
$d = 0$	

(ب) متوالية أ – ثابتة، متوالية ب – تنازليّة، متوالية ج – تصاعديّة.

- (6) ثلاث إجابات ممكنة: 2, 9, 16 أو 2, 9, -5 أو -12, -5, 2.

- (7) (א)  $d = 4$  (ב)  $a_4 = -4$  (ג)  $a_3$
- (8) (א) אפסווא מע המלמ פי الصنف. (ب) 150 شاقلاً. (ج) 1,050 شاقلاً  $a_1$
- (9) (أ) أفسووا مع المعلم في الصنف. (ب) تنازلية. (ج)  $d = -14$ , مفهومه: تقرأ أحلام كل يوم 14 صفحة.
- (أ) أو في كل يوم، يتبقى لإنهاء الكتاب 14 صفحة أقل من اليوم السابق لذلك اليوم.
- (د)  $a_8 = 0$ , مفهومه: إنهاء قراءة الكتاب. (ه) 98 صفحة،  $a_1 = 98$ .

\* \* \*

## 2. تمثيل رمزي لمتوالية حسابية بواسطة قانون الحد العام (حسب المكان)

سنصل إلى صيغة قانون الحد العام  $a_n$  للمتوالية الحسابية،

المعطاة في المثال (1) في الصفحة 286، بواسطة النموذج التالي:  $-5, -2, 1, 4, 7, \dots$   $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

وفقاً لقانونية المتوالية، كل حد (عدا الحد الأول) أكبر بـ 3 من الحد السابق له.

سنعبر في الجدول التالي عن كل حد (ابتداءً من الحد الثاني) بواسطة الحد الأول ( $a_1$ ) والفرق  $d = 3$ .

حساب الحد في المتوالية حسب المثال أعلاه	تعبير يمثل الحد بواسطة $a_1$ ، الفرق $d$ ومكان الحد
$a_2 = -5 + 1 \cdot 3 = -2$	$a_2 = a_1 + d \Rightarrow a_2 = a_1 + 1 \cdot d$
$a_3 = -5 + 2 \cdot 3 = 1$	$a_3 = a_1 + d + d \Rightarrow a_3 = a_1 + 2 \cdot d$
$a_4 = -5 + 3 \cdot 3 = 4$	$a_4 = a_1 + d + d + d \Rightarrow a_4 = a_1 + 3 \cdot d$
$a_5 = -5 + 4 \cdot 3 = 7$	$a_5 = a_1 + d + d + d + d \Rightarrow a_5 = a_1 + 4 \cdot d$
$\vdots$	$\vdots$
$a_n = -5 + (n-1) \cdot 3$	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

**القانونية بكلمات:** كل حد في المتوالية يساوي مجموع  $a_1$  وحاصل ضرب 3 في عدد

قيمته أصغر بـ 1 من مكانه في المتوالية، أي:

$$a_n = a_1 + 3 \cdot (n-1)$$

الحد في المكان  $n$   
الحد الأول حسب قانونية حدود المتوالية  
الحد في المكان  $n$   
الحد الأول حسب قانونية حدود المتوالية

قيمة أصغر بـ 1 من المكان  $n$  للحد  $a_n$

سنجد قانوناً للحد العام لمتوالية حسابية أيًا كانت:

حسب تعريف المتوالية الحسابية، الفرق بين كل حد في المتوالية (عدا الأول)، وبين الحد السابق له يساوي فرق المتوالية  $d$ .

لذا نستطيع كتابة المتساويات التالية:

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = d \\ a_3 - a_2 = d \\ a_4 - a_3 = d \\ \vdots \\ a_n - a_{n-1} = d \end{cases}$$

إذا جمعنا كل الأطراف اليسرى لـ  $(n-1)$  الأسطر ( $n$  عدد طبيعي أكبر من 1)، فإن جميع الحدود عدا الحد  $a_1$  والحد  $a_n$  ستختزل، لأنها تظهر مرة بإشارة موجبة، ومرة بإشارة سالبة.

في المجمل، سنحصل على أن مجموع كل الأطراف اليسرى يساوي  $a_n - a_1$ .

في الطرف الأيمن يوجد  $(n-1)$  أسطر، في كل سطر يوجد تعبير مقداره  $d$ .

لذا، مجموع كل الأطراف اليمنى هو:  $(n-1) \cdot d$ . من هنا، النتيجة النهائية هي:

إذا نقلنا  $a_1$  إلى الطرف الأيمن، سنحصل على تعبير جبري يعبر عن الحد العام للمتوالية

الحسابية،  $a_n$ ، بواسطة  $n$ :

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$



	$a_1$
	$a_2$
	$a_3$
15	$a_4$
	$a_5$
	$a_6$
27	$a_7$
	.
	.
	.
	$a_n$

(3) في الجدول أمامكم معطى قيمتا حدّين في متوالية حسابية.

(أ) جدوا تعبيراً للحدّ العامّ  $a_n$ .

(ب) جدوا الحدّ في المكان الـ 21.

**الحلّ:**

(أ) نجد بدايةً الحدّ الأول  $a_1$  وفرق المتوالية  $d$ .

نستعمل قانون الحدّ العامّ:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_4 = 15 \Rightarrow \begin{cases} 15 = a_1 + 3d \\ 27 = a_1 + 6d \end{cases}$$

$$a_7 = 27 \Rightarrow \begin{cases} 15 = a_1 + 3d \\ 27 = a_1 + 6d \end{cases}$$

من خلال المعطى عن الحدّ الرابع:

من خلال المعطى عن الحدّ السابع:

$$-12 = -3d \Rightarrow d = 4 \Rightarrow 15 = a_1 + 3 \cdot 4 \Rightarrow a_1 = 3$$

نعوّض  $a_1 = 3$  ،  $d = 4$  في قانون الحدّ العامّ:

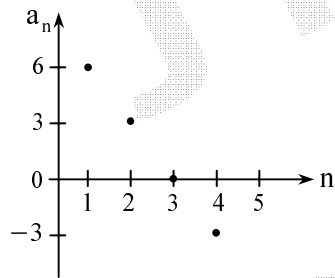
$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$$

ونحصل على:

(ب) نعوّض في القانون الذي حصلنا عليه  $n = 21$  ، ونحصل على:  $a_{21} = 4 \cdot 21 - 1 = 83$

**جواب:** (أ) قانون الحدّ العامّ للمتوالية هو  $a_n = 4n - 1$ .

(ب) الحدّ في المكان الـ 21 هو  $a_{21} = 83$ .



(4) في الرّسم البيانيّ التالي وصفّ للحدود الأربعة الأولى في متوالية حسابية:

(أ) جدوا  $a_4$ .

(ب) جدوا  $a_{17}$ .

(ج) جدوا مكان الحدّ الذي قيمته  $-39$ .

**الحلّ:**

(أ) بحسب الرّسم البيانيّ نحصل على أنّ  $a_4 = -3$ .

(ب) بحسب الرّسم البيانيّ نحصل على أنّ  $a_1 = 6$  ،  $a_2 = 3$  ولذا  $d = a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$

بحسب قانون الحدّ العامّ في متوالية حسابية:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_{17} = a_1 + (17-1) \cdot d = 6 + 16 \cdot (-3) = 6 - 48 = -42$$

نعوّض  $n = 17$  ونحصل على:

$$-39 = a_1 + (n-1)d$$

(ج) نعوّض في قانون الحدّ العامّ  $a_n = -39$  ونحصل على:

$$-39 = 6 + (n-1) \cdot (-3)$$

أي:

$$-39 = 6 - 3n + 3 \Rightarrow 3n = 48 \Rightarrow n = 16$$

أي أنّ  $a_{16} = -39$ .

**جواب:** مكان الحدّ الذي قيمته  $-39$  ، هو 16.

### מארינ לעלל דאטי

קאנון הדד לעמ לעמללע חסאבליע

(1) מעטי פי כל בנד מטוואללע חסאבליע. גדווא קאנון הדד לעמ  $a_n$  לעמללע (עברווא ען  $a_n$  בוואסע  $n$ ).

(א)  $5, 8, 11, 14, \dots$  (ב)  $2, 6, 10, \dots$  (ג)  $7, 5, 3, 1, -1, \dots$

(2) מעטי פי כל בנד מטוואללע חסאבליע.

לחסבווא הדד המלוב.

(א)  $d = 3, a_1 = 3, a_{37} = ?$  (ב)  $7, 10, 13, \dots, a_{75} = ?$

(ג)  $d = -3, a_1 = 12, a_{72} = ?$  (ד)  $15, 9, 3, \dots, a_{48} = ?$

פי כל ואחד מן המארינ (3) – (9) מظهر מעטיאט ען מטוואללע חסאבליע, פי העמוד האימן לעגדול. אכלמווא קעימ המלובה, פי האעדה אללעה הארי (א) – (ג).

קעימ אלטי יגב חסאבליע			מעטע המטוואללע חסאבליע:	
(ג)	(ב)	(א)		
$a_{45} = ?$	$a_{12} = ?$	$d = ?$	$4, 9, 14, \dots$	(3)
$a_{27} = ?$	$a_8 = ?$	$d = ?$	$19, 16, 13, \dots$	(4)
$a_{33} - a_{29} = ?$	$a_{25} = ?$	$a_{11} = ?$	$22, 19\frac{1}{2}, 17, \dots$	(5)
$a_7 - a_{11} = ?$	$a_{30} = ?$	$a_1 = ?$	$a_{27} = 84, d = 4$	(6)
$a_{80} - a_{77} = ?$	$a_{53} = ?$	$a_1 = ?$	$a_{51} = -45, d = -3$	(7)
$a_{16} + a_{18} = ?$	$a_{33} = ?$	$d = ?$	$a_1 = -3, a_{17} = 61$	(8)
$a_{30} + a_{28} = ?$	$a_{57} = ?$	$d = ?$	$a_1 = -5, a_{29} = -37$	(9)

(10) מם פי מסאבקה, מוזיע 13 גאנזע. הגאנזע האולע קאנט אכיר ב 5 אضعאפ מן הגאנזע האריע.

כל גאנזע קאנט אסער מן סאבקה ב 80 שאקל.

(א) לשרחווא למאדא המטוואללע, אלטי מם קעימ הגואנז פי המסאבקה, הי מטוואללע חסאבליע.

(ב) (i) גדווא קעימה הגאנזע האולע פי המסאבקה.

(ii) גדווא קעימה הגאנזע האריע פי המסאבקה.

(11) ריאטי ינדרב אסטעדאדא למסאבקה גרי, רכז למדע 18 דקיפע.

קעץ פי הדקיפע האולע 250 מטר.

חפז ריאטי סרעה בשכל קאבט, בכיח אה פי כל דקיפע מן בקיעה הגרי, קעץ עדהא קאבטא מן אמאר אקל מן

הדקיפע הסאבקה. פי הדקיפע האריע מן גריע, קעץ ריאטי 182 מטר.

(א) לשרחווא למאדא המטוואללע, אלטי מם קעץ המסאפה, אלטי קעעה ריאטי פי כל דקיפע, הי מטוואללע חסאבליע.

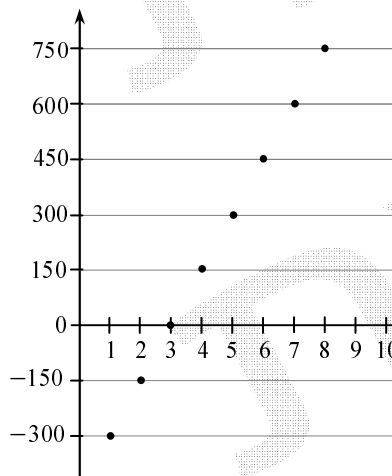
(ב) קמ עדה אמאר אלטי קעעה ריאטי אקל פי כל דקיפע, מקארנע בלדקיפע אלטי סבקה?

(ג) מא הו עדה אמאר אלטי קעעה ריאטי פי הדקיפע אללעה לגריע?

- (12) في الصّفّ الأوّل في قاعة سينما معينة يوجد 12 مقعدًا.  
 في كلّ صفّ بعد هذا الصّفّ، يوجد مقعدان أكثر من الصّفّ الذي قبله.  
 (أ) (i) اشرحوا لماذا عدد المقاعد في صفوف قاعة السينما، يشكّل متوالية حسابية.  
 (ii) ما هو فرق المتوالية الموصوفة، وما هو حدّها الأوّل؟  
 (iii) جدوا تعبيرًا للحدّ العامّ  $a_n$  لهذه المتوالية.  
 (ب) كم مقعدًا يوجد في الصّفّ السابع لقاعة السينما؟  
 (ج) في أيّ صفّ في القاعة، يوجد 20 مقعدًا؟  
 (د) في الصّفّ الأخير في قاعة السينما، يوجد 40 مقعدًا. كم صفًا يوجد في قاعة السينما؟  
 (هـ) هل يمكن أن يكون في قاعة السينما صفّ، فيه عددٌ فرديّ من المقاعد؟ علّوا.

- (13) علماء في مجال علم النبات طوّروا شجرة، في منتصف الشهر الأوّل من زراعتها، أثمرت 3 ثمراتٍ أولى، وفي منتصف كلّ شهرٍ بعده، كانت تُثمر 5 ثمراتٍ إضافية.  
 (أ) (i) اشرحوا لماذا عدد الثمرات، الذي أثمرته الشجرة حتّى منتصف كلّ شهر، يشكّل متوالية حسابية.  
 (ii) ما هو فرق المتوالية الموصوفة، وما هو حدّها الأوّل؟  
 (iii) جدوا تعبيرًا للحدّ العامّ  $a_n$  لهذه المتوالية.  
 (ب) في منتصف أيّ شهر منذ زراعة الشجرة، ستثمر الشجرة 88 ثمرة؟

$a_n$   
 المبلغ في  
 الحساب المصرفي  
 للجنة المبنى (بالشافل)



- (14) يوجد في مبنى سكنيّ معين 6 شقق. في الحساب المصرفي للجنة المبنى كان دينٌ مقداره 300 شافل في نهاية الشهر الأوّل. ابتداءً من الشهر الثاني، طلب من ساكني كلّ شقة دفع 25 شافلًا في كلّ شهر، لمدة سنة، لتسديد الدين ولتجديد بهو المبنى.  
 تمعنوا في الرّسم البيانيّ التالي وأجيبوا:  
 (أ) ماذا يصف الرّسم البيانيّ؟  
 (ب) في أيّ شهر تمّ تسديد الدين؟  
 (ج) ما هو المبلغ الذي كان في حساب لجنة المبنى في نهاية الشهر الثامن؟  
 (د) اكتبوا صيغةً ملائمة لقانون الحدّ العامّ للمتوالية، الموصوفة في الرّسم البيانيّ.  
 (هـ) ما هو المبلغ الذي كان في حساب لجنة المبنى في نهاية الشهر الـ 12؟

إيجاد  $a_1$  و  $d$  بواسطة هيئة معادلات

(15) حلّوا هيئة المعادلات في كلّ واحد من البنود التالية:

$$\begin{cases} -4a_1 + 3d = 1 & \text{(ج)} \\ 5a_1 - 2d = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a_1 - 4d = 20 & \text{(ب)} \\ -a_1 + 3d = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 2d = 5 & \text{(أ)} \\ 2a_1 + 3d = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 + 3d = 4a_1 + 2d + 14 & \text{(و)} \\ 3a_1 - 12 = 5d - a_1 - 21 \end{cases} \quad \begin{cases} -6a_1 = 4d & \text{(هـ)} \\ 0 = 3a_1 - 5d - 21 \end{cases} \quad \begin{cases} 7a_1 + 5d = 21 & \text{(د)} \\ -8a_1 + 3d = 37 \end{cases}$$

- (16) في متوالية حسابية معطى:  $a_2 = 20$  ،  $a_6 = 32$  .  
 جدوا فرق المتوالية والحدّ الأوّل  $a_1$  .

(17) في متوالية حسابية معطى:  $a_3 + a_9 = 34$  ،  $a_4 + a_7 = 30$  .  
جدوا فرق المتوالية وحدّھا الأول  $a_1$  .

(18) في متوالية حسابية معطى:  $a_{10} = -22$  ،  $a_3 + a_4 + a_5 = -12$  .  
جدوا فرق المتوالية وحدّھا الأول  $a_1$  .

(19) في متوالية حسابية الحدّ الأول أكبر بـ 12 من الحدّ الرابع، ومجموع الحدّين السابع والثاني هو -18 .  
(أ) جدوا  $a_1$  و  $d$  .  
(ب) جدوا قيمة الحدّ العاشر في المتوالية.

(20) في متوالية حسابية الحدّ الخامس يساوي 6 أضعاف الحدّ الثاني، ومجموع الحدّين الثالث والسادس هو 31 .  
ما هي قيمة الحدّ في المكان الـ 12 في المتوالية؟

### أجوبة نهائية

(1) (أ)  $a_n = 3n + 2$  (ب)  $a_n = 4n - 6$  (ج)  $a_n = -2n + 9$

(2) (أ) 111 (ب) 229 (ج) -129 (د) -411

(ج)	(ب)	(أ)	
$a_{45} = 224$	$a_{12} = 59$	$d = 5$	(3)
$a_{27} = -59$	$a_8 = -2$	$d = -3$	(4)
$a_{33} - a_{29} = -10$	$a_{25} = -38$	$a_{11} = -3$	(5)
$a_7 - a_{11} = -16$	$a_{30} = 96$	$a_1 = -20$	(6)
$a_{80} - a_{77} = -9$	$a_{53} = -51$	$a_1 = 105$	(7)
$a_{16} + a_{18} = 122$	$a_{33} = 125$	$d = 4$	(8)
$a_{30} + a_{28} = -74$	$a_{57} = -69$	$d = -1\frac{1}{7}$	(9)

(10) (أ) إفحصوا مع المعلم في الصف. (ب) (i) 1,200 شاقلاً. (ii) 240 شاقلاً.

(11) (أ) إفحصوا مع المعلم في الصف. (ب) 4 أمتار. (ج) 242 مترًا.

(12) (أ) (i) إفحصوا مع المعلم في الصف. (ii)  $a_1 = 12$  ,  $d = 2$  (ب) 24 مقعدًا. (ج) في الصفّ الخامس. (د) 15 صفًا.

(13) (أ) (i) إفحصوا مع المعلم في الصف. (ii)  $a_1 = 3$  ,  $d = 5$  (ب) في منتصف الشهر الـ 18.

(14) (أ) إفحصوا مع المعلم في الصف. (ب) في الشهر الثالث. (ج) 750 شاقلاً.

(15) (أ)  $a_n = 150n - 450$  (د)  $a_1 = 1$  ,  $d = 2$  (ب) في الشهر الثالث. (هـ) 1,350 شاقلاً.

(16) (أ)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ب)  $a_1 = 2$  ,  $d = -2$  (ج)  $a_1 = 2$  ,  $d = 3$  (د)  $a_1 = 1$  ,  $d = 2$  (هـ)  $a_1 = 4$  ,  $d = -2$  (و)  $a_1 = -1$  ,  $d = 1$  (ز)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ح)  $a_1 = 2$  ,  $d = -3$  (ط)  $a_1 = -3$  ,  $d = 4$  (ي)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ث)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ج) 750 شاقلاً.

(17) (أ)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ب)  $a_1 = 2$  ,  $d = -2$  (ج)  $a_1 = 2$  ,  $d = 3$  (د)  $a_1 = 1$  ,  $d = 2$  (هـ)  $a_1 = 4$  ,  $d = -2$  (و)  $a_1 = -1$  ,  $d = 1$  (ز)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ح)  $a_1 = 2$  ,  $d = -3$  (ط)  $a_1 = -3$  ,  $d = 4$  (ي)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ث)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ج) 750 شاقلاً.

(18) (أ)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ب)  $a_1 = 2$  ,  $d = -2$  (ج)  $a_1 = 2$  ,  $d = 3$  (د)  $a_1 = 1$  ,  $d = 2$  (هـ)  $a_1 = 4$  ,  $d = -2$  (و)  $a_1 = -1$  ,  $d = 1$  (ز)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ح)  $a_1 = 2$  ,  $d = -3$  (ط)  $a_1 = -3$  ,  $d = 4$  (ي)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ث)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ج) 750 شاقلاً.

(19) (أ)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ب)  $a_1 = 2$  ,  $d = -2$  (ج)  $a_1 = 2$  ,  $d = 3$  (د)  $a_1 = 1$  ,  $d = 2$  (هـ)  $a_1 = 4$  ,  $d = -2$  (و)  $a_1 = -1$  ,  $d = 1$  (ز)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ح)  $a_1 = 2$  ,  $d = -3$  (ط)  $a_1 = -3$  ,  $d = 4$  (ي)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ث)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ج) 750 شاقلاً.

(20) (أ)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ب)  $a_1 = 2$  ,  $d = -2$  (ج)  $a_1 = 2$  ,  $d = 3$  (د)  $a_1 = 1$  ,  $d = 2$  (هـ)  $a_1 = 4$  ,  $d = -2$  (و)  $a_1 = -1$  ,  $d = 1$  (ز)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ح)  $a_1 = 2$  ,  $d = -3$  (ط)  $a_1 = -3$  ,  $d = 4$  (ي)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ث)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ج) 750 شاقلاً.

(21) (أ)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ب)  $a_1 = 2$  ,  $d = -2$  (ج)  $a_1 = 2$  ,  $d = 3$  (د)  $a_1 = 1$  ,  $d = 2$  (هـ)  $a_1 = 4$  ,  $d = -2$  (و)  $a_1 = -1$  ,  $d = 1$  (ز)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ح)  $a_1 = 2$  ,  $d = -3$  (ط)  $a_1 = -3$  ,  $d = 4$  (ي)  $a_1 = 17$  ,  $d = 3$  (ث)  $a_1 = 5$  ,  $d = -3$  (ج) 750 شاقلاً.





**מאל מולול**

מעפא מוואלל:  $4x^2 - x$  ,  $4x + x^2$  ,  $2x + 3$  .  
 גדווא באלנסב לאלל קלמ  $x$  , המוואלל הל מוואלל חסאבלל.

**הלל:**

נסמך המאכלל בלל חדל אוסמ כל מוואלל חסאבלל הל מעדל חסאבלל לחדלל המגורלל לה  
 (דלל אלל קבלל ודלל אלל בעדל).

$$4x + x^2 = \frac{2x + 3 + 4x^2 - x}{2}$$

נחלל עלל המסווא:

$$0 = 2x^2 - 7x + 3$$

בעד הלסלל, נחלל עלל המעאלל הלרלללל:

$$. x_2 = \frac{1}{2} , x_1 = 3$$

לדלל המעאלל הלרלללל, נחלל עלל:  $x_1 = 3$  ,  $x_2 = \frac{1}{2}$  .

באלנסב ל  $x_1 = 3$  , נחלל עלל המוואלל חסאבלל  $9, 21, 33$  (אלל כללל  $d = 12$ ).

באלנסב ל  $x_2 = \frac{1}{2}$  , נחלל עלל המוואלל חסאבלל  $4, \frac{9}{4}, \frac{1}{2}$  (אלל כללל  $d = -\frac{7}{4}$ ).

**מארלל לעמל הדלל**

ברללל בלל מוואלל מערפל בחסב המכל, הל מוואלל חסאבלל / ללסט מוואלל חסאבלל

(1) מעפל כלל וחדל מל בנוד הללל חדל לעמל מוואלל.

ברללל בלל מוואלל הל מוואלל חסאבלל, וגדווא פרקלל חדל אוול כלל.

$$a_n = 3n - 10 \quad (א) \quad a_n = -5n + 4 \quad (ב) \quad a_n = \frac{1}{2}(1 - n) \quad (ג)$$

$$a_n = 8 - n \quad (ד) \quad a_n = -15 - 4n \quad (ה) \quad a_n = \frac{1}{3}(-5 + 7n) \quad (ו)$$

(2) מעפל כלל וחדל מל בנוד הללל חדל לעמל מוואלל.

ברללל בלל מוואלל הל ללסט מוואלל חסאבלל.

$$a_n = n^2 \quad (א) \quad a_n = n^2 - 3 \quad (ב) \quad a_n = 2n - n^2 \quad (ג)$$

(3) מעפא מוואלל:  $16x^2 - 18x + 5$  ,  $4x^2 + 4x - 3$  ,  $4x + 1$  .

גדווא באלנסב לאלל קלמ  $x$  , המוואלל הל מוואלל חסאבלל.

**אגובל נלללל**

$$(1) \quad (א) \quad d = 3 \quad \text{ו} \quad a_1 = -7 \quad (ב) \quad d = -5 \quad \text{ו} \quad a_1 = -1 \quad (ג) \quad d = -0.5 \quad \text{ו} \quad a_1 = 0$$

$$(ד) \quad d = -1 \quad \text{ו} \quad a_1 = 7 \quad (ה) \quad d = -4 \quad \text{ו} \quad a_1 = -19 \quad (ו) \quad d = 2\frac{1}{3} \quad \text{ו} \quad a_1 = \frac{2}{3}$$

(2) אפכסו מע המעלל כלל الصل.

$$(3) \quad x_2 = 0.75 , x_1 = 2$$

#### 4. تمثيل متوالية حسابية حسب دستورٍ تراجعيّ

بحسب تعريف المتوالية الحسابية، لكل  $n$  طبيعيّ يتحقّق:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (d \text{ مقدارٌ ثابت})$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

ولذا تتحقّق أيضًا العلاقة:

هذه العلاقة، بإضافة حدّ معطى أيًا كان، تُشكل تعريفًا (أو تمثيلًا) لمتوالية حسابية بواسطة دستورٍ تراجعيّ.

#### مثال:

$$\begin{cases} a_1 = 11 \\ a_{n+1} = a_n - 5 \end{cases} \quad \text{طبيعيّ بواسطة الدستور التراجعيّ:}$$

في هذه المتوالية الفرق يساوي  $-5$  ( $d = -5$ ).

#### إنتقال من تمثيل متوالية حسابية حسب المكان إلى تمثيل بواسطة دستورٍ تراجعيّ

كي ننقل من تمثيل متوالية حسابية حسب المكان إلى تمثيل بواسطة دستورٍ تراجعيّ، يجب أن نجد  $a_1$  و  $d$ .

#### مثال:

معطاة متوالية حسابية معرّفة بحسب المكان:  $a_n = 7 + 5n$ .

جدوا تمثيلًا للمتوالية الحسابية بحسب دستورٍ تراجعيّ.

#### الحل:

$$n=1 \text{ في الحد العام } : a_1 = 7 + 5 \cdot 1 = 12$$

$$n=2 \text{ : } a_2 = 7 + 5 \cdot 2 = 17$$

$$d = a_2 - a_1 = 17 - 12 = 5 \quad \text{أي:}$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases} \quad \text{تمثيل المتوالية الحسابية بواسطة دستورٍ تراجعيّ لكل } n \text{ طبيعيّ هو:}$$

#### إنتقال من تمثيل متوالية حسابية بواسطة دستورٍ تراجعيّ إلى تمثيل بحسب المكان

كي ننقل من تمثيل متوالية حسابية حسب دستورٍ تراجعيّ إلى تمثيل بحسب المكان، يجب أن نجد  $a_1$  و  $d$ ، ونعوّض قيمتهما

في قانون الحدّ العامّ للمتوالية الحسابية  $a_n = a_1 + (n-1)d$ .

#### مثال:

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + 7 \end{cases} \quad \text{طبيعيّ بواسطة الدستور التراجعيّ:}$$

(أ) برهنوا أنّ المتوالية هي متوالية حسابية.

(ب) جدوا تمثيلًا للمتوالية الحسابية بحسب المكان.

#### الحل:

(أ) نستعمل "قانون الانتقال"، المعطى في السطر الثاني للدستور التراجعيّ:

$$a_{n+1} = a_n + 7$$

$$a_{n+1} - a_n = 7$$

نطرح  $a_n$  من الطرفين ونحصل على:

الفرق بين كلّ حدّين متتاليين في المتوالية هو مقدارٌ ثابت  $(7)$ ، ولذا، المتوالية هي متوالية حسابية،

وفرقتها  $d = 7$ .

(ب) معطى في السطر الأول في الدستور التراجعيّ:  $a_1 = -3$ .

نعوّض قيمتي  $a_1$  و  $d$  في قانون الحدّ العامّ للمتوالية الحسابية:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

ونحصل على تمثيل  $a_n$  حسب المكان:  $a_n = -3 + (n-1) \cdot 7 = -3 + 7n - 7 = 7n - 10 \Rightarrow a_n = 7n - 10$

## أمثلة إضافية محلولة

$$(1) \begin{cases} a_4 = -6 \\ a_{n+1} = a_n - 4 \end{cases}$$

معطاة متوואللة معرففة لكل  $n$  طبللعل بواسله الالالور الالعلل: وءوا العلبلر الءهال العام.

**الءل:**

$$a_{n+1} = a_n - 4 \quad \text{حسب المعطى:}$$

$$a_{n+1} - a_n = -4 \quad \text{نحصل على:}$$

أل أن الالاللة الال الاملنا هل موالللة حسابيل، لأن الفرق بلل كل زوج من الءوا الالالور هو مءار الال:

$$a_{n+1} - a_n = d = -4$$

كل نء العلبلر للء العام للالاللة، بلل أن نء الء الأول للالاللة.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{نسللن بلالون الء العام للالاللة الحسابيل:}$$

$$-6 = a_1 + (4-1) \cdot (-4) \quad \text{نعوض } n=4, a_4 = -6, d = -4, \text{ ونحصل على:}$$

$$a_1 = -6 + 12 = 6 \quad \text{من الء المعاللة، نحصل على:}$$

$$a_n = 6 + (n-1) \cdot (-4) \Rightarrow a_n = -4n + 10 \quad \text{أل أن الء العام للالاللة هو:}$$

**ءواب:** الء العام للالاللة هو  $a_n = -4n + 10$ .

$$(2) \begin{cases} a_1 = 3, a_2 = 7 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \end{cases}$$

معطاة متوואللة معرففة حسب الالالور الالعلل لكل  $n$  طبللعل أكبر من 1:

$$(أ) \text{ بللنوا أنه الالعلل } a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}.$$

(ب) برهنوا أن الالاللة المعطاة هل موالللة حسابيل.

(ء) ءوا العلبلر الءهال العام.

**الءل:**

$$(أ) \text{ نعوض } n=2 \text{ في "الالون الالالال": } a_3 = 2a_2 - a_1 \Rightarrow a_3 + a_1 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

(ب) **الءكلل:** كل نبلرهن أن موالللة هل حسابيل، ءبب أن نبلرهن أن كل ءل في الالاللة (ءا الء الأول)

هو المعدل الحسابيل للءلن المءاورلن له.

في البنء (أ)، بللنا بأن هءه الالاللة صءللة فقط بالاللة للء الالالل.

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \quad \text{نلمن في المساواة:}$$

$$a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n \quad \text{نكللها على الال الالال:}$$

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \quad \text{نسللنل أن لكل } n \text{ طبللعل أكبر من 1 الالعلل أبلال:}$$

$$\text{مفهوم المساواة } a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \text{ هو أن كل ءل في الالاللة (ءا الءلن الأول والالالل)،}$$

هو المعدل الحسابيل للء الءل قبله وللء الءل بعءه.

الالاللة الال الالعلل هءه الالاللة هل موالللة حسابيل (أنلروا المالاظهة في الصلءة 297).

$$(ء) \text{ نحسب فرق الالاللة بواسله: } d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$$

حسب المعطى  $a_1 = 3$  بللننا كءابة العلبلر للء العام للالاللة:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1 \Rightarrow a_n = 4n - 1$$

**ءواب:** الء العام للالاللة هو  $a_n = 4n - 1$ .

### تمارين للعمل الذاتي

انتقال من تمثيل متواليه حسب المكان إلى تمثيلها حسب دستورٍ تراجعيّ وعلى العكس

(1) انتقلوا من تمثيل المتواليه حسب المكان إلى تمثيلها حسب دستورٍ تراجعيّ.

$$a_n = 3n - 8 \quad (أ) \quad a_n = -4n + 17 \quad (ب) \quad a_n = 6n \quad (ج)$$

(2) انتقلوا من تمثيل المتواليه حسب دستورٍ تراجعيّ إلى تمثيلها حسب المكان (عبروا عن  $a_n$  بواسطة  $n$ ).

$$\begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_1 = -19 & (ج) \\ a_{n+1} = a_n + 8 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_1 = 1 & (ب) \\ a_{n+1} = a_n - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_1 = 2 & (أ) \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases}$$

تعريف متواليه بواسطة دستورٍ تراجعيّ.

في كل واحد من التمارين (3) - (8)، معطاه متواليه معرفه بواسطة دستورٍ تراجعيّ.

حددوا هل المتواليه هي متواليه حسابيه، وفي الحالات التي فيها المتواليه حسابيه،

اكتبوا تعبيراً لحدّها العام  $a_n$ .

$$\begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_1 = -3 & (5) \\ a_{n+1} = a_n - n \end{cases} \quad \begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_1 = 9 & (4) \\ a_{n+1} = a_n - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_1 = -4 & (3) \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_5 = 4 & (8) \\ a_{n+1} = a_n + n^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_5 = -2 & (7) \\ a_{n+1} = a_n + 7 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_3 = 5 & (6) \\ a_{n+1} = a_n - 4 \end{cases}$$

### أجوبة نهائيه

$$\begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_1 = 6 & (ج) \\ a_{n+1} = a_n + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_1 = 13 & (ب) \\ a_{n+1} = a_n - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{لكل } n \\ \text{طبيعي} \end{cases} \begin{cases} a_1 = -5 & (أ) \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$a_n = 8n - 27 \quad (ج) \quad a_n = -3n + 4 \quad (ب) \quad a_n = 5n - 3 \quad (أ) \quad (2)$$

$$\text{المتواليه ليست حسابيه.} \quad (5) \quad a_n = -6n + 15 \quad (4) \quad a_n = 5n - 9 \quad (3)$$

$$\text{المتواليه ليست حسابيه.} \quad (8) \quad a_n = 7n - 37 \quad (7) \quad a_n = -4n + 17 \quad (6)$$

## ב. المتوالية الحسابية – أسئلة في موضوع الحد العام

### أمثلة محلولة

ثلاثة حدود متتالية في متوالية حسابية

(1) الأعداد  $-8, b, a$  تُشكّل متوالية حسابية واحدة.

الأعداد  $-8, b+3, 2a$  تُشكّل متوالية حسابية أخرى.

احسبوا قيمة  $a$  وقيمة  $b$ .

**الحل:**

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = d$$

في المتوالية الحسابية يتحقق:

نحصل على هيئة المعادلات:

$$\begin{cases} b - a = -8 - b \\ b + 3 - 2a = -8 - (b + 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + 2b = -8 \\ b + 3 - 2a = -8 - b - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + 2b = -8 \\ -2a + 2b = -14 \end{cases}$$

$$a = 6$$

نعوّض  $a = 6$  في المعادلة  $-a + 2b = -8$ ، ونحصل على:  $-6 + 2b = -8 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$

**فحص:**  $a, b, -8$

متوالية حسابية، فيها  $d = -7$  ✓

$6, -1, -8$

$2a, b + 3, -8$

متوالية حسابية، فيها  $d = -10$  ✓

$12, 2, -8$

(2) مجموع ثلاثة حدود متتالية  $a_1, a_2, a_3$  في متوالية حسابية تنازلية هو 21.

(أ) جدوا قيمة  $a_2$ .

مجموع مربعات الحدود الثلاثة المتتالية هو 219.

(ب) جدوا الحدود الثلاثة المتتالية.

**الحل:**

(أ) نرمز:  $a_2 = x$ .

بما أن  $a_1, a_2, a_3$  هي ثلاثة حدود متتالية في متوالية حسابية، يتحقق:

$$a_1 = a_2 - d = x - d$$

$$a_3 = a_2 + d = x + d$$

$$(x - d) + x + (x + d) = 21 \quad \text{معطى أنّ مجموع الحدود هو 21، ولذا:}$$

$$3x = 21 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow a_2 = 7$$

(ب) في البند (أ) وجدنا أنّ  $a_2 = 7$ ، ولذا، نرمز إلى الحدود  $a_1, a_2, a_3$

$$\begin{matrix} a_1 & , & a_2 & , & a_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix}$$

على النحو التالي:  $(7 - d), 7, 7 + d$  (فرق المتوالية الحسابية)

استناداً إلى المعطى بأن مجموع مربعات الحدود الثلاثة المتتالية هو 219، نحصل على المعادلة:

$$(7 - d)^2 + 7^2 + (7 + d)^2 = 219$$

يتبع في الصفحة التالية <<<

$$49 - 14d + d^2 + 49 + 49 + 14d + d^2 = 219$$

$$2d^2 + 147 = 219$$

$$2d^2 = 72 \quad / :2$$

$$d^2 = 36 \Rightarrow d_1 = 6, d_2 = -6$$

בما أنه معطى بأن المتوالية الحسابية هي تنازلية، فلا نقبل الحل  $d_1 = 6$ ،  
والفرق الملائم لمعطيات السؤال هو  $d = -6$ .  
لذا، الحدود الثلاثة المتتالية المطلوبة هي:  $a_1 = 13, a_2 = 7, a_3 = 1$ .

(3) مجموع الحدود الثلاثة الأولى في متوالية حسابية تصاعدية هو 39.

(أ) جدوا قيمة الحد الثاني في المتوالية.

حاصل ضرب الحدود الثلاثة هو 1,989.

(ب) جدوا الحدود الثلاثة.

**الحل:**

(أ) نرمز إلى الحدود الثلاثة على النحو التالي:  $a_2 - d, a_2, a_2 + d$ .

$$a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 39 \Rightarrow 3a_2 = 39 \Rightarrow a_2 = 13$$

(ب) وجدنا في البند (أ) بأن  $a_2 = 13$ ، لذا، الحدود الثلاثة هي:

$$13 - d, 13, 13 + d$$

$$(13 - d) \cdot 13 \cdot (13 + d) = 1,989 \quad / :13$$

$$(13 - d)(13 + d) = 153 \Rightarrow 169 - d^2 = 153 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d_1 = 4, d_2 = -4$$

بما أنه معطى بأن المتوالية تصاعدية فإن:  $d = 4$ ، والحدود الثلاثة هي: 9, 13, 17.

قسمة بدون باقي في متوالية حسابية

(4) (أ) جدوا كم عدداً طبيعياً يوجد بين 300 و 800، ينقسم على 7 بدون باقي.

(ب) من بين الأعداد التي وجدتموها في البند (أ)، كم عدد الأعداد الزوجية وكم عدد الأعداد الفردية؟

**الحل:**

$$(أ) \text{ بما أن } \frac{300}{7} = 42 \frac{6}{7}, \text{ نستنتج أن العدد الطبيعي الأصغر الذي يقع بين 300 و 800،}$$

$$\text{وينقسم على 7 بدون باقي هو } 7 \cdot 43 = 301.$$

$$\text{بما أن } \frac{800}{7} = 114 \frac{2}{7}, \text{ نستنتج أن العدد الطبيعي الأكبر الذي يقع بين 300 و 800،}$$

$$\text{وينقسم على 7 بدون باقي هو } 7 \cdot 114 = 798.$$

بعد العدد 301، كل عدد طبيعي سابع، يقبل القسمة على 7 بدون باقي، ولذا، يمكن كتابة كل الأعداد

الطبيعية الواقعة بين 300 و 800، والتي تنقسم على 7 بدون باقي، كمتوالية حسابية على النحو التالي:

$$798, \dots, 322, 315, 308, 301. \text{ في هذه المتوالية } a_1 = 301, d = 7, a_n = 798.$$

يدل  $n$  على مكان الحد الأخير (798) في المتوالية، وبدلاً أيضاً على عدد حدود المتوالية.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{نستعين بقانون الحد العام للمتوالية الحسابية:}$$

$$798 = 301 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow 798 = 301 + 7n - 7 \Rightarrow 504 = 7n \Rightarrow n = 72$$

أي أنه هناك 72 عدداً طبيعياً تقع بين 300 و 800 وتنقسم على 7 بدون باقي.

يتبع في الصفحة التالية <<<

(ب) في المتوالية الحسابية  $301, 308, 315, 322, \dots, 798$  جميع الأعداد الموجودة في الأماكن الزوجية  $a_2, a_4, a_6, \dots$  هي أعداد زوجية، وجميع الأعداد الموجودة في الأماكن الفردية  $a_1, a_3, a_5, \dots$  هي أعداد فردية، نستنتج أن نصف الـ 72 عددًا، التي وجدناها في البند (أ)، أي، 36 عددًا، هي أعداد زوجية (الأول من بينها هو  $a_2 = 308$ ، والأخير من بينها هو  $a_{72} = 798$ )، ونصفها الآخر أي 36 عددًا، هي أعداد فردية (الأول من بينها هو  $a_1 = 301$  والأخير من بينها هو  $a_{71} = 791$ ).

### مهمة: حدود في أماكن زوجية وحدود في أماكن فردية في متوالية حسابية



معطاة المتوالية الحسابية:  $2, 5, 8, 11, 14, \dots$ .

(أ) برهنوا أن حدود المتوالية الواقعة في الأماكن الفردية، تشكل متوالية حسابية، واكتبوا ما هو فرقها.

(ب) برهنوا أن حدود المتوالية الواقعة في الأماكن الزوجية، تشكل متوالية حسابية، واكتبوا ما هو فرقها.

معطاة المتوالية الحسابية  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_n$  ومعطى أن فرقها هو  $d$ .

(ج) برهنوا أن حدود المتوالية الواقعة في الأماكن الفردية، تشكل متوالية حسابية، وعبروا بدلالة  $a_1$  و  $d$  (عند الحاجة) عن فرق هذه المتوالية وعن حدّها العام.

(د) برهنوا أن حدود المتوالية الواقعة في الأماكن الزوجية، تشكل متوالية حسابية، وعبروا بدلالة  $a_1$  و  $d$  (عند الحاجة) عن فرق هذه المتوالية وعن حدّها العام.

### بناء متوالية جديدة من متوالية معطاة

(5) معطاة متوالية حسابية نهائية:  $37, 34, 31, \dots, -227$ .

(أ) جدوا كم حدًا موجبًا يوجد في هذه المتوالية.

(ب)  $(i)$  برهنوا أن العدد  $0$ ، ليس حدًا في المتوالية.

$(ii)$  جدوا كم حدًا سالبًا يوجد في المتوالية.

معطاة متوالية جديدة، مركبة من الحدود التي تقع في الأماكن الزوجية للمتوالية الحسابية المعطاة.

(ج) اشرحوا لماذا المتوالية الجديدة هي متوالية حسابية.

(د) جدوا الحد الأول في المتوالية الجديدة وفرقها.

(هـ) جدوا كم حدًا يوجد في هذه المتوالية.

### الحل:

$$(أ) \quad d = a_2 - a_1 = 34 - 37 = -3, \quad a_1 = 37$$

نجد الحد العام  $a_n$  :

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 37 + (n-1) \cdot (-3) = 37 - 3n + 3 = 40 - 3n \Rightarrow a_n = 40 - 3n$$

$$40 - 3n > 0$$

الحدود الموجبة تُحقق  $a_n > 0$ ، أي:

$$-3n > -40 \quad / : (-3) \Rightarrow n < 13\frac{1}{3}$$

حل المتباينة:

بما أن  $n$  هو عدد طبيعي، نستنتج أنه يوجد في هذه المتوالية 13 حدًا موجبًا

(الحدود  $a_1, a_2, \dots, a_{13}$  هي حدود موجبة).

يتبع في الصفحة التالية <<<

(ב) (i) נעוץ  $a_n = 0$  في قانون الحد العام ،  $a_n = 40 - 3n$

ونحصل على:  $0 = 40 - 3n \Rightarrow 3n = 40$

أي:  $n = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$

بما أن المكان  $n$  هو عدد طبيعي، نستنتج أنه لا يوجد في المتوالية حد قيمته 0 .

(ii) نجد مكان الحد الأخير (المساوي لـ -227) .

نعوץ  $a_n = -227$  في قانون الحد العام:

ونحصل على:

$$a_n = 40 - 3n$$

$$-227 = 40 - 3n$$

$$3n = 267 \quad / :3$$

$$n = 89$$

يوجد في هذه المتوالية 89 حدًا، ووجدنا في البند (أ)، أن 13 حدًا من بينها هي حدود موجبة.  
بحسب البند (ب) (i)، لا يوجد في المتوالية حد قيمته 0، ولذا يوجد في المتوالية 76 حدًا سالبًا  
(  $76 = 89 - 13$  ).

(ج)+(د)

حدود المتوالية الحسابية المعطاة:  $37, 34, 31, 28, 25, 22, \dots, -224, -227$

نكتب حدود المتوالية الجديدة في سطر:

بما أن الفرق بين كل حدتين متتاليتين في المتوالية الجديدة يساوي ضعف فرق المتوالية الحسابية

المعطاة، أي  $-6 = (-3) \cdot 2$ ، فإن الفرق هو مقدار ثابت، ولذا، المتوالية الجديدة هي متوالية حسابية وفرقها يساوي -6، والحد الأول فيها هو 34 .

(هـ) وجدنا في البند (ب) (ii)، أن في المتوالية الأصلية يوجد 89 حدًا.

من بينها يوجد 45 حدًا في الأماكن الفردية، و 44 حدًا في الأماكن الزوجية.

أي أن في المتوالية الجديدة يوجد 44 حدًا.

**ملاحظة:** إذا علم أن في متوالية نهائية يوجد عدد زوجي من الحدود، يمكننا الإشارة إلى عدد الحدود بـ  $2n$ ،

بحيث  $n$  هو عدد طبيعي، وعندها يكون الحد الأخير  $a_{2n}$ .

في هذه الحالة، يكون في المتوالية  $n$  حدود في الأماكن الفردية و  $n$  حدود في الأماكن الزوجية.

إذا علم أن في متوالية نهائية يوجد عدد فردي من الحدود، يمكننا الإشارة إلى عدد حدود المتوالية بواسطة إحدى الطريقتين:

(i)  $2n - 1$ ، بحيث  $n$  هو عدد طبيعي، وعندها يكون الحد الأخير  $a_{2n-1}$ .

في هذه الحالة يكون في المتوالية  $n$  حدود في الأماكن الفردية و  $(n - 1)$  حدود

في الأماكن الزوجية.

(ii)  $2n + 1$ ، بحيث  $n$  هو عدد طبيعي، وعندها يكون الحد الأخير  $a_{2n+1}$ .

في هذه الحالة يكون في المتوالية  $(n + 1)$  حدود في الأماكن الفردية، و  $n$  حدود

في الأماكن الزوجية.

### מוואלל ללעלל לללל

חל עאם לל מוואלל חסבלל – מואלל אסאלל

(1) לל מוואלל חסבלל נהללל, עכל חלוכלא  $n$ , מעל אן:  $a_1 = 3$ ,  $d = 7$ ,  $a_n = 59$ .  
כלו עכל חלוכלא מוואלל  $n$ .

(2) לל מוואלל חסבלל נהללל, עכל חלוכלא  $n$ , מעל אן:  $a_1 = -5$ ,  $d = -4$ ,  $a_n = -73$ .  
כלו עכל חלוכלא מוואלל  $n$ .

(3) מעלל מוואלל חסבלל 100, ..., 16, 9, 2. כלו מלן חל אחר לל מוואלל.

(4) לל כלול אמלמ, מעלל מוואלל חסבלל. כלו מל חלל לולל לל הל מוואלל.

24	$a_1$
21	$a_2$
18	$a_3$
	.
	.
	.
-87	$a_n$

(5) לל מוואלל חסבלל ..., -1, 5, 11 לולל 29 חלל. כלו ללל חלל מוואלל.

(6) מלל אול חלל לל מוואלל חסבלל הל -16.  
מלל חלל לולל לל מללל לל 3 ול 4 לל מוואלל הל -32.  
(א) כלו חלל אול ולל מוואלל.  
(ב) כלו מל חלל לולל לל מוואלל, לל עלל אן חלל אחר הל -78.

(7) לל מוואלל חסבלל לוועלל, חלל לוול חלל לוועלל לל חלל לוועלל לל 245.

מעל:  $a_9 = 5 \cdot a_2$ .

(א) לללל לללל לללל:  $5 \cdot a_2 \cdot a_2 = 245$ .

(ב) כלו  $a_2$ .

(ג) כלו  $a_9$ .

(ד) כלו  $a_1$  ו  $d$ .

(ה) כלו ללל חלל ללל לל מלן לל 16 לל מוואלל.

(8) ללל עכללל 13 ו  $44\frac{1}{2}$  ללל ללל לוועלל אעלל,

חלל לוועלל חלוכלא עשולל כללל, מוואלל חסבלל לוועלל.

כלו ולל מוואלל לוועלל.

(9) כלו מל עכלל ללל ללל לל 22 ו 62, מל לוועלל מוואלל חסבלל,

וללל לל 4.



$$(18) \begin{cases} 2a_2 + 3a_3 = 25 \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases}$$

מפלא מוואלל מפרל לכל  $n$  מפפלל בואספל אלסור אלראפל:  $a_n$  .  
ברנוא אן המוואלל חסابلל, ופלוא מפפלל לחדהא המל  $a_n$  .

אללה חפול מפאללל فל מוואלל חסابلל

(19) מלמול חפול המללל המאללל  $a_1, a_2, a_3$  فل מוואלל חסابلל מללללל هو 12 .  
(א) فلوא قلمة  $a_2$  .

מעפל אן حاصل ضرب الحفول الملالل هذه هو -36 .

(ب) فلوא الحفول الملالل.

(20) الأعداء  $a, 11, b$  تُشكل مוואلל حسابلل واحفة.

الأعداء  $3a, 11, b-6$  تُشكل مוואلל حسابلل أفرل.

فلوا قلمة  $a$  وقلمة  $b$  .

(21) فل المוואلل الحسابلل اللل فرقلها  $d$  , فوفا الملالل حفول. الحل الأول فل المוואلل هو 4 .

نضرب الحل الأول بـ 5 , والحل اللل بـ 3.5 , والحل الملال بـ 3 ,

ونملل مוואلل حسابلل فففة.

(أ) إشرحوالماذا  $12 + 6d, 14 + 3.5d, 20$  هل الحفول الملالل الأولى فل المוואلل الحسابلل الفففة.

(ب) فلوا فرق المוואلل الحسابلل المعطاة.

(ج) فلوا فرق المוואلل الحسابلل الفففة.

فل كل واحد من المملللل (22) – (23) معطاة الملالل حفول מפאלل فل مוואلل حسابلل.

فل كل مملل, عللم أن فلوال قلمة  $x$  وقلم الحفول فل كل مוואلل.

$$(22) \quad 5x - x^2, 2x^2 - 3x - 1, 3x^2 - 8x$$

$$(23) \quad 2x + 1, x^2 + 2x - 3, 4x^2 - 9x + 5$$

قسمة بدون باق فل مוואلل حسابلل

(24) فلوال كم عفاً מפפלلاً فقل ببل 150 و 799 , فلقسم على 4 بدون باق.

(25) (أ) فلوال كم عفاً מפפלلاً فقل ببل 200 و 700 فلقسم على 9 بدون باق.

(ب) من ببل الأعداء اللل ولفلموها فل البمل (أ), كم من ببلها هل أعاال زولللة وكم هل أعاال فرللل؟

(26) كم عفاً מפפלلاً المزلل لا فلقسم على 13 بدون باق؟

(27) كم عفاً מפפלلاً المزلل فلقسم أفضاً على 3 وأفضاً على 7 بدون باق؟

(28) גדוה כמ עדה תנאל מנזלה ینقسם עלل 6 بدون בآل.

بناء موالية جديدة من موالية معطاة

(29) معطاة موالية حسابية نهائية:  $-137, \dots, 178, 185, 192$ .

(أ) عبروا عن الحد العام في المتوالية  $a_n$ ، بدلالة  $n$ .

(ب) גדوה כم حده موجهآ یوجد في المتوالية.

(ج) احسبوا قيمة الحد الموجب الأصغر في المتوالية.

(د) גדوה כم حده سالبا یوجد في المتوالية.

$b_n$  هي متوالية جديدة، مركبة من الحدود الواقعة في الأماكن الزوجية في المتوالية الحسابية المعطاة  $a_n$ .

(هـ) اشرحوا لماذا المتوالية  $b_n$  هي متوالية حسابية.

(و) גדوה الحد الأول  $b_1$  وفرق المتوالية  $b_n$ .

(30) في الجدول أمامكم معطاة موالية حسابية نهائية  $a_n$ .

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	...	الحد الأخير
162	158	154	150	146	...	-66

(أ) גדوה כم حده موجهآ یوجد في المتوالية  $a_n$ .

(ب) גדوה כم حده سالبا یوجد في المتوالية  $a_n$ .

$b_n$  هي متوالية جديدة، مركبة من الحدود الواقعة في الأماكن الفردية في المتوالية الحسابية المعطاة  $a_n$ .

(ج) اشرحوا لماذا المتوالية  $b_n$  هي متوالية حسابية.

(د) גדوה الحد الأول  $b_1$  وفرق المتوالية  $b_n$ .

(31) معطاة موالية حسابية نهائية:  $-36, -29, -22, \dots$ . یوجد في المتوالية 54 حده.

(أ) גדوה الحد الأخير في المتوالية.

(ب)  $(i)$  برهنوا أن حدود المتوالية الواقعة في الأماكن الفردية، تشكل متوالية حسابية.

$(ii)$  גדوה الحد الأول، فرق المتوالية وعدد حدود المتوالية الحسابية للحدود الواقعة

في الأماكن الفردية.

(ج)  $(i)$  برهنوا أن حدود المتوالية الواقعة في الأماكن الزوجية، تشكل متوالية حسابية.

$(ii)$  גדوה الحد الأول، فرق المتوالية وعدد حدود المتوالية الحسابية للحدود الواقعة

في الأماكن الزوجية.

لحظة قبل البند الأخير ...

(32)  $a_n$  هي متوالية حسابية نهائية عدد حدودها 101.

معطى:  $2a_2 = 3a_1 = 12$ .

(أ) גדوה الحد الأول في المتوالية وفرق المتوالية.

(ب) بیئوا أن:  $(i) a_1 + a_{101} = 208$   $(ii) a_2 + a_{100} = 208$   $(iii) a_{50} + a_{52} = 208$

نعرف متوالية جديدة على النحو التالي:  $a_{50} + a_{52}, \dots, a_3 + a_{99}, a_2 + a_{100}, a_1 + a_{101}$ .

(ج) اشرحوا لماذا المتوالية الجديدة هي متوالية حسابية ثابتة.

(د) احسبوا مجموع كل الحدود في المتوالية الجديدة.

(هـ)  $(i)$  גדوה  $a_{51}$ .  $(ii)$  ما هو مجموع كل الحدود في المتوالية الأصلية  $a_n$ ؟

أجوبة نهائية

- (1)  $n = 9$  (2)  $n = 18$  (3)  $n = 15$  (4)  $n = 38$  (5)  $a_{29} = -157$
- (6) (أ)  $d = -4$  ,  $a_1 = -6$  (ب) 19 حدًا.
- (7) (أ) إحصوا مع المعلم في الصف. (ب)  $a_2 = 7$  (ج)  $a_9 = 35$  (د)  $d = 4$  ,  $a_1 = 3$  (هـ)  $a_{16} = 63$
- (8)  $d = 3\frac{1}{2}$  (9) تسعة أعداد. (10)  $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 54 + 59 + 64 = 177$
- (11) (أ)  $a_n = 4n - 7$  (ب)  $a_n = 8 - 3n$  (ج)  $a_n = \frac{7}{2}n - \frac{27}{2}$
- (12) (أ)  $d = 4$  ,  $a_1 = -3$  (ب)  $a_{14} = 49$  ,  $a_{13} = 45$
- (13) (أ)  $d = 6$  (ب)  $a_{21} = 64$  ,  $a_{19} = 58$
- (14) 99 حدًا.
- (15) (أ) 23 حدًا.
- (ب) (i)  $a_{23} = -2$  (ii) سيكون هذا الحد تحت المحور  $n$  ، قريب جدًا منه.
- (16)  $a_{30} = 72$
- (17) (أ)  $a_n = 9 + 4n$  (ب)  $b_n = -25 + 6n$
- (ج) في المتوالية الأولى 26 حدًا، وفي المتوالية الثانية 23 حدًا.
- الحد الأخير في كل واحدة من المتوالتين هو 113 .
- (18)  $a_n = 5n - 8$
- (19) (أ)  $a_2 = 4$  (ب)  $-1, 4, 9$
- (20)  $b = 19$  ,  $a = 3$
- (21) (أ) إحصوا مع المعلم في الصف. (ب)  $d = 4$  (ج)  $d = 8$
- (22)  $x = 2$  والمتوالية:  $-4, 1, 6$  أو  $x = -\frac{1}{2}$  والمتوالية:  $4\frac{3}{4}, 1, 2\frac{3}{4}$
- (23)  $x = 4$  والمتوالية:  $33, 21, 9$  أو  $x = 1.5$  والمتوالية:  $0.5, 2.25, 4$
- (24) 162 عددًا.
- (25) (أ) 55 عددًا. (ب) 27 عددًا زوجيًا و 28 عددًا فرديًا.
- (26) 831 عددًا. (27) 43 عددًا. (28) 15 عددًا.
- (29) (أ)  $a_n = 199 - 7n$  (ب) 28 (ج)  $a_{28} = 3$  (د) 20
- (هـ) إحصوا مع المعلم في الصف. (و)  $d = -14$  ,  $b_1 = 185$
- (30) (أ) 41 (ب) 17 (ج) إحصوا مع المعلم في الصف. (د)  $d = -8$  ,  $b_1 = 162$
- (31) (أ)  $a_{54} = 335$
- (ب) (i) إحصوا مع المعلم في الصف. (ii) الحد الأول  $-36$  ، فرق المتوالية 14 ، عدد الحدود 27 .
- (ج) (i) إحصوا مع المعلم في الصف. (ii) الحد الأول  $-29$  ، فرق المتوالية 14 ، عدد الحدود 27 .
- (32) (أ)  $d = 2$  ,  $a_1 = 4$  (ب) إحصوا مع المعلم في الصف. (ج) لأن جميع حدودها متساوية.
- (د) 10,400 (هـ)  $a_{51} = 104$  (ii) 10,504