محتويات الكتاب

مُقدّمة **2-1**

محتويات الكتاب **5-3**

مِفتاح الرّموز **6**

جبر ومقدّمة للتّحليل الرّياضيّ للدوالّ الأُسّيّة واللّوغريثميّة

الفصل 1: قوى وجذور **15-7**

أ. قوانين القوى في الأسس الطّبيعيّة والأسس الصّحيحة 7

ب. الجذر التّربيعيّ، أُسُّ قوّةٍ يساوي نصف 9

ج. جذور من درجاتٍ عالية 11

د. أُسّ قوّةٍ نسبيٌّ 14

الفصل 2: الدّالّة الأسّيّة **28-16**

أ. الوصف البيانيّ للدّالّة الأسّيّة $y=\mathrm{a}^x$ 16

ب. العدد e والدّالّة $y=e^x$ 25

الفصل 3: معادلات أُسّيّة ومتباينات أُسّيّة **35-29**

أ. معادلات أُسّيّة 29

ب. متباينات أُسّيّة 34

الفصل 4: تحويلات على الدّالّة الأُسّيّة **51-36**

الفصل 5: اللّوغريثمات **60-52**

أ. عمليّة اللّوغريثم 52

ب. قوانين اللّوغريثمات 57

الفصل 6: الدّالّة اللّوغريثميّة **65-61**

الفصل 7: معادلات لوغريثميّة ومتباينات لوغريثميّة **76-66**

أ. معادلات لوغريثميّة 66

أ.1 حلّ معادلات لوغريثميّة بسيطة (إستعمال القوانين الأساسيّة) 66

أ.2 حلّ معادلات لوغريثميّة من النّوع $\log_{\mathrm{a}} f(x)=\log_{\mathrm{a}} g(x)$ 68

أ.3 معادلات لوغريثميّة يمكن حلّها بواسطة التّعويض 71

أ.4 حلّ معادلات لوغريثميّة وأُسّيّة بواسطة إخراج لوغريثم من طرفَيّ المعادلة 73

ب. متباينات لوغريثميّة 74

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

الفصل 8: تحويلات على الدّالّة اللّوغريثميّة 77-93

الفصل 9: أسئلة في التّزايد والتّناقص (التّضاؤل)..... 94-134

أ. التّعرّف على عمليّات تزايد وتناقص، حسابات بدون قانون 94

ب. التّعرّف على صيغة القانون الّتي تصف عمليّة أُسّيّة 109

ج. حلّ أسئلة تزايد وتناقص بواسطة استعمال القانون 111

ج.1 حساب الكمّيّتَيْن $f(t)$ أو $f(0)$ 112

ج2 حساب معامل التّزايد / التّناقص q أو النّسبة المئويّة للتّزايد / التّناقص p 114

ج.3 إيجاد قيمة t وحساب أزمنة (بما في ذلك زمن نصف الحياة) 116

د. أسئلة إجمال في موضوع التّزايد والتّناقص 123

حساب التّفاضل والتّكامل للدّوالّ الأُسّيّة واللّوغريثميّة

الفصل 10: حساب التّفاضل للدّالّة $f(x)=e^x$ 135-180

أ. مشتقّة الدّالّة الأسّيّة $f(x)=e^x$ واستعمالاتها لإيجاد معادلة مماسّ 135

ب. استعمالات مشتقّة الدّالّة الأسّيّة $f(x)=e^x$:

النّقاط القُصوى المحلّيّة والمطلقة، مجالات التّصاعد والتّنازل 144

ج. الدّالّة الأسّيّة $f(x)=e^x$: إيجاد خطوط التّقارب للرّسم البيانيّ للدّالّة المُعامدة للمحورَيْن 154

د. البحث في الدّوالّ الأُسّيّة الّتي أساسها e 160

الفصل 11: حساب التّفاضل للدّالّة $f(x)=\ln x$ 181-213

أ. مشتقّة الدّالّة اللّوغريثميّة $f(x)=\ln x$ واستعمالاتها لإيجاد معادلة المماسّ 181

ب. إستعمالات مشتقّة الدّالّة الأسّيّة $f(x)=\ln x$:

النّقاط القصوى المحلّيّة والمطلقة، مجالات التّصاعد والتّنازل 187

ج. الدّالّة اللّوغريثميّة $f(x)=\ln x$: إيجاد خطوط التّقارب للرّسم البيانيّ للدّالّة المُعامدة للمحور x 191

د. البحث في الدّوالّ اللّوغريثميّة الّتي أساسها e 194

الفصل 12: حساب التّكامل للدّوالّ الأسّيّة الّتي تحتوي على تعابير من الصّورة $e^{f(x)}$ 214-239

أ. التّكامل غير المحدود وإيجاد الدّالّة الأصليّة 214

ب. الدّالّة الأسّيّة $e^{f(x)}$: التّكامل المحدود، وحساب مساحاتٍ 220

الفصل 13: حساب التّكامل للدّوالّ الّتي دالّتها الأصليّة هي دالّة لوغريثميّة 240-254

أ. تكاملات تحتوي على دوالّ لوغريثميّة: التّكامل غير المحدود، إيجاد الدّالّة الأصليّة 240

ب. تكاملات تحتوي على دوالّ لوغريثميّة: التّكامل المحدود، حساب مساحاتٍ 245

الفصل 14: تمارين إجمال ومراجعة في حساب التّفاضل والتّكامل للدّوالّ الأسّيّة واللّوغريثميّة..... 255-271

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

المتواليات

الفصل 15: مقدّمة للمتواليات..... 272-283

الفصل 16: المتوالية الحسابيّة 284-334

أ. متوالية حسابيّة بتمثيلاتٍ مختلفة 284

أ.1 التّعرّف على متوالية حسابيّة بتمثيلاتٍ مختلفة: كلاميّ، تسجيل حدود المتوالية (في سطرٍ)، جدول قيم، رسم بيانيّ 286

أ.2 تمثيلٌ رمزيٌّ للمتوالية الحسابيّة بواسطة قانون الحدّ العام (حسب المكان) 290

أ.3 البرهان بأنّ متوالية، معرّفة حسب المكان، هي متوالية حسابيّة / ليست متوالية حسابيّة 296

أ.4 تمثيل متوالية حسابيّة حسب دستورٍ تراجعيّ 299

ب. المتوالية الحسابيّة – أسئلة في موضوع الحدّ العام 302

ج. مجموع n الحدود الأولى في متوالية حسابيّة 311

ج.1 قانون المجموع في المتوالية الحسابيّة 311

ج.2 المتوالية الحسابيّة – العلاقة بين S_n وَ a_n وتمارين إضافيّة في موضوع مجموع الحدود 318

د. ظواهر من الحياة اليوميّة تتصرّف كمتوالية حسابيّة 328

الفصل 17: المتوالية الهندسيّة 335-388

أ. المتوالية الهندسيّة بتمثيلاتٍ مختلفة 335

أ.1 التّعرّف على متوالية هندسيّة بتمثيلاتٍ مختلفة: كلاميّ، تسجيل حدود المتوالية (في سطرٍ)، جدول قيم، رسم بيانيّ 337

أ.2 تمثيلٌ رمزيٌّ للمتوالية الهندسيّة بواسطة قانون الحدّ العام (حسب المكان) 342

أ.3 البرهان بأنّ متوالية، معرّفة حسب المكان، هي متوالية هندسيّة / ليست متوالية هندسيّة..... 352

أ.4 تمثيل متوالية هندسيّة حسب دستورٍ تراجعيّ..... 356

ب. المتوالية الهندسيّة – أسئلة في موضوع الحدّ العام 360

ج. مجموع n الحدود الأولى في متوالية هندسيّة..... 369

د. ظواهر من الحياة اليوميّة تتصرّف كمتوالية هندسيّة..... 383

الفصل 18: متوالية هندسيّة لانهائيّة، مجموعها متقارب. 389-399

أ. التّعرّف على متوالية هندسيّة لانهائيّة مجموعها متقارب، وقانون هذا المجموع 389

ب. أسئلة كلاميّة، تعمل في المتوالية الهندسيّة اللّانهائيّة الّتي مجموعها متقارب.....397

الفصل 19: الدّمج بين متوالية حسابيّة وهندسيّة 400-407

الفصل 20: إجمال ومراجعة في موضوع المتواليات 408-421

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

مِفتاح الرّموز

تذكير: يُقدّم لغرض إنعاش المعرفة السّابقة الّتي تمّ تعلّمُها في فصولٍ سابقة أو في سنواتٍ سابقة.

مَهمّة:

تظهر أثناء دراسة المادّة النّظريّة (عادةً في البداية) لغرض عرض موضوع الفصل.

توضيح مُحوسَب:

تظهر المهمّة أثناء عرض المادّة النّظريّة، وتُتيح البحث مع توضيحٍ للموضوع المُدرَّس واستنتاج النّتائج.

في إطارٍ رماديٍّ مثل هذا، يتمّ عرض مُلخّصاتٍ لقواعد مهمّة حسب الحاجة خلال دراسة المادّة النّظريّة:
قائمة قواعد، تعاريف، قوانين، خطوات الحلّ، وما إلى ذلك.

نظريّات

عرض نظريّات وَ / أو خصائص وصفات تتعلّق بالموضوع المُدرَّس (بحث / اشتقاق / تكامل وما شابه ذلك).

<u>إشارات بجانب تمارين وأسئلة العمل الذّاتيّ</u>

(1) خطٌّ مثل هذا الظّاهر على يمين هذا النّصّ، يظهر على طول مجموعة التّمارين وأسئلة العمل الذّاتيّ.

<u>انتبهوا:</u> تظهر الأجوبة النّهائيّة لأسئلة العمل الذّاتيّ في نهاية كلّ مجموعة تمارين.

أي، لإيجاد الأجوبة النّهائيّة للأسئلة، يجب الوصول إلى نهاية ظهور الخطّ الظّاهر على اليمين.

(2) الأسئلة أو البنود المُشار إليها بِـ ★ هي بدرجة صعوبة أعلى من المعتاد.
★

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

جبر ومقدّمة للتّحليل الرّياضيّ للدّوالّ الأسّيّة واللّوغريثميّة

الفصل 1: قوى وجذور

أ. قوانين القوى في الأُسُس الطّبيعيّة والأُسُس الصّحيحة

تذكير: في ترتيب العمليّات الحسابيّة: العمليّات في **الأقواس** تسبق عمليّات **القوى / الجذور**.
عمليّات **القوى / الجذور** تسبق عمليّات **الضّرب / القسمة**.
عمليّات **الضّرب / القسمة** تسبق عمليّات **الجمع / الطّرح**.

سنقدّم تعريفين يتعلّقان بالقوى، ومن ثمّ قوانين القوى.

- لكلّ عددٍ حقيقيّ a وعددٍ طبيعيّ n نعرّف: **a للقوّة n** هو حاصل الضّرب: $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرّات}}$.

نسمّي العدد a **أساس القوّة**، ونسمّي العدد n **أُسّ القوّة**.

مثال: $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

- لكلّ عددٍ حقيقيّ $a \neq 0$ يتحقّق: $a^0 = 1$ وَ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (0^0 ليس معرّفًا).

قوانين القوى:
(في القوانين المختلفة m وَ n هما عددان **صحيحان**، $a \neq 0$ وَ $b \neq 0$)

$$a^0 = 1 \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (a\cdot b)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$$

على سبيل المثال، نُبيّن أنّه يتحقّق: $(a^m)^n = a^{mn}$ (لكلّ m وَ n طبيعيَّيْن).

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\cdot a^m\cdot a^m\cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ مرّات}} = \underbrace{(\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots\cdot a}_{m \text{ مرّات}})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots\cdot a}_{m \text{ مرّات}})\cdot \ldots \cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots\cdot a}_{m \text{ مرّات}})}_{n \text{ مرّات}} =$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots\cdot a}_{m\cdot n \text{ مرّات}} = a^{mn}$$

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

أمثلة

① $(-2)^4=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=16$

② $-2^4=-(2\cdot2\cdot2\cdot2)=-16$

③ $(-1)^{11}=\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{\text{11 مرّة}}=-1$

④ $(-1)^{22}=\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{\text{22 مرّة}}=1$

⑤ $(-2)^3\cdot(-1)^5=(-8)\cdot(-1)=8$

⑥ $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

⑦ $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{-8}=-\frac{1}{8}$

⑧ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$

⑨ $\frac{(a^5b^2)^3\cdot(a^8b^6)^2}{(a^3)^9\cdot(ab^3)^5}=\frac{a^{15}\cdot b^6\cdot a^{16}\cdot b^{12}}{a^{27}\cdot a^5\cdot b^{15}}=\frac{a^{31}b^{18}}{a^{32}b^{15}}=\frac{b^3}{a}\quad(a,b\neq0)$

⑩ $\left(\frac{a^2}{b^5}\right)^3\cdot\left(\frac{b^4}{a^2}\right)^4=\frac{a^6}{b^{15}}\cdot\frac{b^{16}}{a^8}=\frac{b}{a^2}\quad(a,b\neq0)$

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ

اِحسبوا دون اِستعمال الآلة الحاسبة.

(1) (أ) $(-2)^6=$ (ب) $-2^6=$ (ج) $(-1)^8=$

(د) $-1^8=$ (هـ) $2^{-3}=$ (و) $(-2)^{-2}=$

(ز) $-5^0=$ (ح) $(-0.5)^0=$ (ط) $(0.5)^{-3}=$

(2) بسّطوا التّعابير التّالية ($a,b\neq0$):

(أ) $\frac{a^9\cdot a^{10}\cdot(a^3)^{10}}{(a^{10})^4\cdot(a^2)^3}=$ (ب) $\frac{(a^5)^3\cdot(a^8)^5\cdot(a^2)^2}{(a^7)^3\cdot(a^4)^8\cdot(a^3)^2}=$ (ج) $\frac{(a^3b^2)^6\cdot(ab^4)^3}{(a^5b^6)^4}=$

(د) $\frac{(a^7b^2)^3\cdot(a^5b^8)^2}{(a^4b^3)^5\cdot(a^5b^4)^2}=$ (هـ) $\frac{(a^5b^2)^3\cdot(a^7b^3)^5}{(a^2)^{20}\cdot(ab^2)^{10}}=$ (و) $\frac{(a^{-2})^5\cdot(b^3)^{-3}}{(a^{-3})^4\cdot(b^{-2})^4}=$

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) 64 (ب) -64 (ج) 1 (د) -1 (هـ) $\frac{1}{8}$ (و) $\frac{1}{4}$

(ز) -1 (ح) 1 (ط) 8

(2) (أ) a^3 (ب) 1 (ج) a (د) $\frac{a}{b}$ (هـ) b (و) $\frac{a^2}{b}$

© جميع الحقوق محفوظة لجابي يكوئيل – שבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

ب. الجذر التّربيعيّ، أُسُّ قوّةٍ يساوي نصف

العمليّة العكسيّة للرّفع للقوة الثّانية تُسمّى **إستخراج الجذر التّربيعيّ**.
نُعرّف ما هو الجذر التّربيعيّ (جذر من الدّرجة الثّانية):

الجذر التربيعي لعدد غير سالبٍ معيّن، هو عددٌ غير سالب، إذا قمنا برفعه للقوّة الثّانية (أي رَبَّعناه)، نحصل من جديد على العدد المُعطى.
الجذر التربيعي يُسمَّى أيضًا **جذرًا من الدّرجة الثّانية**.

نرمز إلى **الجذر التّربيعيّ** بالإشارة التّالية: $\sqrt{\ }$.
بالأحرف، نكتب: $\sqrt{a}=b \quad \Rightarrow \quad b^2=a$ $(a\geq 0\ ,\ b\geq 0)$.

في مثل هذه الحالة، نقول، إنّ b **هو الجذر التّربيعيّ للعدد** a .

ملاحظة: من تعريف الجذر التّربيعيّ نحصل أنّه لكلّ عدد غير سالب a ، يتحقّق: $(\sqrt{a})^2=a$.

مثال: $\sqrt{25}=5$

أي: "الجذر التّربيعيّ للعدد 25 هو 5".
شرح: إذا رفعنا العدد 5 للقوّة 2 ، سنحصل على 25 ، $(5^2=25)$.

لقد صادفنا عمليّة الجذر التّربيعي مرّاتٍ عديدة في الماضي، عندما قمنا بحلّ معادلاتٍ تربيعيّة.
نُؤكّد أن قيمة التّعبير $\sqrt{9}$ (على سبيل المثال) هي **العدد الموجب**: 3 ،
بينما في حلّ المعادلة: $x^2=9$ (على سبيل المثال) نحصل على حلّين: $x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$.

انتبهوا: المساواة: $\sqrt{a^8}=a^4$ صحيحة لكلّ a حقيقيّ لأنّ $a^4\geq 0$ وأيضًا $a^8\geq 0$ (ويتحقّق $\left(a^4\right)^2=a^8$).
بينما المعادلة: $\sqrt{a^2}=a$ صحيحة فقط لكلّ a غير سالبٍ (لكلّ $a\geq 0$)،
ولكلّ $a<0$ (a سالب) يتحقّق: $\sqrt{a^2}=-a$.
على سبيل المثال: $\sqrt{(-7)^2}=-(-7)=7$.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

قواعد لحساب جذورٍ تربيعيّة		أمثلة عدديّة
$\sqrt{a^n}=\left(\sqrt{a}\right)^n$	$(a\geq 0\ ,\ n$ صحيح$)$	$\sqrt{100^3}=\left(\sqrt{100}\right)^3=10^3=1{,}000$
$\frac{1}{\sqrt{a^n}}=\frac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^n}=\left(\sqrt{a}\right)^{-n}=\sqrt{a^{-n}}$	$(a>0\ ,\ n$ صحيح$)$	$\frac{1}{\sqrt{4^3}}=\frac{1}{\left(\sqrt{4}\right)^3}=\left(\sqrt{4}\right)^{-3}=\sqrt{4^{-3}}$
$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	$(a\geq 0\ ,\ b\geq 0)$	$\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6$
$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$(a\geq 0\ ,\ b>0)$	$\sqrt{\frac{9}{64}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}}=\frac{3}{8}$

يمكن أيضًا التّعبير عن الجذر التّربيعيّ باستخدام القوى. كقاعدة عامة، عندما راجعنا قوانين القوى، قيّدنا النّقاش للأُسُسِ الصّحيحة فقط (موجبة، سالبة أو صفر)، لكن في الواقع قوانين القوى الّتي تعلّمناها صحيحة لأيّ أُسٍّ حقيقيٍّ (وسنوسّع النّقاش بهذا الموضوع لاحقًا). ومع ذلك، من المُريح جدًّا، التّعبير عن الجذر التّربيعيّ باستخدام القوى (وسيتّضح ذلك بشكلٍ خاصٍّ في إطار دراسة حساب التّفاضل والتّكامل).

من تعريف الجذر التّربيعيّ وباستخدام قوانين القوى، سنرى مثالاً على كيفيّة كتابة الجذر التّربيعيّ باستخدام القوى.

$$\sqrt{81}=9=9^1=9^{2\cdot\frac{1}{2}}=\left(9^2\right)^{\frac{1}{2}}=(81)^{\frac{1}{2}}$$

أي أنّ **الجذر التّربيعيّ** لعددٍ معيّنٍ غير سالبٍ يساوي العدد المعيّن مرفوعًا للقوة **نصف**.

كتابة جذورٍ تربيعيّة بواسطة قوّة نصف		مثال عدديّ
$\sqrt{a}=a^{0.5}$	$(a\geq 0)$	$\sqrt{25}=25^{0.5}$
$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{a^{0.5}}=a^{-0.5}$	$(a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{16^{0.5}}=16^{-0.5}$
$\sqrt{a^n}=a^{\frac{n}{2}}=a^{0.5n}$	$(a\geq 0\ ,\ n$ صحيح$)$	$\sqrt{3^6}=3^{\frac{6}{2}}=3^3$
$\frac{1}{\sqrt{a^n}}=\frac{1}{a^{0.5n}}=a^{-0.5n}$	$(a>0\ ,\ n$ صحيح$)$	$\frac{1}{\sqrt{10^5}}=\frac{1}{10^{\frac{5}{2}}}=10^{-2.5}$

أمثلة

كما ذُكر، فإنّ قوانين القوى الّتي صُغناها للأُسس الصّحيحة تنطبق أيضًا على الأُسُسِ الحقيقيّة عمومًا، وخاصّةً عندما يكون الأساس مساويًا لنصف.

هكذا على سبيل المثال يتحقّق: لكلّ $x\geq 0$:

- $\sqrt{x^7}=x^{0.5\cdot 7}=x^{3.5}=x^3\cdot x^{0.5}=x^3\sqrt{x}$

ولكلّ $x>0$:

- $\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{0.5\cdot 3}}=\frac{1}{x^{1.5}}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^{0.5}}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x\sqrt{x}}$

ولكلّ $x\geq 0$:

- $3x\sqrt{x^5}+2\sqrt{x^7}=3x\sqrt{x^4\cdot x}+2\sqrt{x^6\cdot x}=3x\cdot x^2\sqrt{x}+2x^3\sqrt{x}=3x^3\sqrt{x}+2x^3\sqrt{x}=5x^3\sqrt{x}$

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

تمارين للعمل الذّاتيّ

اِستعينوا بقوانين القوى والجذور الّتي تظهر في الصّفحة السّابقة، وبرهنوا المساواة المعطاة في كلّ واحدٍ من التّمارين **(1)** – **(6)** التّالية، في المجال $x \geq 0$.

(1) $\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$ **(2)** $\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$

(3) $\sqrt{x^9} = x^4\sqrt{x}$ **(4)** $x\sqrt{x^5} = x^3\sqrt{x}$

(5) $2x\sqrt{x^7} = 2x^4\sqrt{x}$ **(6)** $2x\sqrt{x^3} + \sqrt{x^5} = 3x^2\sqrt{x}$

* * *

ج. جذورٌ من درجاتٍ عاليّة

بشكلٍ مُشابهٍ للجذر التّربيعيّ (أي الجذر من الدّرجة الثّانية)، يتمّ أيضًا تعريف الجذر من الدّرجة n.

كتابة جذورٍ من درجةٍ أيًّا كانت n	
معطى العددان الحقيقيّان a وَ b، ومعطى العدد n طبيعيٌّ أكبر من 1. b يُسمَّى جذرًا من الدّرجة n للعدد a، إذا تحقّق أنّ $\mathbf{b^n = a}$، ونرمز بالإشارات الرّياضيّة على النّحو التّالي $\mathbf{b = \sqrt[n]{a}}$ نُميّز بين حالتَيْن:	
بالنّسبة لـ **n زوجيّ،** نعرّف الجذر من الدّرجة n فقط لكلّ $a \geq 0$. لكلّ $b \geq 0$ يتحقّق: $\mathbf{b = \sqrt[n]{a}}$.	**أمثلة عدديّة:** $\sqrt[4]{16} = 2$ 2 هو جذرٌ من الدّرجة الـ 4 للعدد 16 (لأنّ $2^4 = 16$). $\sqrt[6]{729} = 3$ 3 هو جذرٌ من الدّرجة الـ 6 للعدد 729 (لأنّ $3^6 = 729$).
بالنّسبة لـ **n غير زوجيّ،** نُعرّف الجذر من الدّرجة n لكلّ a حقيقيّ. المساواة: $\mathbf{b = \sqrt[n]{a}}$ تتحقّق لكلّ b حقيقيّ.	**أمثلة عدديّة:** $\sqrt[3]{64} = 4$ أي أنّ العدد 4 هو جذرٌ من الدّرجة الـ 3 للعدد 64، (لأنّ $4^3 = 64$) $\sqrt[3]{-125} = -5$ -5 هو جذرٌ من الدّرجة الـ 3 للعدد -125، لأنّ $(-5)^3 = -125$.

اِستنادًا إلى التّعريف أعلاه:

عندما يكون n عددًا فرديًّا، تتحقّق المساواة: $\mathbf{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$ لكلّ a حقيقيّ.

عندما يكون n عددًا زوجيًّا، تتحقّق المساواة: $\mathbf{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$ فقط لكلّ $a \geq 0$.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

القواعد اللّازمة لحساب جذورٍ من درجاتٍ عالية مشابهة للقواعد اللّازمة لحساب الجذور التّربيعيّة الّتي تعلّمناها في البند السّابق.

قواعد لحساب جذور

نُذكّركم: جذرٌ من درجة **زوجيّة** معرّفٌ **فقط** للأعداد غير السّالبة.

قاعدتان لِـ n زوجيّ وموجب:	قاعدتان لِـ n فرديّ وموجب $(n \neq 1)$:
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (a \geq 0 \ , \ b \geq 0)$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (a \geq 0 \ , \ b > 0)$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$

أمثلة محلولة: حساب جذورٍ من درجة عالية

(1) $\sqrt[3]{8} = 2$ لأنّ: $2^3 = 8$. **(2)** $\sqrt[3]{-27} = -3$ لأنّ: $(-3)^3 = -27$.

(3) $\sqrt[4]{81} = 3$ لأنّ: $3^4 = 81$. **(4)** $\sqrt[7]{8} \cdot \sqrt[7]{16} = 2$ لأنّ: $\sqrt[7]{8} \cdot \sqrt[7]{16} = \sqrt[7]{2^3} \cdot \sqrt[7]{2^4} = \sqrt[7]{2^3 \cdot 2^4} = \sqrt[7]{2^7} = 2$.

أمثلة محلولة: تبسيط تعابير جبريّة تحتوي على جذورٍ من درجة عالية

(5) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a^3} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} = a \cdot a = a^2$

(6) $\sqrt[4]{a^{24}} = \sqrt[4]{a^8 \cdot a^8 \cdot a^8} = \sqrt[4]{(a^2)^4} \cdot \sqrt[4]{(a^2)^4} \cdot \sqrt[4]{(a^2)^4} = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6$

أمثلة محلولة: حساب جذورٍ من درجة عالية لحلّ معادلات

(7) حلّ المعادلة $x^3 = 8$ هو $x = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

(8) حلّ المعادلة $x^4 = 81$ هو $x = \pm\left(\sqrt[4]{81}\right) = \pm\left(\sqrt[4]{3^4}\right) = \pm 3$.

يمكننا الاستعانة بالآلة الحاسبة لحساب جذورٍ من درجةٍ عالية، نتائجها ليست أعدادًا نسبيّة.

إذا أُعطِيَ أنّ: $b^z = a$ (عدا الحالات الّتي فيها $a > 0$ وَ $b < 0$)، يتحقّق: $b = \sqrt[z]{a}$

(b هو جذرٌ من الدّرجة z لِـ a)، وبمساعدة الآلة الحاسبة، سنحصل على قيمة عدديّة مُقرّبة.

في بعض الآلات الحاسبة نضغط: **z → SHIFT → $x^{\square}$ → a → =**

وفي آلاتٍ حاسبة أخرى نضغط: **z → SHIFT → ^ → a → =**

استخدام مِفتاحَيّ الآلة الحاسبة: **SHIFT** وَ $x^{\square}$ (أو **SHIFT** وَ **^**) بعد الضّغط على مِفتاح درجة الجذر z، يؤدّي إلى العمليّة المطلوبة $\sqrt[z]{\ }$.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

أمثلة محلولة: إستخدام الآلة الحاسبة لحلّ معادلات

(9) حلّ المعادلة $x^5=10$ هو $x=\sqrt[5]{10}$.
كي نحصل على قيمة التّعبير $\sqrt[5]{10}$ ، نستخدم الآلة الحاسبة على النّحو التّالي:

5 → SHIFT → $x^{\square}$ → 10 → =

ونحصل على الشّاشة على العدد: 1.584893192، ولذا فإنّ حلّ المعادلة هو: $x\approx 1.585$.

(10) حلّ المعادلة $x^6=30$ هو $x=\pm\sqrt[6]{30}$.
كي نحصل على قيمة عدديّة مقرّبة للجذر $\sqrt[6]{30}$ ، نستخدم الآلة الحاسبة على النّحو التّالي:

6 → SHIFT → $x^{\square}$ → 30 → =

ونحصل على الشّاشة على العدد: 1.762734383، ولذا فإنّ حلّ المعادلة هو: $x\approx\pm 1.763$.

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ

حلّوا المعادلات **(1)** – **(8)** التّالية (إستعينوا بالآلة الحاسبة عند الحاجة).

(1) $x^3=64$ **(2)** $x^3=-64$ **(3)** $x^4=625$ **(4)** $x^4=-625$

(5) $x^7=-1$ **(6)** $x^5=-32$ **(7)** $x^3=10$ **(8)** $x^4=18$

أجوبة نهائيّة

(1) $x=4$ **(2)** $x=-4$ **(3)** $x=\pm 5$

(4) لا يوجد حلٌّ حقيقيٌّ. **(5)** $x=-1$ **(6)** $x=-2$

(7) $x=\sqrt[3]{10}\approx 2.154$ **(8)** $x=\pm\sqrt[4]{18}\approx\pm 2.06$

© جميع الحقوق محفوظة لجابي يكوئيل – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

د. أُسٌّ قوّةٍ نسبيٌّ

الصّيغة العامّة: $\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$

حالة خاصّة عندما يكون $m=1$: $\boxed{a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}}$

في الصّيغتَيْن أعلاه: m هو عددٌ صحيح، n هو عددٌ طبيعيٌّ **لا يساوي** 1 ، $a>0$.

اِنتبهوا: توجد جذورٌ من درجةٍ فرديّة للأعداد السّالبة أيضًا، ولكن الكتابة بصورة قوّة أُسُّها عددٌ **نسبيٌّ**، معرّفة **فقط** لكلّ $a>0$.

مثال: التّعبير $\sqrt[3]{x}$ معرّفٌ لكلّ x حقيقيّ، بينما التّعبير $x^{\frac{1}{3}}$ معرّفٌ فقط لكلّ $x>0$.

أمثلة محلولة

(1) نحسب بطريقتَيْن مختلفتَيْن قيمة التّعبير $8^{\frac{1}{3}}$:

(i) $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$

(ii) $8^{\frac{1}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}=2^{3\cdot\frac{1}{3}}=2^1=2$

(2) نحسب بأربع طرقٍ مختلفة قيمة القوّة $9^{\frac{3}{2}}$:

(i) بمساعدة عمليّة الجذر: $9^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt[2]{9}\right)^3=3^3=27$

(ii) بمساعدة عمليّة الجذر: $9^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{9^3}=\sqrt{729}=27$

(iii) بمساعدة قوانين القوى: $9^{\frac{3}{2}}=\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}=3^{2\cdot\frac{3}{2}}=3^3=27$

(iv) بمساعدة قوانين القوى: $9^{\frac{3}{2}}=\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3=3^3=27$

(3) نحسب بأربع طرقٍ مختلفة قيمة القوّة $8^{-\frac{2}{3}}$.

الحلّ:

(i) $8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

(ii) $8^{-\frac{2}{3}}=\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

(iii) $8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64}}=\frac{1}{4}$

(iv) $8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

ملاحظة: لأجل حساب قوى تحتوي على أُسُسٍ نسبيّة، يمكننا الاستعانة بالآلة الحاسبة أيضًا.

على سبيل المثال، كي نجد قيمة القوّة $8^{-\frac{2}{3}}$ ، يمكننا الضّغط في الآلة الحاسبة على النّحو التّالي:

$$8 \rightarrow x^{\square} \rightarrow (\rightarrow - \rightarrow 2 \rightarrow \div \rightarrow 3 \rightarrow) \rightarrow =$$

أو بآلاتٍ حاسبة أخرى:

$$8 \rightarrow x^{\square} \rightarrow (\rightarrow - \rightarrow \frac{\square}{\square} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow) \rightarrow =$$

بهذه الطّريقة، يمكننا بواسطة الآلة الحاسبة حساب جذورٍ من أيّ درجة كانت.

© جميع الحقوق محفوظة لجابي يكوئيل – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(4) اِحسبوا قيمة التّعبير $27^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{-8}$.

الحلّ:

بدايةً، نحسب قيمة كلّ واحدٍ من التّعبيرَيْن على حدة: $27^{\frac{2}{3}}=\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$

$\sqrt[3]{-8}=-2$

بعد أن حسبنا، نحصل على: $27^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{-8}=9-(-2)=\mathbf{11}$

(5) حلّوا المعادلة $x^{\frac{2}{3}}=4$ (**نُذكّركم:** مجال التّعويض هو $x>0$).

الحلّ:

نرفع الطّرفَيْن للقوّة $\frac{3}{2}$ ونحصل على: $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}$

$$x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}=\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad x^1=2^{2\cdot\frac{3}{2}}=2^3 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x=8}$$

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ

اِحسبوا قيم التّعابير في التّمرينَيْن **(1) – (2)** (اِحسبوا دون اِستخدام الآلة الحاسبة).

(1) (أ) $16^{\frac{1}{2}}$ (ب) $16^{-\frac{1}{2}}$ (ج) $27^{\frac{1}{3}}$

(د) $-4^{\frac{1}{2}}$ (هـ) $-9^{-\frac{1}{2}}$ (و) $(-9)^{-\frac{1}{2}}$

(2) (أ) $64^{\frac{2}{3}}$ (ب) $27^{-\frac{2}{3}}$ (ج) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$ (د) $(0.01)^{-\frac{3}{2}}$

(3) حلّوا المعادلات التّالية ($x>0$) .

(أ) $x^{\frac{1}{3}}=2$ (ب) $x^{\frac{2}{3}}=25$ (ج) $x^{-\frac{2}{3}}=4$ (د) $x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{9}$

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) 4 (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) 3 (د) -2 (هـ) $-\frac{1}{3}$ (و) لا معنى له.

(2) (أ) 16 (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) 16 (د) 1,000

(3) (أ) $x=8$ (ب) $x=125$ (ج) $x=\frac{1}{8}$ (د) $x=27$

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

الفصل 2: الدّالّة الأُسّيّة

أ. الوصف البيانيّ للدّالّة الأُسّيّة $y=a^x$

الشّكل العامّ **للدّالّة الأُسّيّة** هو: $y=a^x$ ، بحيث أساس القوّة a هو عددٌ ثابت **موجبٌ لا يساوي 1**، أي: $a>0$ ، $a\neq 1$.

بما أنّ x هو **أُسُّ القوّة**، فإنّ هذه الدّالّة تُسمّى **الدّالّة الأُسّيّة**.

الدّالّة الأسّيّة معرّفة لكلّ x.

إنتبهوا: الدّالّة $y=a^x$ تُعمِّم في الواقع، مفهوم القوّة ليشمل **كلّ أسٍّ حقيقيٍّ**.

أي، يمكننا تعريف قوّةٍ ذات أُسٍّ أيًّا كان وليس فقط نسبيًّا. بكلامٍ آخر يمكن للأسّ أن يكون أيّ عددٍ حقيقيٍّ.

ملاحظات: **(1)** التّعريف المذكور أعلاه هو خارج نطاق المنهج التّعليميّ.

(2) يمكن الاستعانة بالآلة الحاسبة وحساب قوّة ذات أُسٍّ هو أيّ عددٍ كان

(بما في ذلك عددٌ حقيقيٌّ ليس نسبيًّا)،

على سبيل المثال: $2^{\sqrt{3}}=3.321997085$ ، $3^{-\sqrt{5}}=0.085728345$

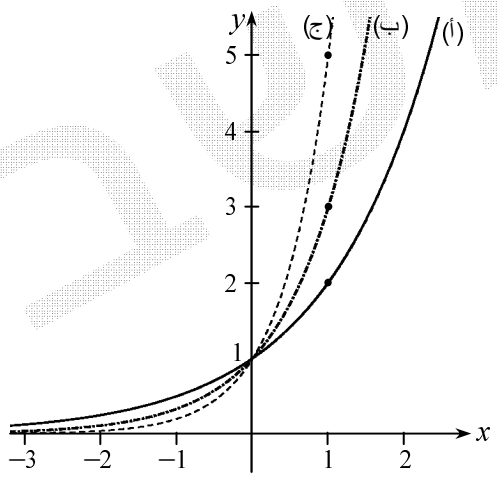
نميّز بين الحالة الّتي فيها $a>1$ وبين الحالة الّتي فيها $0<a<1$.

بالنّسبة للحالة $a>1$:

نرسم في هيئة محاور **واحدة** الرّسوم البيانيّة لثلاث دوالّ مختلفة: (أ) $y=2^x$ (ب) $y=3^x$ (ج) $y=5^x$

نستعين بجدول قيمٍ ونحصل على الرّسوم البيانيّة التّالية:

x	(أ) $y=2^x$	(ب) $y=3^x$	(ج) $y=5^x$
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{125}$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{25}$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
0	1	1	1
1	2	3	5
2	4	9	25



توضيح مُحوسب: مقارنة بين دوالّ أُسّيّة ذوات أساسٍ أكبر من 1

أُدخلوا إلى الموقع www.mishbetzet.co.il ← 4 وحدات تعليميّة ← الصّفّ الثّاني عشر ← فعّاليات محوسبة تتبع لهذا الكتاب ← اِضغطوا على الرّابط المناسب لاسم عنوان إطار هذه الفعّاليّة.

أمامكم الرّسوم البيانيّة للدّوالّ: (أ) $y=2^x$ (ب) $y=3^x$ (ج) $y=5^x$

من خلال تمرير عجلة الفأرة يمكنكم التّكبير لرؤية الرّسوم البيانيّة المرسومة والعثور على نقاط إضافيّة عليها وكذلك تحريك لوحة الرّسم لفحص سلوك الرّسوم البيانيّة في الأجزاء الّتي لا تظهر في الرّسم في هذه الصّفحة.

أنظروا إلى الرّسوم البيانية، **ولكلّ دالّة من الدّوالّ** واكتبوا خصائص الرّسم البيانيّ الّذي يصفها وفقًا للتّعليمات التّالية:

1. ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟ كيف ينعكس ذلك في الرّسم البيانيّ ؟
2. في أيّ الأرباع يمرّ الرّسم البيانيّ، وما هو المجال الّذي فيه الدّالّة الّتي يصفها موجبة / سالبة ؟
3. كيف يتصرّف الرّسم البيانيّ للدّالّة، كلّما كبُرَت القيم المطلقة لـ x على يمين المحور y ؟

يتبع في الصّفحة التّالية ◄◄◄

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب ↯ وحدات تعليميّة – الصّفّ الثّاني عشر – المنهج الجديد

يتبع – توضيح محوسب: مقارنة بين دوالّ أُسّيّة ذوات أساسٍ أكبر من 1

4. كيف يتصرّف الرّسم البيانيّ للدّالّة، كلّما كبُرَت القيم المطلقة لـِ x على يسار المحور y ؟
5. أ. إلى أيّ قيمة تقترب الدّالّة عندما تزداد قيمة x بلا حدودٍ (تقترب إلى اللّانهاية) ؟
   ب. إلى أيّ قيمة تقترب الدّالّة عندما تصغر قيمة x بلا حدودٍ (تقترب إلى ناقص لانهاية) ؟
   ج. هل يوجد خطُّ تقاربٍ عموديٌّ لأحد المحورَيْن (أُفقيّ أو عموديّ) ؟ إذا أجبتم نعم، ما هي معادلته ؟
6. ما هي إحداثيات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور y ؟
7. أيّ واحدٍ من الرّسوم البيانيّة الثّلاثة يقع فوق الرّسمَيْن البيانيَّيْن الآخرَيْن في المجال $x>0$ ؟
8. أيّ واحدٍ من الرّسوم البيانيّة الثّلاثة يقع فوق الرّسمَيْن البيانيَّيْن الآخرَيْن في المجال $x<0$ ؟

توضيح محوسب: خصائص الدّالّة الأُسّيّة العامّة الّتي قيمة أساسها أكبر من 1

أُدخلوا إلى الموقع www.mishbetzet.co.il ← 4 وحدات تعليميّة ← الصّفّ الثّاني عشر ← فعّاليات محوسبة تتبع لهذا الكتاب ← اِضغطوا على الرّابط المناسب لاسم عنوان إطار هذه الفعّاليّة.

يظهر أمامكم رسمٌ بيانيٌّ لدالّة من الصّورة العامّة $y=a^x$ ، بحيث $a>1$.

(أ) إختاروا بمساعدة شريط القيم، قيمةً أيًّا كانت لـِ a ، وأجيبوا عن الأسئلة التّالية:

1. ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟
2. في أيّ الأرباع يقع الرّسم البيانيّ للدّالّة ؟
3. ما هي المجالات الّتي فيها الدّالّة موجبة / سالبة ؟
4. ماذا يحدث لقيم y ، كلّما كبُرَت قيم x ؟
5. هل يوجد للدّالّة نقاطٌ قصوى ؟
6. هل يوجد للدّالّة خطّ تقاربٍ عموديٌّ لأحد المحورَيْن، إذا أجبتم نعم لأيّ محورٍ وما هي معادلته ؟
7. ما هي إحداثيات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور y ؟ (هل يمكنكم أن تشرحوا لماذا ؟)
8. ما هو المشترك بين قيم y للدّالّة الموجودة على يسار هذه النّقطة،
   وما هو المشترك لقيم y الموجودة على يمين هذه النّقطة ؟
9. هل، حسب رأيكم، ستتغيّر إحدى إجاباتكم للبنود 1 – 8 أعلاه، إذا اخترتم قيمةً أخرى أكبر من 1 لـِ a ؟ قوموا بهذا وافحصوا اِفتراضكم.
10. اِستعينوا بشريط القيم للبارامتر a ، وغيّروا بواسطة الجرّ قيمه، بحيث تتابعون شكل الرّسم البيانيّ.
    ماذا يمكنكم القول عن شكل الرّسم البيانيّ كلّما كبُرَت قيمة a.
11. أُكتبوا اِستنتاجاتٍ حول الخصائص المشتركة بين كلّ الرّسوم البيانيّة للدّوالّ من الصّورة العامّة: $y=a^x$ ، عندما يكون $a>1$.

(ب) في هذا التّطبيق، عَرّفنا البارامتر b ، الّذي يحقّق $b=a+10$ $(a>1)$، والدّالّة $g(x)=b^x$.
اِضغطوا على الدّائرة الّتي بجانب الدّالّة $g(x)$ في اللّوح الجبريّ، كي يتمّ عرض رسمها البيانيّ أيضًا.
غيّروا قيمة a كما ترغبون، وأجيبوا:

1. أيّ الرّسمَيْن البيانيَّيْن يقع **فوق** الرّسم البيانيّ الآخر **في الرّبع الأوّل**:
   رسم الدّالّة الّتي أساسها أكبر (b) أم رسم الدّالّة الّتي أساسها أصغر (a)؟ حاولوا أن تشرحوا لماذا ؟
2. أيّ الرّسمَيْن البيانيَّيْن يقع **فوق** الرّسم البيانيّ الآخر **في الرّبع الثّاني**:
   رسم الدّالّة الّتي أساسها أكبر (b) أم رسم الدّالّة الّتي أساسها أصغر (a) ؟ حاولوا أن تشرحوا لماذا ؟

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكونيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب وحدات تعليميّة – الصّفّ الثّاني عشر – المنهج الجديد

خصائص الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=a^x$ عندما يكون $a>1$:

(أ) الدّالّة معرّفة لكلّ x.

(ب) حسب قوانين القوى، إذا كان $a>0$ عندها a^x هو مقدارٌ موجبٌ لكلّ x.
أي أنّ الرّسم البيانيّ للدّالّة يقع كلّه **فوق المحور x**.

(ج) إذا كان $x=0$، يتحقّق $a^0=1$ $\Leftarrow$ يمرّ الرّسم البيانيّ للدّالّة في النّقطة $(0,1)$
($a^0=1$ لكلّ قيمةٍ لـِ $a\neq 0$).

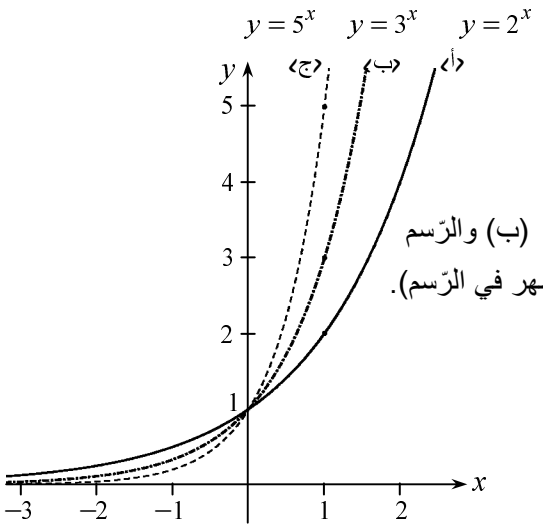
(د) إذا كان $x>0$، يقع الرّسم البيانيّ للدّالّة في الرّبع الأوّل، بينما إذا كان $x<0$، يقع الرّسم البيانيّ للدّالّة في الرّبع الثّاني.
بالنّسبة لـِ x سالب، كلّما كانت القيمة المطلقة لـِ x أكبر – يقترب الرّسم البيانيّ للدّالّة إلى المحور x أكثر فأكثر، لكنّه لا يلمسه، لذا فإنّ المحور x يشكّل **خطًّا تقاربيًّا أفقيًّا** للرّسم البيانيّ للدّالّة.

(هـ) الدّالّة **تصاعديّة في كلّ مجال تعريفها**: بما أنّ $a>1$،
عندها، لكلّ x_1 وَ x_2 يحقّقان: $x_2>x_1$، يتحقّق: $a^{x_2}>a^{x_1}$.

(و) **<u>عند المقارنة بين رسمَيْن بيانيَّيْن لدالّتَيْن أُسّيَّتَيْن:</u>**
$f(x)=c^x$ ، $g(x)=d^x$ ، **بحيث c وَ d أكبر من 1**:

1. بالنّسبة **لقيم موجبة لـِ x ($x>0$)**،
إذا كان $c>d$، عندها $c^x>d^x$.

<u>مثال:</u>
$5>3$ ، لذا $5^x>3^x$ **لكلّ $x>0$**.
أي، لكلّ $x>0$، الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=5^x$
يقع **فوق** الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=3^x$
(وهذا هو سبب وجود الرّسم البيانيّ (ج) فوق الرّسم البيانيّ (ب) والرّسم البيانيّ (ب) فوق الرّسم البيانيّ (أ) في الرّبع الأوّل، كما يظهر في الرّسم).



2. بالنّسبة **لقيمٍ سالبة لـِ x ($x<0$)**،
إذا كان: $c>d$ عندها: $c^x<d^x$.

<u>مثال:</u> $5>3$ ، لذا $5^x<3^x$ **لكلّ $x<0$**.
أي، لكلّ $x<0$، الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=5^x$
يقع **تحت** الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=3^x$.
(وهذا هو سبب وجود الرّسم البيانيّ (ج) تحت الرّسم البيانيّ (ب)،
والرّسم البيانيّ (ب) تحت الرّسم البيانيّ (أ)، في الرّبع الثّاني كما هو موصوفٌ في الرّسم).

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

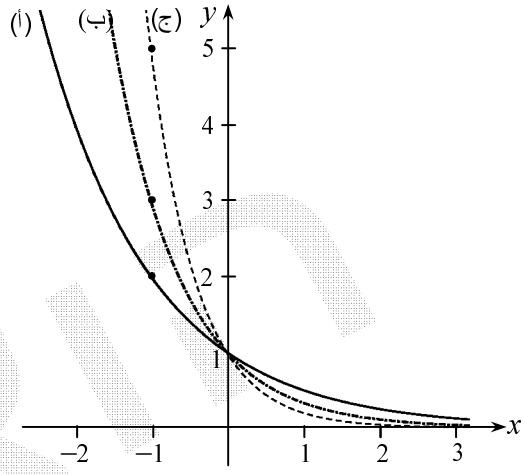
عندما يكون $0 < a < 1$:

نرسم في هيئة محاور **واحدة** الرّسوم البيانيّة للدّوالّ الثّلاث التّالية:

(أ) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (ب) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (ج) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

نستعين بجدول قيم، ونحصل على الرّسوم البيانيّة التّالية:

x	‹أ› $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	‹ب› $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	‹ج› $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$
-2	4	9	25
-1	2	3	5
0	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{25}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{125}$



توضيح مُحوسب: مقارنة بين دوالّ أُسّيّة ذوات أساس قيمته بين 0 وَ 1

أُدخلوا إلى الموقع www.mishbetzet.co.il ← 4 وحدات تعليميّة ← الصّفّ الثّاني عشر ← فعّاليات محوسبة تتبع لهذا الكتاب ← اضغطوا على الرّابط المناسب لاسم عنوان إطار هذه الفعّاليّة.

تمّ في التّطبيق وصف الدّوالّ: (أ) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (ب) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (ج) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

من خلال تمرير عجلة الفأرة يمكنكم التّكبير لرؤية الرّسوم البيانيّة المرسومة والعثور على نقاط إضافيّة، عليها وكذلك تحريك لوحة الرّسم لفحص سلوك الرّسوم البيانيّة في الأجزاء الّتي لا تظهر في الرّسم في هذه الصّفحة.

أُنظروا إلى الرّسوم البيانيّة، وبالنّسبة **لكلّ واحدة من هذه الدّوالّ** أُكتبوا خصائص الرّسم البيانيّ الّذي يصفها وفقًا للتّعليمات التّالية:

1. ما هو مجال تعريف الدّالّة، كيف ينعكس ذلك في الرّسم البيانيّ ؟
2. في أيّ الأرباع يمرّ الرّسم البيانيّ ؟ وما هو المجال الّذي فيه الدّالّة الّتي يصفها موجبة / سالبة ؟
3. كيف يتصرّف الرّسم البيانيّ للدّالّة، كلّما كبُرَت القيم المطلقة لِـ x على يمين المحور y ؟
4. كيف يتصرّف الرّسم البيانيّ للدّالّة، كلّما كبُرَت القيم المطلقة لِـ x على يسار المحور y ؟
5. أ. إلى أيّ قيمة تقترب الدّالّة عندما تزداد قيمة x بلا حدودٍ (تقترب إلى اللّانهاية) ؟
   ب. إلى أيّ قيمة تقترب الدّالّة عندما تصغر قيمة x بلا حدودٍ (تقترب إلى ناقص لانهاية) ؟
   ج. هل يوجد خطُّ تقاربٍ عموديٌّ لأحد المحورَيْن (أُفقيّ أو عموديّ) ؟ إذا أجبتم نعم، ما هي معادلته ؟
6. ما هي إحداثيات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور y ؟
7. أيّ واحدٍ من الرّسوم البيانيّة الثّلاثة يقع فوق الرّسمَيْن البيانيَّيْن الآخرَيْن في المجال $x > 0$ ؟
8. أيّ واحدٍ من الرّسوم البيانيّة الثّلاثة يقع فوق الرّسمَيْن البيانيَّيْن الآخرَيْن في المجال $x < 0$ ؟

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب وحدات تعليميّة – الصّفّ الثّاني عشر – المنهج الجديد

خصائص الدّالّة الأُسّيّة العامّة الّتي قيمة أساسها تقع بين 0 وَ 1

أُدخلوا إلى الموقع www.mishbetzet.co.il ← 4 وحدات تعليميّة ← الصّفّ الثّاني عشر ← فعّاليات محوسبة تتبع لهذا الكتاب ← اِضغطوا على الرّابط المناسب لاسم عنوان إطار هذه الفعّاليّة.

يظهر أمامكم رسمٌ بيانيٌّ لدالّة من الصّورة العامّة $y=a^x$ ، بحيث $0<a<1$.

(أ) اِختاروا بمساعدة شريط القيم، قيمةً أيًّا كانت لـِ a ، وأجيبوا عن الأسئلة التّالية:

1. ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟
2. في أيّ الأرباع يقع الرّسم البيانيّ للدّالّة ؟
3. ما هي المجالات الّتي فيها الدّالّة موجبة / سالبة ؟
4. ماذا يحدث لقيم y ، كلّما كبُرَت قيم x ؟
5. هل يوجد للدّالّة نقاطٌ قصوى ؟
6. هل يوجد للدّالّة خطّ تقاربٍ عموديٌّ لأحد المحورَيْن، إذا أجبتم نعم لأيّ محورٍ وما هي معادلته ؟
7. ما هي إحداثيات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور y ؟ (هل يمكنكم أن تشرحوا لماذا ؟)
8. ما هو المشترك بين قيم y للدّالّة الموجودة على يسار هذه النّقطة،
   وما هو المشترك لقيم y الموجودة على يمين هذه النّقطة ؟
9. هل، حسب رأيكم، ستتغيّر إحدى إجاباتكم للبنود $1-8$ أعلاه، إذا اخترتم قيمةً أخرى تقع بين 0 وَ 1 لـِ a ؟ قوموا بهذا وافحصوا اِفتراضكم.
10. اِستعينوا بشريط القيم للبارامتر a ، وغيّروا بواسطة الجرّ قيمه، بحيث تتابعون شكل الرّسم البيانيّ.
    ماذا يمكنكم القول عن شكل الرّسم البيانيّ كلّما كبُرَت قيمة a.
11. أكتبوا اِستنتاجاتٍ حول الخصائص المشتركة بين كلّ الرّسوم البيانيّة للدّوالّ من الصّورة العامّة: $y=a^x$, عندما يكون $0<a<1$.

(ب) في هذا التّطبيق، عَرّفنا البارامتر c الّذي يحقّق $c=0.5a$ $(c>0)$، والدّالّة $g(x)=c^x$.
اِضغطوا على الدّائرة الّتي بجانب الدّالّة $g(x)$ في اللّوح الجبريّ، كي يتمّ عرض رسمها البيانيّ أيضًا.
غيّروا قيم a كما ترغبون، وأجيبوا:

1. أيّ الرّسمَيْن البيانيَّيْن يقع **فوق** الرّسم البيانيّ الآخر **في الرّبع الأوّل**:
   رسم الدّالّة الّتي أساسها أكبر (a) أم رسم الدّالّة الّتي أساسها أصغر (c) ؟ حاولوا أن تشرحوا لماذا ؟
2. أيّ الرّسمَيْن البيانيَّيْن يقع **فوق** الرّسم البيانيّ الآخر **في الرّبع الثّاني**:
   رسم الدّالّة الّتي أساسها أكبر (a) أم رسم الدّالّة الّتي أساسها أصغر (c) ؟ حاولوا أن تشرحوا لماذا ؟

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب ↯ وحدات تعليميّة – الصّفّ الثّاني عشر – المنهج الجديد

خصائص الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=a^x$ عندما يكون $0<a<1$:

(أ) الدّالّة معرّفة لكلّ x.

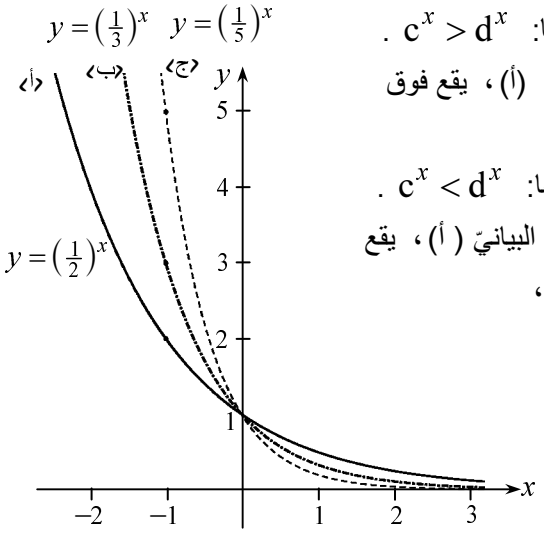
(ب) حسب قوانين القوى، إذا كان $0<a<1$ عندها a^x هو مقدارٌ موجبٌ لكلّ x.
أي، الرّسم البيانيّ للدّالّة يقع كلّه **فوق المحور x**.

(ج) عندما يكون $x=0$ ، نحصل على $a^0=1$ $\Leftarrow$ الرّسم البيانيّ للدّالّة يمرّ في النّقطة $(0,1)$
($a^0=1$ لكلّ قيمة لـِ $a\neq 0$).

(د) عندما يكون $x>0$ ، يقع الرّسم البيانيّ للدّالّة في الرّبع الأوّل.
عندما يكون $x<0$ ، يقع الرّسم البيانيّ للدّالّة في الرّبع الثّاني (على سبيل المثال، $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ يساوي 8).
إذا كان x موجبًا، عندها كلّما كبُرَ x أكثر فأكثر – كلّما اقترب الرّسم البيانيّ للدّالّة من المحور x أكثر فأكثر، لكنّه لا يلمسه، لذا، المحور x يشكّل **خطَّ تقاربٍ** أُفقيًّا للرّسم البيانيّ للدّالّة.

(هـ) الدّالّة **تنازليّة في كلّ مجال تعريفها**.
أي أنّه لكلّ x_1 وَ x_2، يحقّقان: $x_2>x_1$، يتحقّق: $a^{x_2}<a^{x_1}$.
على سبيل المثال: $4>3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4<\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

(و) **<u>عند المقارنة بين رسمَيْن بيانيَّيْن لدالّتَيْن أُسّيَّتَيْن:</u>**
$f(x)=c^x$ ، $g(x)=d^x$ ، **بحيث c وَ d هما عددان موجبان أصغر من 1** :



1. بالنّسبة لقيمٍ موجبة لـِ x $(x>0)$، إذا كان: $c>d$ ، عندها: $c^x>d^x$.
لذا على سبيل المثال، الرّسم البيانيّ لـِ $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، الّذي هو الرّسم (أ)، يقع فوق الرّسمَيْن البيانيَّيْن الآخرَيْن في الرّبع الأوّل (أُنظروا الرّسم).
2. بالنّسبة لقيمٍ سالبة لـِ x $(x<0)$، إذا كان: $c>d$ ، عندها: $c^x<d^x$.
لذا على سبيل المثال، الرّسم البيانيّ لـِ $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، الّذي هو الرّسم البيانيّ (أ)، يقع تحت الرّسمَيْن البيانيَّيْن الآخرَيْن في الرّبع الثّاني (أُنظروا الرّسم)،
(وذلك لأنّ الأساس $\frac{1}{2}$ هو الأكبر من بين الأساسات الثّلاثة).

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

للإجمال:

خصائص الدّالّة الأُسّيّة $f(x)=a^x$ $(a>0\ ,\ a\neq 1)$

مجال التّعريف: كلّ x.

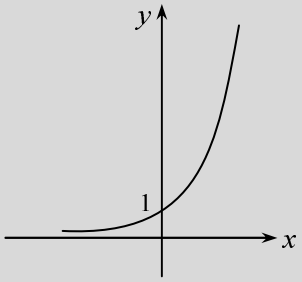
إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور y**:** $(0,1)$

معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ: $y=0$

مجالات التّصاعد / التّنازل:

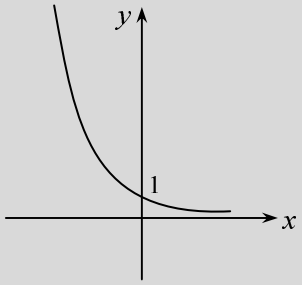
- لكلّ $a>1$: الدّالّة تصاعديّة لكلّ x.

(أنظروا على سبيل المثال الرّسم البيانيّ أمامكم)



- لكلّ $0<a<1$: الدّالّة تنازليّة لكلّ x.

(أنظروا على سبيل المثال الرّسم البيانيّ أمامكم)



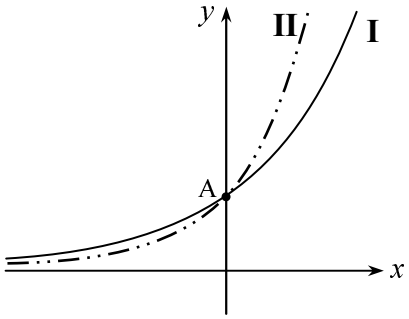
المجال الّذي فيه الدّالّة موجبة: الدّالّة موجبة لكلّ x.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب ؛ وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

تمارين للعمل الذّاتيّ

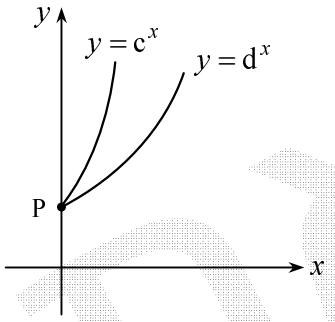
بالنّسبة للتّمارين (1) – (6) الّتي تتناول الرّسوم البيانيّة للدّوالّ الأُسّيّة، لا توجد إجابات نهائيّة
(إفحصوا إجاباتكم مع المعلّم في الصّف).

(1) معطى الرّسمان البيانيّان للدّالّتَيْن $y=2^x$ وَ $y=3^x$.



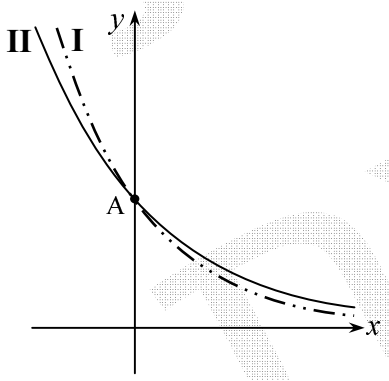
(أ) أي الرّسمَيْن البيانيَّيْن، **I** أو **II** ، يلائم الدّالّة $y=2^x$.
(ب) ما هي إحداثيّات النّقطة A ؟
(ج) هل اِمتداد الرّسمَيْن البيانيَّيْن يقطع المحور x ؟
(د) (*i*) بالنّسبة لأيّ قيم x يتحقّق $3^x>2^x$ ؟
(*ii*) بالنّسبة لأيّ قيم x يتحقّق $3^x<2^x$ ؟
(*iii*) بالنّسبة لأيّ قيم x يتحقّق $3^x=2^x$ ؟

(2) معطى دالّتان أُسّيّتان:
$y=c^x$ وَ $y=d^x$ (c وَ d موجبان طبعًا)،
ويظهر في الرّسم وصفٌ لرسمَيْهما البيانيَّيْن في الرّبع الأوّل.



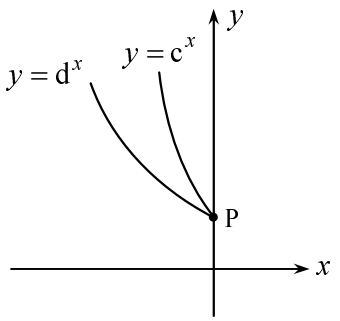
(أ) هل صحيحٌ أن نقول، أيضًا c وأيضًا d أكبر من 1 ؟ علّلوا !
(ب) ما هي إحداثيّات النّقطة P ؟ علّلوا !
(ج) أكملوا الرّسم البيانيّ التّقريبيّ لكلّ واحدة من الدّالّتَيْن في الرّبع الثّاني.
(د) هل اِمتداد الرّسمَيْن البيانيَّيْن في الرّبع الثّاني يقطع المحور x ؟ علّلوا !
(هـ) هل يتحقّق $c>d$ أو $c<d$ ؟ علّلوا!

(3) معطى الرّسمان البيانيّان للدّالّتَيْن $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ وَ $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.



(أ) أي الرّسمَيْن البيانيَّيْن، **I** أو **II** ، يلائم الدّالّة $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.
(ب) ما هي إحداثيّات النّقطة A ؟
(ج) هل اِمتداد الرّسمَيْن البيانيَّيْن يقطع المحور x ؟
(د) (*i*) بالنّسبة لأيّ قيم x يتحقّق $\left(\frac{1}{4}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ؟
(*ii*) بالنّسبة لأيّ قيم x يتحقّق $\left(\frac{1}{4}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ؟
(*iii*) بالنّسبة لأيّ قيم x يتحقّق $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ؟

(4) معطى دالّتان أُسّيّتان:
$y=c^x$ وَ $y=d^x$ (c وَ d موجبان بالطّبع)،
ويظهر في الرّسم وصفٌ لرسمَيْهما البيانيَّيْن في الرّبع الثّاني.

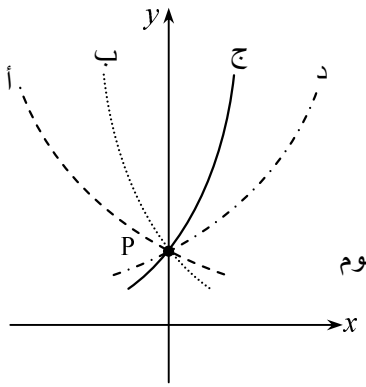


(أ) هل صحيحٌ أن نقول، أيضًا c وأيضًا d أكبر من 1 ؟ علّلوا!
(ب) ما هي إحداثيّات النّقطة P ؟ علّلوا!
(ج) أكملوا الرّسم البيانيّ التّقريبيّ لكلّ واحدة من الدّالّتَيْن في الرّبع الأوّل.
(د) هل اِمتداد الرّسمَيْن البيانيَّيْن في الرّبع الأوّل يقطع المحور x ؟ علّلوا!
(هـ) هل يتحقّق $c>d$ أو $c<d$ ؟ علّلوا!

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكونيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب و وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(5) معطى 4 دوالّ أُسّيّة:

$$y=a^x \qquad y=b^x$$
$$y=c^x \qquad y=d^x$$



ومعطى أيضًا أنّ: $0<a<d<1<c<b$.

ومعطى أيضًا أنّ الرّسوم البيانيّة أ ، ب ، ج ، د المعطاة في الجهة اليسرى هي الرّسوم البيانيّة للدّوالّ الأربع، وترتيبها ليس بالضّرورة حسب ترتيب ترقيمها.

(أ) ما هي إحداثيّات النّقطة P ؟ علّلوا !

(ب) بالنّسبة لأيّ الرّسوم البيانيّة يكون أساس الدّالّة الأسّيّة أكبر من 1، وبالنّسبة لأيٍّ منها يكون الأساس أصغر من 1؟

(ج) أيٌّ من بين الرّسوم البيانيّة أ ، ب ، ج ، د هو الرّسم البيانيّ التّقريبيّ للدّالّة ،
وأيّها هو الرّسم البيانيّ التّقريبيّ للدّالّة ، وأيّها هو الرّسم البيانيّ التّقريبيّ للدّالّة ؟
عليكم أن تعلّلوا أيضًا كيف حدّدتم ذلك .

(6) (أ) أُرسموا في هيئة محاور **واحدة** الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن: $f(x)=2^x$ ، $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

(ب) قارنوا بين الدّالّتين مع الإشارة إلى خصائصهما: مجال التّعريف، نقاط التّقاطع مع المحورَيْن، المجالات الّتي فيها الدّالّة موجبة / سالبة، مجالات التّصاعد / التّنازل، خطوط التّقارب.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب ؛ وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

ب. العدد e والدّالّة $y=e^x$

كيف تمّ اكتشاف العدد e ؟

من المؤكّد أنّكم ستندهشون عندما تعلمون أنّ كلّ واحدٍ منكم كان يمكنه أن يكتشفه ! تمامًا كما حدث مع نبيل في القصّة التّالية.

دخل نبيل إلى فرع بنكٍ وطلبَ إيداع 1000 شاقلٍ في برنامج توفيرٍ لمدّة 10 سنوات.

أخبره الموظّف أنّه سيحصل على فائدة بنسبة 100% على الإيداع في نهاية الفترة.

فرح نبيل كثيرًا، وحَسَبَ أنّه في نهاية السّنوات الـ 10 سيحصل على 2000 شاقل ($1,000\cdot 2=\mathbf{2,000}$).

ولكن قبل أن يُودع المال، فكّر نبيل في نفسه: "إذا أودعتُ المال لمدّة 5 سنوات (نصف فترة التّوفير)، سأحصل فيها على فائدة قدرها 50% فقط (في نهاية السّنوات الخمس)، ثم أُودِعُ المبلغ الّذي سأحصل عليه لمدّة 5 سنوات أخرى، بفائدة قدرها 50% (في نهاية السنوات الخمس الإضافية)، فكم سيكون المبلغ الّذي سأحصل عليه في نهاية الـ 10 سنوات ؟"

حَسَبَ نبيل: بعد مرور 5 سنوات: $1,000\cdot 1.5=1,500$ ،

بعد مرور 10 سنوات: $1,500\cdot 1.5=\mathbf{2,250}$

تردّد نبيل وقال: "لحظة، إذا كان هذا هو الحال، وإذا قَسّمْتُ فترة التّوفير الّتي أرغب بها، وهي 10 سنوات، إلى فتراتٍ أقصر، وبما يتناسب معها نسبة الفائدة، فقد أتمكّن من الرّبح أكثر!". قام نبيل باختبار فرضيّته من خلال تقسيم فترة التّوفير إلى 4 فتراتٍ متساوية، كلّ واحدة منها مُدّتها 2.5 سنوات، مع فائدة بنسبة 25% لكلّ فترة.

دعونا نتابع الحساب:

بعد مرور 2.5 سنوات (فترة واحدة): $1,000\cdot 1.25=1,250$

بعد مرور 5 سنوات (فترتان): $1,250\cdot 1.25=1,000\cdot 1.25\cdot 1.25=1,000\cdot 1.25^2=1,562.5$

بعد مرور 7.5 سنوات (3 فترات): $1,562.5\cdot 1.25=1,000\cdot 1.25\cdot 1.25\cdot 1.25=1,000\cdot 1.25^3=1,953.12$

بعد مرور 10 سنوات (4 فترات): $1,953.12\cdot 1.25=1,000\cdot 1.25\cdot 1.25\cdot 1.25\cdot 1.25=1,000\cdot 1.25^4=\mathbf{2,441.41}$

"إذاً، لماذا لا أُودِعُ المال بإيداعٍ **يوميٍّ** بفائدة مقدارها $\frac{100}{3,650}\%$ ، وأعيد إيداعه من جديد كلّ يوم ؟"

في هذه الحالة، عدد الإيداعات خلال الـ 10 سنوات سيكون: $10\cdot 365=3,650$

"ولذا فإنّ المبلغ الّذي سأحصل عليه مقابل 3,650 إيداعًا يوميًّا: $1,000\times\left(1+\frac{1}{3,650}\right)^{3,650}=\mathbf{2,717.91}$

إنّه بالفعل مبلغٌ جميلٌ جدًّا، لكن ربّما يمكن الإيداع بنفس الطّريقة لفتراتٍ صغيرة جدًّا، وكسب المزيد من المال ".

وبشكلٍ عامّ: إذا أودع نبيل 1,000 شاقلٍ وقسّمَ الـ 10 سنوات إلى n فترات متساوية، بفائدة قدرها $\frac{100\%}{n}$ في نهاية كلّ واحدة من الفترات عندها، سيحصل في نهاية الـ 10 سنوات على المبلغ $1,000\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ شاقل.

نفحص: كم سيكون المبلغ، الّذي يمكن أن نحصل عليه مقابل إيداع **شاقلٍ واحدٍ** بفائدة قدرها 100% لمدّةٍ معيّنة، إذا قسّمنا الإيداعات لـِ n مرّات: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

اِستعينوا بالآلة الحاسبة، وافحصوا قيمة التّعبير $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ لـِ $n=1,000$ ، $n=10,000$ ، وهكذا دواليك.

هل هناك حدّ لهذه القيمة؟ مفاجأة ! هناك حدٌّ مقابل إيداع **شاقلٍ واحدٍ** وهو **2.718...** شاقل.

الآن، كلّ ما تبقّى لنبيل هو أن يتحقّق ممّا إذا كان البنك سيوافق على الأقلّ على واحدة من خططه... ▪

في هذه المسألة، بحث الرّياضيّ يعقوب برنولّي عام 1683، وتوصّل إلى أنّ هناك حدٌّ للتّعبير $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ، وقرّر أن هذا الحدّ يقع بين 2 وَ 3، لكنّه لم يعرف قيمته الدّقيقة. مَنْ تابع طريقه واكتشف هذا الحدّ وعيّنه بالرّمز e، كان الرّياضيّ ليونارد أويلر (1707 – 1783)، الّذي اِكتشف أنّه كلّما ازدادت قيم n دون حدّ (تؤول إلى اللّانهاية)، فإنّ قيمة التّعبير $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ تقترب إلى الثّابت e ، بحيث $e\approx 2.7182818...$.

اِكتشف أويلر أيضًا وبرهن أنّ e هو عددٌ **غير نسبيّ**، أي أنّنا لا نستطيع كتابته كقسمة عددَيْن صحيحَيْن (بسط على مقام).

معنى هذا الاكتشاف هو أنّ للعدد e عددٌ لا نهائيٌّ من الأرقام بعد الفاصلة العشريّة دون وجود تكرارٍ دوريّ.

وهكذا تبيّن أنّ مشكلة يوميّة مثل حساب الفائدة على إيداعٍ ماليّ، أدّت إلى اكتشاف عددٍ مُهمّ في عالم الرّياضيّات!

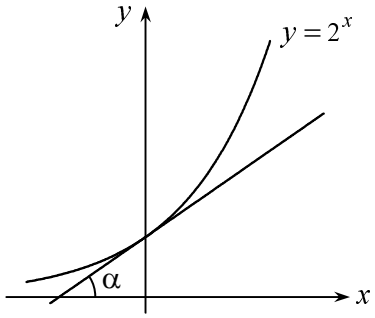
© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب ← وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

تابع ليونارد أويلر أبحاثه، واكتشف من بين أمورٍ أخرى أيضًا الدّالة الأسّيّة e^x ، الّتي كما سنتعلّم لاحقًا، هي الدّالّة الوحيدة (حتّى في حالة الضّرب بثابت) الّتي تساوي مشتقّتها. لكن قبل ذلك، سنتعرّف على خصائص مهمّة أخرى تُميّز هذه الدّالة.

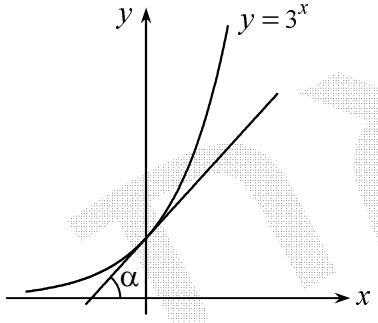
ما هو الخاصّ في الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=e^x$ ، بالمقارنة مع رسومٍ بيانيّة أخرى للدّوالّ من الصّورة $y=a^x$ ؟

حتّى الآن رأينا أنّ جميع الدّوالّ ذوات الصّورة: $y=a^x$ $(a>0 \ , \ a\neq 1)$
معرّفة وموجبة لكلّ قيمةٍ لـِ x ، ورسومها البيانيّة تقطع المحور y في النّقطة $(0,1)$.

نرسم بدقّة الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=2^x$ ،
ونمرّر بدقّة مماسًّا للرّسم البيانيّ للدّالّة في النّقطة $(0,1)$.
إذا قسنا مقدار الزّاوية الحادّة α الّتي يكوّنها المماسّ مع المحور x ،
سنجد أنّ مقدارها هو $\alpha\approx 34.7277°$.
ولأنّ ميل المماسّ، m ، يُحقّق $|m|=\operatorname{tg}\alpha$
نحصل على أنّ: $\operatorname{tg}34.7277°=0.6931<1$.
أي أنّه في هذه الحالة $m<1$.



بنحوٍ شبيه، نرسم بدقّة الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=3^x$ ،
ونمرّر بدقّة مماسًّا للرّسم البيانيّ للدّالّة في النّقطة $(0,1)$.
في هذه المرّة، الزّاوية الحادّة α ، الّتي يكوّنها المماسّ مع المحور x ،
هي $\alpha\approx 47.69°$.
ولأنّ ميل المماسّ، m ، يُحقّق $|m|=\operatorname{tg}\alpha$
وَ $\operatorname{tg}47.69°\approx 1.0986>1$ ، نستنتج أنّ في هذه الحالة $m>1$.



إذا رسمنا بدقّة الكثير من الرّسوم البيانيّة لدوالّ من الصّورة $y=a^x$ ، بحيث تتراوح قيمة a بين 2 وَ 3 ، عندها، مقدار الزّاوية بين المماسّ للرّسم البيانيّ للدّالّة في النّقطة $(0,1)$ وبين المحور x ، سيتراوح بين $34.7°$ وَ $47.7°$ ، وفقط عندما تكون قيمة a قريبة من العدد 2.718 سنحصل على زاوية مقدارها $45°$.
إذا عوّضنا $a=e$ ، سنحصل على زاوية مقدارها $45°$ ، بالضّبط.

بكلماتٍ أخرى، بالنّسبة للدّالّة الأُسّيّة $y=e^x$ ، ميل المماسّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $(0,1)$ يساوي بالضّبط 1 ($\tan 45°=1$).

توضيح محوسب: ميل المماسّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $y=e^x$

أُدخلوا إلى الموقع www.mishbetzet.co.il ← 4 وحدات تعليميّة ← الصّفّ الثّاني عشر ← فعّاليات محوسبة تتبع لهذا الكتاب ← اِضغطوا على الرّابط المناسب لاسم عنوان إطار هذه الفعّاليّة.

على لوح الرّسم أمامكم، يظهر رسمان بيانيّان باللّونَيْن: الأزرق والبرتقاليّ.
باللّون **الأزرق** – الرّسم البيانيّ للدّالّة الأُسّيّة $f(x)=e^x$ ، والمماسّ للرّسم البيانيّ في النّقطة $(0,1)$.
باللّون **البرتقاليّ** – الرّسم البيانيّ للدّالّة الأُسّيّة $g(x)=a^x$, والمماسّ للرّسم البيانيّ في النّقطة $(0,1)$.
وكذلك، معطى مقدار الزّاوية الحادّة بين المماسّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)=a^x$ في النّقطة $(0,1)$
وبين المحور x ، باللّون البرتقاليّ.
غيّروا أساس القوّة a بواسطة شريط القيم، وتابعوا المقدار المتغيّر للزّاوية أعلاه.
أكتبوا ماذا يمكننا القول عن مقدار هذه الزّاوية، كلّما اِقتربت قيمة a من القيمة $e=2.718$.

© جميع الحقوق محفوظة لجابي يكوئيل – שבצת – رياضيّات لطلّاب ← وحدات تعليميّة – الصّفّ الثّاني عشر – المنهج الجديد

مثال محلول

معطاةٌ الدّالّة الأسّيّة: $y = e^x$.

(أ) اِستعينوا بالآلة الحاسبة، وأكملوا النّاقص في جدول القيم التّالي.
قرّبوا حتّى منزلتَيْن بعد النّقطة العشريّة.

x	3	2	1	0	-1	-2
$y = e^x$						

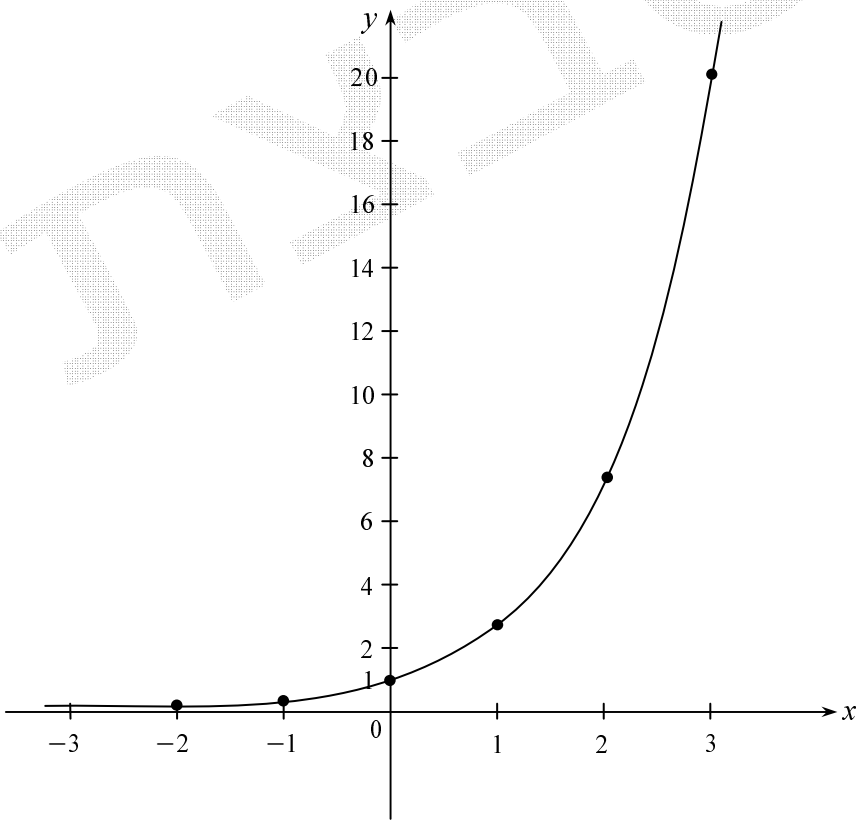
(ب) اِستعينوا بجدول القيم، عيّنوا النّقاط في هيئة محاور، وارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة: $y = e^x$.

الحلّ:

(أ) نُضيف سطرَ حساباتٍ، ونستعين بالآلة الحاسبة لكتابة النّتيجة المُقرّبة:

x	3	2	1	0	-1	-2
الحساب	e^3	e^2	e^1	e^0	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$
$y = e^x$	20.09	7.39	2.72	1	0.37	0.14

(ب) حسب الجدول سنحصل على الرّسم البيانيّ التّالي:



© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب ؛ وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

تمارين للعمل الذّاتيّ

(1) اِستعينوا بالآلة الحاسبة وبالمِفتاح $\boxed{x}^{\square}$ أو بالمِفتاح ^ ، وأكملوا الجدول التّالي:

n	$1+\frac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
50		
500		
5,000		
50,000		
500,000		
5,000,000		

(2) أُنظروا إلى نتائج الجدول في التّمرين **(1)**، وحدّدوا، بدءً من أيّ قيمةٍ لِـ n (الّتي تظهر في الجدول) سنحصل في التّعبير $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ على العدد e **بدقّةٍ تصل إلى المنازل الثّلاث الأولى** بعد النّقطة العشريّة.

(3) اِستعينوا بالآلة الحاسبة لإيجاد القيم التّالية:
(في هذا التّمرين، عليكم أن تقرّبوا نتيجة الآلة الحاسبة حتّى ثلاث منازل بعد النّقطة العشريّة).

‹أ) e^1 ‹ب) e^2 ‹ج) e^4 ‹د) e^7

‹هـ) $e^{2.5}$ ‹و) $e^{1.5}$ ‹ز) $e^{0.1}$ ‹ح) $e^{0.01}$

‹ط) $\sqrt{e}$ ‹ي) $\sqrt[3]{e}$ ‹ي أ) e^{-2} ‹ي ب) e^{-4}

‹ي ج) $e^{-\frac{1}{2}}$ ‹ي د) $e^{-\frac{1}{4}}$ ‹ط و) $e^{-0.1}$ ‹ط ز) $e^{-0.01}$

(4) معطاةٌ الدّالّة الأسّيّة: $y=e^{-x}$.

(أ) اِستعينوا بالآلة الحاسبة، وأكملوا النّاقص في جدول القيم.
قرّبوا حتّى منزلتَيْن بعد النّقطة العشريّة.

x	2	1	0	−1	−2	−3
$y=e^{-x}$						

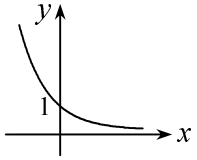
(ب) اِستعينوا بجدول القيم، عيّنوا النّقاط في هيئة محاور وارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة: $y=e^{-x}$.

أجوبة نهائيّة

(1) إفحصوا مع المعلّم في الصّفّ. **(2)** بدءً من $n=5,000$

(3) (أ) 2.718 (ب) 7.389 (ج) 54.598 (د) 1,096.633 (هـ) 12.182 (و) 4.482
(ز) 1.105 (ح) 1.010 (ط) 1.649 (ي) 1.396 (ي أ) 0.135 (ي ب) 0.018
(ي ج) 0.607 (ي د) 0.779 (ط و)0.905 (ط ز) 0.99

(4) (أ) +(ب)



x	2	1	0	−1	−2	−3
$y=e^{-x}$	0.14	0.37	1	2.72	7.39	20.0

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب و وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

الفصل 3: معادلات أُسّيّة ومتباينات أُسّيّة

أ. معادلات أُسّيّة

المعادلات، الّتي يظهر المجهول فيها في أسّ القوّة، تُسمّى: **معادلات أُسّيّة**.

أمثلة: (أ) $4^x = 8$ (ب) $9^x = 27^{5-x}$ (ج) $(0.001)^{x+1} = 100^{x+6}$

يتمّ حلّ المعادلات الأسّيّة عادةً، من خلال تحويل كِلا الطّرفَيْن إلى نفس أساس القوّة، بحيث إذا حصلنا على الشّكل $a^x = a^b$ ، عندها يتحقّق أنّ: $x = b$ ($a \neq 1$, $a > 0$).
نحلّ اِثنَيْن من الأمثلة أعلاه.

مثالان محلولان

(1) نحلّ المعادلة في المثال (ب): $9^x = 27^{5-x}$

ننتقل إلى الأساس 3 في كِلا الطّرفَيْن:

$$(3^2)^x = (3^3)^{(5-x)}$$
$$(3^2)^x = 3^{3\cdot(5-x)}$$
$$3^{2x} = 3^{15-3x}$$

إذا كان الأساسان متساويان، يمكننا الاستنتاج أنّ الأُسَّيْن متساويان. أي: $2x = 15 - 3x$

$$2x + 3x = 15 \quad \Rightarrow \quad 5x = 15 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 3}$$

(2) نحلّ المعادلة في المثال (ج): $(0.001)^{x+1} = 100^{x+6}$

ننتقل إلى الأساس 10 في كِلا الطّرفَيْن:

$$(10^{-3})^{x+1} = (10^2)^{x+6}$$
$$10^{-3x-3} = 10^{2x+12}$$

إذا كان الأساسان متساويَيْن، يمكننا الاستنتاج أنّ الأُسَّيْن متساويان.
أي أنّ:

$$-3x - 3 = 2x + 12$$
$$-3x - 2x = 12 + 3 \quad \Rightarrow \quad -5x = 15 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = -3}$$

(3) نحلّ المعادلة: $5^x = 1$

في مثل هذه الحالة، نكتب بدل العدد 1 القوّة 5^0 ، وعندها نحصل على: $5^x = 5^0$
لذا، حلّ المعادلة هو: $\boldsymbol{x = 0}$

(4) نحلّ المعادلة: $3 \cdot 4^x = 96$

تذكير: بحسب ترتيب العمليّات الحسابيّة، تسبق عمليّة القوّة عمليّة الضّرب.
لذا نقسم الطّرَفَيْن على 3 ، وذلك لعزل الأُسّ: $3 \cdot 4^x = 96 \ / :3 \ \Rightarrow \ 4^x = \frac{96}{3} = 32$

ننتقل إلى الأساس 2 في كِلا الطّرفَيْن: $\left(2^2\right)^x = 2^5 \ \Rightarrow \ 2^{2x} = 2^5$

من تساوي الأساسَيْن نستنتج تساوي الأُسَّيْن: $2x = 5 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x = 2\frac{1}{2}}$

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(5) نحلّ المعادلة (أساس القوّة هو الثّابت e): $\left(e^x\right)^2 \cdot e = \frac{e^{3x-5}}{e^{7x-3}}$

نستعمل قوانين القوى كي نبسّط الطّرفَيْن: $e^{2x} \cdot e^1 = e^{(3x-5)-(7x-3)}$

انتبهوا: عندما اِستعملنا قوانين القوى، وطرحنا
الأُسّ $(7x-3)$ من الأُسّ $(3x-5)$،
وضعنا الأُسَّيْن داخل **أقواس**.

$e^{2x+1} = e^{-4x-2}$

الأساسان متساويان لذا، الأُسّان متساويان:

$$2x+1=-4x-2 \quad \Rightarrow \quad 6x=-3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$$

سنقدّم فيما يلي حلًّا لمعادلتين أكثر تعقيدًا.

(6) نحلّ المعادلة: $4 \cdot 3^x = \frac{36}{25} \cdot 5^x$

كي ننقل القوى إلى الطّرف الأيسر والأعداد إلى الطّرف الأيمن،

نقسم الطّرفَيْن على $\left(4 \cdot 5^x\right)$: $\frac{3^x}{5^x} = \frac{36}{25} : 4$

ونحصل على: $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{36}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$

الأساسان متساويان لذا، الأُسّان متساويان، ولذا: $\boldsymbol{x=2}$

(7) نحلّ المعادلة: $4^{x+1} - 4^{2-x} - 63 = 0$

حسب قوانين القوى: $4^{x+1} = 4 \cdot 4^x$ ، وأيضًا: $4^{2-x} = \frac{4^2}{4^x} = \frac{16}{4^x}$.

نعوّض في المعادلة الأُسّيّة المعطاة، ونحصل على: $4 \cdot 4^x - \frac{16}{4^x} - 63 = 0$

نرمز: $y = 4^x$، ونعوّض في المعادلة.

بعد التّعويض، نحصل على: $4y - \frac{16}{y} - 63 = 0 \quad / \cdot y \ \ (y \neq 0)$

تنتج المعادلة التّربيعيّة: $4y^2 - 63y - 16 = 0$

الّتي حلّاها هما: $y_1 = 16 \ ، \ y_2 = -\frac{1}{4}$

بالنّسبة للحلّ: $y_1 = 16$ نحصل على: $4^x = 16$ ، أي: $x = 2$.

الحلّ الثّاني: $y_2 = -\frac{1}{4}$ لا يُقبَل، لأنّه لا يمكن أن

يتحقّق: $4^x = -\frac{1}{4}$ ، وذلك لأنّ: $4^x > 0$ لكلّ x حقيقيّ.

▪ **جواب:** حلّ المعادلة هو $x = 2$.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

تمارين للعمل الذّاتيّ

حلّوا المعادلات (1) – (9) التّالية.

(1) $2^x = 32$ (2) $3^x = 81$ (3) $5^x = 125$ (4) $4^x = 8$

(5) $27^x = 9$ (6) $100^x = 10$ (7) $100^x = 100,000$ (8) $7^x = 1$

(9) $8^x = 4$

حلّوا المعادلات (10) – (18) التّالية.

(10) $4^x = \frac{1}{4}$ (11) $4^x = \frac{1}{8}$ (12) $100^x = \frac{1}{10}$ (13) $8^x = \frac{1}{4}$

(14) $16^x = 32$ (15) $27^x = \frac{1}{9}$ (16) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8$ (17) $\left(\frac{1}{25}\right)^x = 625$

(18) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 16$

حلّوا المعادلات (19) – (30) التّالية.

(19) $25^x = \frac{1}{5}$ (20) $25^{x+1} = 125$ (21) $25^{x-1} = 125$ (22) $4^{x-2} = 32$

(23) $4^{x+1} = \frac{1}{8}$ (24) $4^{x-4} = \frac{1}{2}$ (25) $9^{x-2} = \frac{1}{3}$ (26) $27^{x-1} = 9$

(27) $8^{x-5} = \frac{1}{8}$ (28) $2^{x-2} = \frac{1}{8}$ (29) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 9$ (30) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-0.5} = 8^2$

حلّوا المعادلات (31) – (40) التّالية.

(31) $2^{5x+8} = 8^x$ (32) $4^{2x-1} = 8^{x-3}$

(33) $9^{x-2} = 27^{2-x}$ (34) $25^{x-3} = 125^{3-x}$

(35) $16^{3-x} = 32^{2-x}$ (36) $9^{4x-3} = 27^{3+x}$

(37) $9^{3x-5} = 81^{x-2}$ (38) $100^{x-3} = 1,000^{2x+2}$

(39) $4^{5x+2} = 8^{x-8}$ (40) $9^{4x-3} = 27^{2x+4}$

حلّوا المعادلات (41) – (52) التّالية.

(41) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 4^x$ (42) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5} = 2^{3-4x}$

(43) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} = 25^{x-1}$ (44) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}$

(45) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3-2x} = 27^{1+2x}$ (46) $100^{x-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{3x-11}$

(47) $\left(\frac{1}{100}\right)^{5-x} = 1,000^{2x-4}$ (48) $\left(\frac{1}{27}\right)^{3-2x} = 81^{x-1}$

(49) $(0.5)^{x+3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-6}$ (50) $(0.2)^{x^2} = 25^{3x}$

(51) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3}$ (52) ★ $(0.8)^{x^2-2x} = (1.25)^{x-2}$

© جميع الحقوق محفوظة لجابي يكوئيل – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

حلّوا المعادلات (53) – (58) التّالية.

(53) $2^{2x-6}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-6}$ (54) $(0.01)^{3-x}=10^{6x+2}$ (55) $8^{x}=8^{-x}$

(56) $2^{2x}\cdot 5^{x}=400$ (57) $2^{x}+2^{x}=64$ (58) $\left(5\cdot 5^{2x}\right)^{3}=125$

حلّوا المعادلات (59) – (66) التّالية.

(59) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-x}=\frac{1}{49}$ (60) $\left(\frac{27}{64}\right)^{x}=\frac{9}{16}$ (61) $12^{x}=8\cdot 3^{x}$

(62) $100^{x+4}\cdot 100^{x-4}=10^{6x-3}$ (63) $4^{x-1}\cdot 4^{x+1}=8$ (64) $9^{x-1}\cdot 9^{3x-7}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

(65) $5^{2x}\cdot 5^{1-3x}=\left(\frac{1}{25}\right)^{-2}$ (66) $36^{x}\cdot 6^{2x-3}=\frac{1}{6}$

حلّوا المعادلات (67) – (74) التّالية.

(67) $4\cdot 2^{x}=64$ (68) $2\cdot 4^{x}=64$ (69) $5\cdot 2^{x}=80$ (70) $5\cdot 3^{x}=45$

(71) $4\cdot 5^{x}=500$ (72) $5\cdot 2^{2x+7}=1.25$ (73) $2\cdot 10^{2x-1}=200$ (74) $7\cdot 3^{2x-2}=63$

حلّوا المعادلات (75) – (80) التّالية.

(75) $2^{x}+2^{x+1}=24$ (76) $4^{x}+4^{x+1}=40$ (77) $2^{x+3}-2^{x-1}=30$

(78) $3^{x-1}+3^{x+1}=90$ (79) $4^{x+0.5}=1\frac{1}{2}-4^{x}$ (80) $9^{x-1.5}=30-9^{x-0.5}$

حلّوا المعادلات (81) – (86) التّالية.

(81) $3\cdot 2^{x}+5\cdot 2^{x+1}=52$ (82) $3^{x-1}+2\cdot 3^{x}=63$

(83) $\frac{1}{5}\cdot 5^{x+1}+25\cdot 5^{x-3}=750$ (84) $6^{x-1}+2\cdot 6^{x}-3\cdot 6^{x+1}=-570$

(85)★ $2\cdot 8^{2x-1}+3\cdot 8^{2x}-8^{2x+1}=-38$ (86)★ $2^{x+1}+2^{x-1}=3^{x}+2\cdot 3^{x-1}$

حلّوا المعادلات (87) – (92) التّالية.

(حلّ هذه المعادلات الأسّيّة يؤدّي إلى حلّ معادلاتٍ تربيعيّة.)

(87) $4^{x}-9\cdot 2^{x}+8=0$ (88) $9^{x}-4\cdot 3^{x+1}+27=0$

(89) $4^{2x+1}-3\cdot 4^{x+1}-16=0$ (90) $6\cdot 25^{x-1}-5^{x+1}-25=0$

(91) $2^{x}+2^{-x}=2.5$ (92) $3^{x+1}-3^{1-x}=8$

حلّوا المعادلات (93) – (101) التّالية (معادلات أساسها هو الثّابت e).

(93) $e^{x}=1$ (94) $e^{2x}=\frac{1}{e^{3}}$ (95) $\left(e^{2}\right)^{x-3}=e^{4-x}$

(96) $\left(e^{x-1}\right)^{2}=e^{-x+2}$ (97) $e\cdot e^{x+1}=\left(e^{3}\right)^{2-3x}$ (98) $\frac{e^{x}}{e^{2}}=e^{2x-1}\cdot e^{x-3}$

(99) $\left(e^{2x+1}\cdot e^{2-x}\right)^{2}=e^{6}$ (100) $e^{2x}-2e\cdot e^{x}+e^{2}=0$ (101) $e^{2x}-2e^{2}e^{x}+e^{4}=0$

© جميع الحقوق محفوظة لجابي يكوئيل – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

أجوبة نهائيّة

(1) $x=5$	(2) $x=4$	(3) $x=3$	(4) $x=\frac{3}{2}$	(5) $x=\frac{2}{3}$
(6) $x=\frac{1}{2}$	(7) $x=\frac{5}{2}$	(8) $x=0$	(9) $x=\frac{2}{3}$	(10) $x=-1$
(11) $x=-\frac{3}{2}$	(12) $x=-\frac{1}{2}$	(13) $x=-\frac{2}{3}$	(14) $x=\frac{5}{4}$	(15) $x=-\frac{2}{3}$
(16) $x=-\frac{3}{2}$	(17) $x=-2$	(18) $x=-\frac{4}{3}$	(19) $x=-\frac{1}{2}$	(20) $x=\frac{1}{2}$
(21) $x=\frac{5}{2}$	(22) $x=\frac{9}{2}$	(23) $x=-\frac{5}{2}$	(24) $x=\frac{7}{2}$	(25) $x=\frac{3}{2}$
(26) $x=\frac{5}{3}$	(27) $x=4$	(28) $x=-1$	(29) $x=-\frac{1}{2}$	(30) $x=-\frac{5}{2}$
(31) $x=-4$	(32) $x=-7$	(33) $x=2$	(34) $x=3$	(35) $x=-2$
(36) $x=3$	(37) $x=1$	(38) $x=-3$	(39) $x=-4$	(40) $x=9$
(41) $x=1$	(42) $x=-\frac{7}{2}$	(43) $x=2$	(44) $x=3$	(45) $x=-\frac{9}{2}$
(46) $x=3$	(47) $x=\frac{1}{2}$	(48) $x=\frac{5}{2}$	(49) $x=5$	
(50) $x_2=0\ ,\ x_1=-6$		(51) $x=1$	(52) $x_2=2\ ,\ x_1=-1$	
(53) $x=3$	(54) $x=-2$	(55) $x=0$	(56) $x=2$	(57) $x=5$
(58) $x=0$	(59) $x=-2$	(60) $x=\frac{2}{3}$	(61) $x=\frac{3}{2}$	(62) $x=\frac{3}{2}$
(63) $x=\frac{3}{4}$	(64) $x=\frac{5}{2}$	(65) $x=-3$	(66) $x=\frac{1}{2}$	(67) $x=4$
(68) $x=\frac{5}{2}$	(69) $x=4$	(70) $x=2$	(71) $x=3$	(72) $x=-\frac{9}{2}$
(73) $x=\frac{3}{2}$	(74) $x=2$	(75) $x=3$	(76) $x=\frac{3}{2}$	(77) $x=2$
(78) $x=3$	(79) $x=-\frac{1}{2}$	(80) $x=2$	(81) $x=2$	(82) $x=3$
(83) $x=4$	(84) $x=2$	(85) $x=\frac{1}{2}$	(86) $x=1$	
(87) $x_2=3\ ,\ x_1=0$		(88) $x_2=2\ ,\ x_1=1$		(89) $x=1$
(90) $x=2$	(91) $x_2=1\ ,\ x_1=-1$		(92) $x=1$	(93) $x=0$
(94) $x=-\frac{3}{2}$	(95) $x=\frac{10}{3}$	(96) $x=\frac{4}{3}$	(97) $x=\frac{2}{5}$	(98) $x=1$
(99) $x=0$	(100) $x=1$	(101) $x=2$		

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

ب. متباينات أُسّيّة

معطاةٌ المتباينة الأسّيّة: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

إذا كان $a > 1$، **عندها يتحقّق:**

$$f(x) > g(x)$$

إذا كان $0 < a < 1$، **عندها يتحقّق:** $f(x) < g(x)$

أمثلة محلولة

(1) نحلّ المتباينة التّالية: $2^{2x+1} \geq 2^{3x-2}$

أساس القوّة أكبر من 1، ولذا يتحقّق:

$$2x+1 \geq 3x-2$$

$$-x \geq -3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x \leq 3}$$

(2) نحلّ المتباينة التّالية: $(0.5)^{x^2} > (0.5)^{x+6}$

أساس القوّة أصغر من 1، ولذا يتحقّق:

$$x^2 < x+6$$

$$x^2 - x - 6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{-2 < x < 3}$$

(3) نحلّ المتباينة التّالية: $e^{x^2} \cdot e^{x} > e^{12}$

حسب قوانين القوى: $e^{x^2} \cdot e^{x} = e^{x^2+x}$

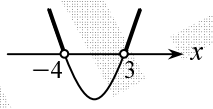
أي أنّنا نحصل على المتباينة: $e^{x^2+x} > e^{12}$

أساس القوّة e أكبر من 1 ولذا يتحقّق: $x^2 + x > 12$

$$x^2 + x - 12 > 0$$

حلّا المعادلة التّربيعيّة $x^2 + x - 12 = 0$ هما: $x_1 = -4$, $x_2 = 3$

نستعين برسمٍ بيانيٍّ تقريبيٍّ لوصف المجال المطلوب في المتباينة:



نحصل على: $x > 3$ أو $x < -4$.

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ

حلّوا المتباينات **(1)** – **(13)** التّالية.

(1) $3^x < 9$	**(2)** $4^x > 8$	**(3)** $5^x \leq \frac{1}{25}$
(4) $2^x < 0.5$	**(5)** $0.25^x \geq 0.5$	**(6)** $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 27$
(7) $0.1^x - 100 > 0$	**(8)** $9^{-2x} - 27 \leq 0$	**(9)** $0.5^{2x+1} > 4^{x-0.5}$
(10) $4 \cdot 2^x > 8^{2-x}$	**(11)** $e^{3x-1} + 1 > 0$	**(12)** $e^{3x-1} + 1 < 0$

(13) $e^{x^2} \cdot e^{x} > e^{20}$

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

حلّوا المتباينات (14) – (18) التّالية.

(14) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-6} \geq \left(\frac{4}{9}\right)^{x+1}$

(15) ★ $2^x \cdot 5^{x+1} \leq 5$

(16) ★ $2^x + 3 \cdot 2^x > 32$

(17) ★ $5^x + 5^{x+1} \leq 1.2$

(18) $2^x + 4 > 0$

حلّوا المتباينات (19) – (28) التّالية.

(19) $8^x > 4^{x+2}$

(20) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}$

(21) $3^{2x-2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x-7}$

(22) $25^x \geq 5^{x^2}$

(23) $1.5^{x^2-4x} > \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}$

(24) $4 \cdot 2^{2x-5} < 8^{x-2}$

(25) $e^{2x} > e^2$

(26) $e^{x^2-5x+2} < e^{-2}$

(27) $e^{2x^2-x+3} \geq e^{4x+1}$

(28) $e^{2x} \cdot \left(e^x\right)^{2-x} \leq e^{5-2x}$

أجوبة نهائيّة

(1) $x < 2$ **(2)** $x > 1.5$ **(3)** $x \leq -2$ **(4)** $x < -1$ **(5)** $x \leq \frac{1}{2}$

(6) $x > -3$ **(7)** $x < -2$ **(8)** $x \geq -\frac{3}{4}$ **(9)** $x < 0$ **(10)** $x > 1$

(11) كلّ x. **(12)** ϕ **(13)** $x < -5$, $x > 4$ **(14)** $x \leq 4$

(15) $x \leq 0$ **(16)** $x > 3$ **(17)** $x \leq -1$ **(18)** كلّ x. **(19)** $x > 4$

(20) $x > 7$ **(21)** $x < 3$ **(22)** $0 \leq x \leq 2$ **(23)** $x > 4$ أو $x < -1$

(24) $x > 3$ **(25)** $x > 1$ **(26)** $1 < x < 4$ **(27)** $x \leq 0.5$, $x \geq 2$

(28) $x \leq 1$, $x \geq 5$

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

الفصل 4: تحويلات على الدّالّة الأُسّيّة

في موضوع مقدّمة للتّحليل الرّياضيّ في صفَّيّ العاشر والحادي عشر، تعلّمنا الاستعانة بالتّحويلات في دوالّ البولينومات، دوالّ الجذر التّربيعيّ ودوالّ قسمة (نسبيّة) من الصّورة $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.
لمعرفة خصائص الدّالّة الجديدة (النّاتجة بعد التّحويل)، ودون الاستعانة بأدوات الحساب التّفاضليّ، سنقوم بذلك مرّةً أخرى في الصّفّ الثّاني عشر، ولكن سيتمّ ذلك بالنّسبة للدّوالّ الأسّيّة (وأيضًا بالنّسبة لدوالّ جديدة سنتعرّف عليها لاحقًا).

توضيح محوسب: تحويلات على الدّوالّ الأسّيّة

أُدخلوا إلى الموقع www.mishbetzet.co.il ← 4 وحدات تعليميّة ← الصّفّ الثّاني عشر ← فعّاليّات محوسبة تتبع لهذا الكتاب.

(أ) إضغطوا على التّطبيق: **"أ- إزاحة أفقيّة وإزاحة عموديّة لدوالّ أسّيّة"**.
أمامكم الرّسوم البيانيّة للدّوالّ التّالية:
$f(x)=e^x$ ، $g(x)=f(x)+\mathrm{k}$ ، $h(x)=f(x-\mathrm{p})$ (k وَ p هما بارامتران).

1. أكتبوا التّعبير الجبريّ للدّالّتَيْن $g(x)$ وَ $h(x)$.
(أي، عبّروا عن كلّ واحدة من الدّالّتَيْن بواسطة x).
2. يوجد على لوح الرّسم شريطان لقيم k وَ p.
غيّروا قيم k وقيم p كما ترغبون، وتابعوا التّغييرات الّتي تطرأ على الرّسوم البيانيّة الّتي تصف هذه الدّوالّ.
3. **بالنّسبة لكلّ واحدة من الدّالّتَيْن** $g(x)$ وَ $h(x)$،
تحقّقوا واكتبوا أيّ الخصائص التّالية لا تتغيّر في الإزاحة:
تصاعد رتيب، إحداثيات نقطة التّقاطع مع محور y، مجال إيجابيّة الدّالّة، خطّ التّقارب الأفقيّ.
4. أكتبوا تعبيرًا جبريًّا للدّالّة الّتي تُمثّل إزاحة أفقيّة للدّالّة $f(x)$، بعددِ وحداتٍ كما ترغبون – إلى اليمين.
بأيّ البارامترات ستستعينون، وما هو الشّرط الّذي يجب أن يحقّقه هذا البارامتر؟
5. أكتبوا تعبيرًا جبريًّا للدّالّة الّتي تُمثّل إزاحة عموديّة للدّالّة $f(x)$، بعدد وحداتٍ كما ترغبون – إلى الأسفل.
بأيّ البارامترات ستستعينون، وما هو الشّرط الّذي يجب أن يحقّقه هذا البارامتر؟

(ب) إضغطوا على التّطبيق الّذي اسمُهُ: **"ب- تمدّد أو إنكماش عموديّ (رأسيّ) للدّالّة الأسّيّة"**.
أمامكم الرّسوم البيانيّة للدّوالّ: $f(x)=e^x$ ، $m(x)=\mathrm{b}\cdot f(x)$ ، $n(x)=\mathrm{c}\cdot f(x)$
b وَ c هما بارامتران. قيم b تقع بين 0 وَ 1، بينما قيم c أكبر من 1.

1. أكتبوا التّعبير الجبريّ للدّالّتَيْن $m(x)$ وَ $n(x)$.
(أي، عبّروا عن كلّ واحدة من الدّالّتَيْن بواسطة x).
2. يوجد على لوح الرّسم شريطان لقيم b وَ c.
إستعينوا بشريطَيّ القيم، وغيّروا قيم b وقيم c كما تشاؤون.
تابعوا التّغييرات الّتي تطرأ على الرّسوم البيانيّة الّتي تصف هذه الدّوالّ.
3. **بالنّسبة لكلّ واحدة من الدّالّتَيْن** $m(x)$ وَ $n(x)$،
تحقّقوا واكتبوا أيّ الخصائص التّالية لا تتغيّر في الإزاحة:
تصاعد رتيب، إحداثيات نقطة التّقاطع مع محور y، مجال الإيجابية للدّالّة، خطّ التّقارب الأفقيّ.
4. أين تتواجد الرّسوم البيانيّة الّتي تُمثّل الدّوالّ $y=\mathrm{a}\cdot f(x)$، بالمقارنة مع الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)=e^x$:
(i) عندما يكون $\mathrm{a}>1$؟ (ii) عندما يكون $0<\mathrm{a}<1$؟

يتبع في الصّفحة التّالية ◄◄◄

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّفّ الثّاني عشر – المنهج الجديد

تكملة – توضيح محوسب: تحويلات في الدّالّة الأُسّيّة

(ج) إضغطوا على التّطبيق الّذي اسمُهُ: **"ج- إنعكاسات للرّسم البيانيّ للدّالّة الأُسّيّة"**.

أمامكم الرّسوم البيانيّة للدّوالّ: $f(x)=e^x$ ، $t(x)=-f(x)$ ، $s(x)=f(-x)$.

1. أكتبوا التّعبير الجبريّ للدّالّتَيْن $t(x)$ وَ $s(x)$.
2. حدّدوا أيًّا من بين الدّالّتَيْن هو إنعكاسٌ للرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ بالنّسبة للمحور x ، وأيًّا منهما هو إنعكاسٌ للدّالّة بالنّسبة للمحور y ، وميّزوا لون الرّسم البيانيّ لكلّ واحدة منهما.
3. إستعينوا بالتّطبيق وبقائمة الخصائص الّتي تظهر في أسفل المهمّة، وأكملوا في دفاتركم:

(أ) إنعكاس بالنّسبة للمحور x للدّالّة $f(x)$: إسم الدّالّة _____

ما الّذي لم يتغيّر (في قائمة الخصائص): _____ ماذا تغيَّر: _____

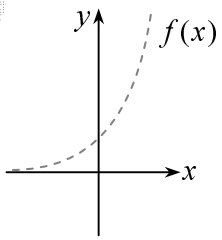
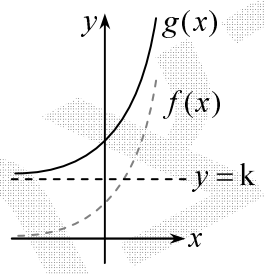
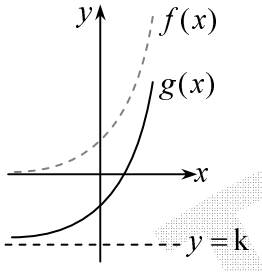
(ب) إنعكاس بالنّسبة للمحور y للدّالّة $f(x)$: إسم الدّالّة _____

ما الّذي لم يتغيّر (في قائمة الخصائص): _____ ماذا تغيَّر: _____

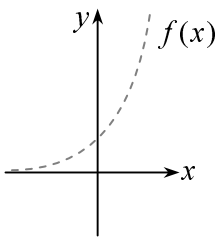
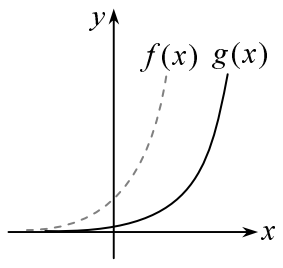
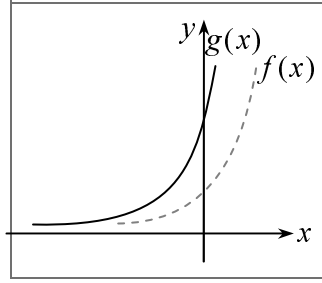
(تصاعد/تنازل، إحداثيّات نقطة التّقاطع مع المحور y ، المجال الموجب/السّالب, خطّ التّقارب الأفقيّ)

إجمال: تحويلات في الدّالّة $f(x)=e^x$

إزاحة عموديّة

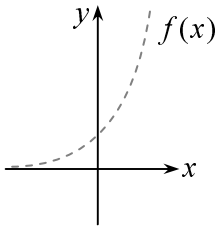
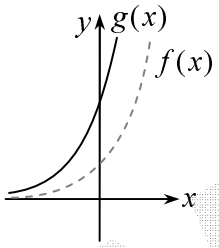
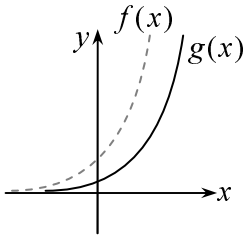
الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)=e^x$	تعبير جبريّ لإزاحة عموديّة (إلى الأعلى / الأسفل) بـ $\|k\|$ وحدات	مثال لرسم بيانيّ ناتج عن الإزاحة العموديّة	
		إزاحة إلى الأعلى $k>0$	إزاحة إلى الأسفل $k<0$
 معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ: $y=0$	$g(x)=f(x)+k$ $g(x)=e^x+k$ معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ: $y=k$		

إزاحة أفقيّة

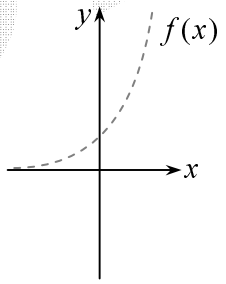
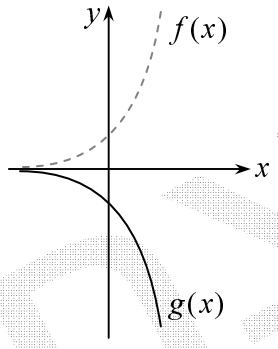
الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)=e^x$	تعبير جبريّ لإزاحة أفقيّة (إلى اليمين / اليسار) بـ $\|p\|$ وحدات	مثال لرسم بيانيّ ناتج عن الإزاحة الأفقيّة	
		إزاحة إلى اليمين $p>0$	إزاحة إلى اليسار $p<0$
	$g(x)=f(x-p)$ $g(x)=e^{(x-p)}$		

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

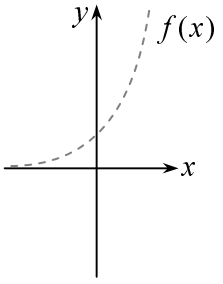
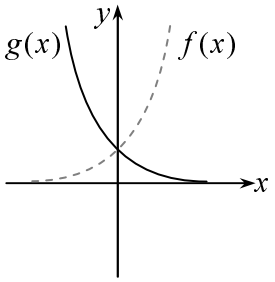
تمدّد عموديّ / انكماش عموديّ

الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)=e^x$	تعبير جبريّ لتمدّد عموديّ أو إنكماش عموديّ بـ a مرّات $(a>0)$	مثال لرسم بيانيّ ناتج عن تمدّد/إنكماش	
		تمدّد عندما $a>1$	إنكماش عندما $0<a<1$
	$g(x)=a\,f(x)$ $g(x)=a\,e^x$		

انعكاس بالنّسبة للمحور x

الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)=e^x$	تعبير جبريّ لانعكاس بالنّسبة للمحور x	مثال لرسم بيانيّ ناتج عن إنعكاس بالنّسبة للمحور x
	$g(x)=-f(x)$ $g(x)=-e^x$	

انعكاس بالنّسبة للمحور y

مثال للرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)=e^x$	تعبير جبريّ لانعكاس بالنّسبة للمحور y	مثال لرسم بيانيّ ناتج عن إنعكاس بالنّسبة للمحور y
	$g(x)=f(-x)$ $g(x)=e^{-x}$	

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

أمثلة محلولة

(1) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=e^x$.

(أ) ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟

(ب) ما هي إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور y ؟

(ج) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة ؟

(د) أُرسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة $f(x)$.

معطاةٌ الدّالّة $g(x)$ الّتي تُحقّق $g(x)=f(-x)$.

(هـ) ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(و) ما هو التّحويل الّذي تمّ تفعيله على الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ، للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ز) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ح) أُرسموا في **نفس** هيئة المحاور الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$.

(ط) ما هي إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن ؟

<u>الحلّ:</u>

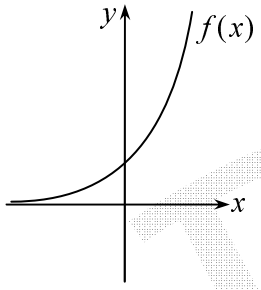
(أ) $f(x)=e^x$ هي دالّة معرّفة لكلّ x .

(ب) نعوّض $x=0$ في الدّالّة: $f(0)=e^0=1$.

أي أنّ إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور y هي $(0,1)$.

(ج) عندما يقترب x إلى زائد لانهاية، قيم y تكبر أكثر فأكثر بشكلٍ غير محدودٍ،
ولذا، لا يوجد خطّ تقاربٍ أفقيٌّ في هذا الاتّجاه.
عندما يقترب x إلى ناقص لانهاية، تقترب قيم y إلى الصّفر،
ولذا فإنّ معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ هي $y=0$.

(د) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.

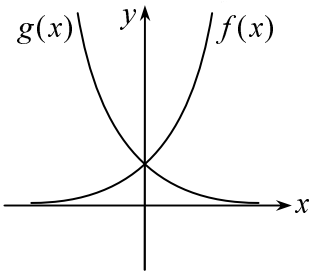


(هـ) $g(x)=e^{-x}$

(و) تحويل بالنّسبة للمحور y .

(ز) عندما يقترب x إلى زائد لانهاية، تقترب قيم y إلى صفر،
ولذا فإنّ معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ هي $y=0$.

(ح) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.



(ط) في نقطة تقاطع الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن، يتحقّق: $e^x=e^{-x}$.

وينبع من هذا: $x=-x$

أي : $2x=0$

ولذا في نقطة التّقاطع: $x=0$

لذا، الإحداثيّ y لهذه النّقطة هو $y=e^0=1$.

ولذا، إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن هي $(0,1)$.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(2) معطاةٌ الدّوالّ التّالية $f(x)=e^{x}$ ، $g(x)=e^{x+2}$ ، $h(x)=-g(x)$.

(أ) ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(ب) ما هما التّحويلان اللّذان تمّ تفعيلهما على الدّالّة $f(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(ج) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(د) أُرسموا في **نفس** هيئة المحاور الرّسوم البيانيّة للدّوالّ $f(x)$ ، $g(x)$ وَ $h(x)$.

(هـ) هل هناك نقطة تقاطع بين الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ والرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟ علّلوا.

(و) هل هناك نقطة تقاطع بين الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ والرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ؟ علّلوا.

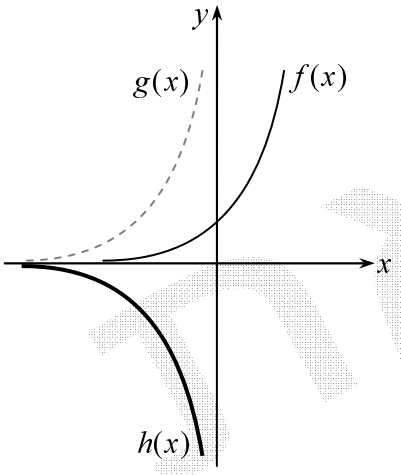
<u>الحلّ:</u>

(أ) $h(x)=-e^{x+2}$

(ب) إزاحة أفقيّة وحدتَيْن إلى اليسار، وانعكاس حول المحور x .

(ج) معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ هي $y=0$.

(د) نتج الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ عن إزاحة الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ وحدتَيْن إلى اليسار، بحيث حصلنا على الرّسم البيانيّ المتقطّع $g(x)$ (أُنظروا الرّسم).



بعد هذه الإزاحة، حصلنا على الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ من اِنعكاس حول المحور x للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$.

الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ هو الرّسم البيانيّ الأسود الغامق في الرّسم.

(هـ) بحسب الرسم البياني، يبدو أنه لا توجد نقطة تقاطع بين الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن $h(x)$ وَ $g(x)$.

نُبيّن هذا بصورةٍ جبريّة أيضًا:

لو كان هناك نقطة تقاطع كهذه، كان سيتحقّق بالنّسبة لها: $g(x)=h(x)$

$$e^{x+2}=-e^{x+2}$$

التّعبير الموجود في الطّرف الأيسر موجبٌ لكلّ x ، والتّعبير في الطّرف الأيسر سالبٌ لكلّ x ، لذا، لا يوجد حلٌّ للمعادلة، ولذا، لا توجد نقطة تقاطع بين الرّسمَيْن البيانيَّيْن لهاتَيْن الدّالّتَيْن.

(و) كي نتحقّق، هل هناك نقطة تقاطع بين الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن $g(x)$ وَ $f(x)$ ،

نساوي بين التّعبيرَيْن: $f(x)=g(x)$

ونحصل على: $e^{x}=e^{x+2}$

من هنا، نحصل على المعادلة: $x=x+2$

الّتي لا يوجد لها حلٌّ. لذا، لا توجد نقطة تقاطع بين الرّسمَيْن البيانيَّيْن لهاتَيْن الدّالّتَيْن.

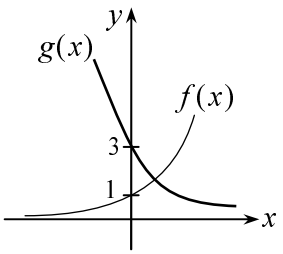
© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(3) معطى الدّالّتان $f(x)=e^x$, $g(x)=3e^{-x}$.
الدّالّة $g(x)$ هي ناتج تحويلَيْن، أُجرِيا على الدّالّة $f(x)$.
(أ) صفوا بكلماتٍ التّحويلَيْن اللّذَيْن أُجرِيا على الدّالّة $f(x)$ للحصول على الدّالّة $g(x)$.
(ب) أُرسموا **في نفس** هيئة المحاور الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$.

الحلّ:

(أ) التّحويلان اللّذان أُجرِيا على الدّالّة: $f(x)=e^x$ هما:
اِنعكاس حول المحور y : $h(x)=f(-x)$ ، أي $h(x)=e^{-x}$.
تمدّد عموديّ بِـ 3 أضعاف: $g(x)=3h(x)$
لذا، حصلنا على الدّالّة: $g(x)=3e^{-x}$

(ب) أُنظروا الرّسم.

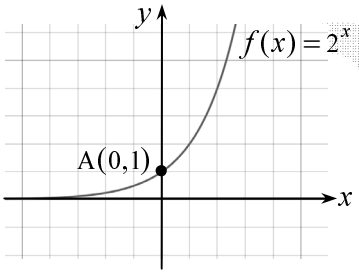


(4) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=2^x$.
(أ) أُرسموا الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ، وجدوا إحداثيّات نقطة التّقاطع A للرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ مع المحور y .
في كلّ واحدٍ من البنود (ب) – (هـ) التّالية أُرسموا الرّسم البيانيّ للدّالّة المعطاة، وأشيروا أيضًا في كلّ رسم، إلى أين تمّ إزاحة النّقطة A بعد تفعيل التّحويل الموصوف في نفس البند.

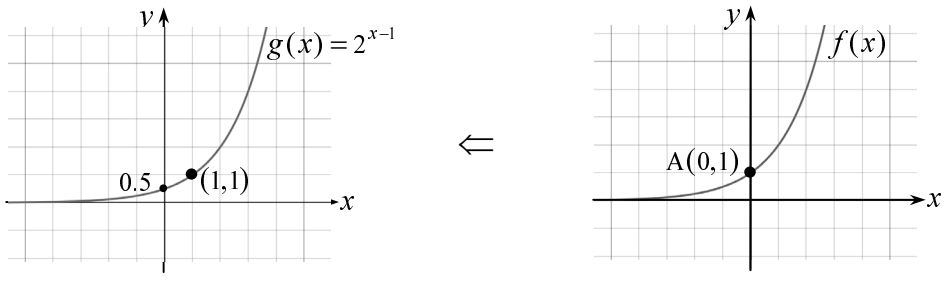
(ب) $g(x)=2^{x-1}$ (ج) $h(x)=-3\cdot 2^{x-1}$
(د) $k(x)=-3\cdot 2^{x-1}+5$ (هـ) $m(x)=\left|k(x)\right|$

الحلّ:

(أ) أُشير إلى نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ مع المحور y، بدائرة سوداء مغلقة، وإحداثيّاتها هي $A(0,1)$. في كلّ واحدٍ من البنود التّالية، نُشير بدائرة مماثلة للدّائرة أعلاه إلى الموقع الجديد لهذه النّقطة بعد تفعيل التّحويل (الإزاحة) الموصوف فيه، وبدائرة مماثلة ولكن أصغر إلى نقطة التّقاطع الجديدة مع المحور y .



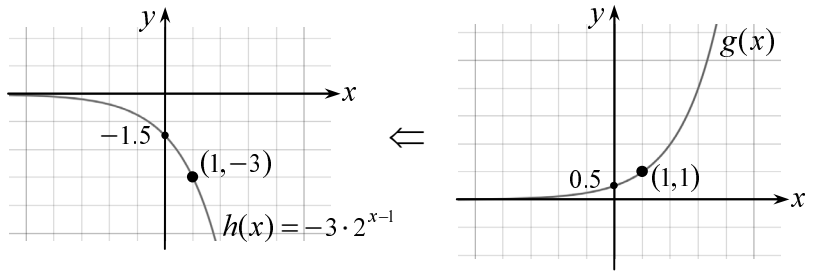
(ب) الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ينتج عن إزاحة أفقيّة للرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ وحدة واحدة إلى اليمين.



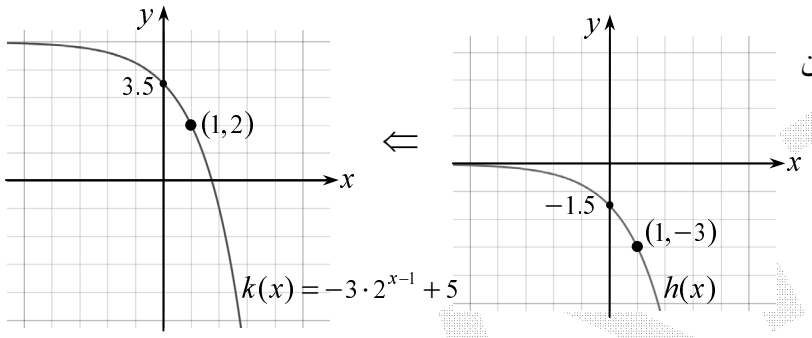
تكملة الحلّ في الصّفحة التّالية ‹‹‹

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

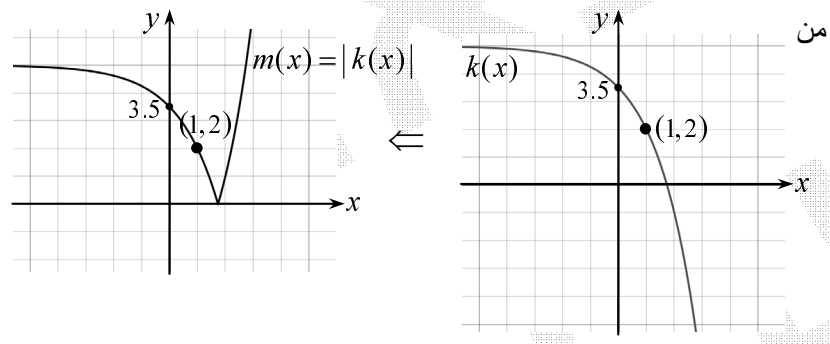
(ج) الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ينتج من اِنعكاسٍ حول المحور x للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ، ومن ثمّ تمدّد عموديّ بـِ 3 أضعاف.



(د) الرّسم البيانيّ للدّالّة $k(x)$ ينتج من إزاحة عموديّة للرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ 5 وحدات إلى الأعلى.



(هـ) الرّسم البيانيّ للدّالّة $m(x)$ ينتج من اِنعكاس حول المحور x للرّسم البيانيّ للدّالّة $k(x)$ ، فقط بالنّسبة لقيم x الّتي بالنّسبة لها $k(x)<0$.



(5) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

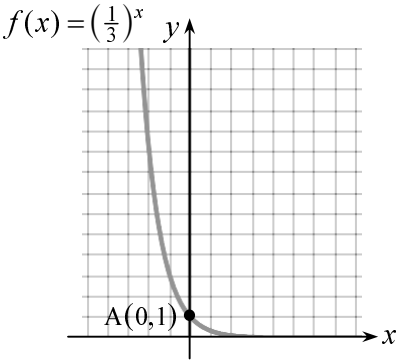
(أ) أُرسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة $f(x)$ ، وجدوا إحداثيّات نقطة التّقاطع A للرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ مع المحور y .

في كلّ واحدٍ من البنود (ب) – (د) التّالية أُرسموا الرّسم البيانيّ للدّالّة، وأَشيروا أيضًا في كلّ رسم، إلى أين تمّ إزاحة النّقطة A بعد تفعيل التّحويل الموصوف في هذا البند.

(ب) $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ (ج) $h(x)=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ (د) $k(x)=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-4$.

<u>الحلّ:</u>

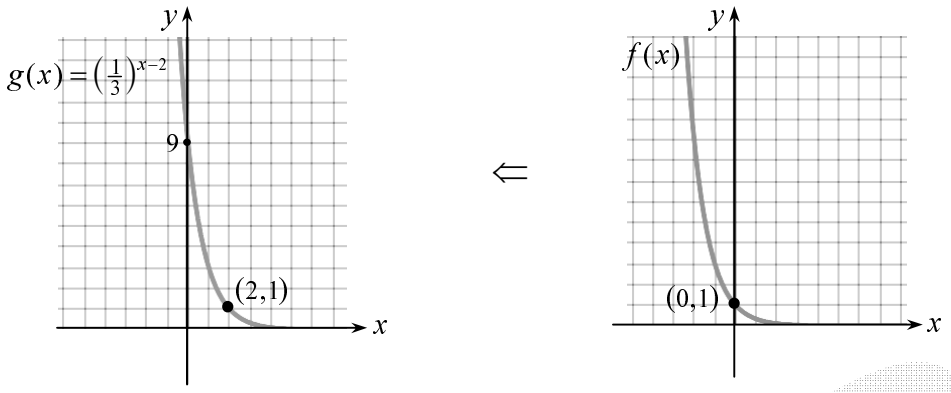
(أ) أُشير إلى نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ مع المحور y ، بدائرة سوداء مغلقة، وإحداثيّاتها هي $A(0,1)$. في كلّ واحدٍ من التّحويلات الموصوفة في كلّ بند، نشير بدائرة سوداء مماثلة للدّائرة أعلاه إلى موقع النّقطة A الّتي أُزيحت بعد تفعيل التّحويل، ونشير بدائرة مماثلة ولكن أصغر، إلى نقطة التّقاطع الجديدة مع المحور y .



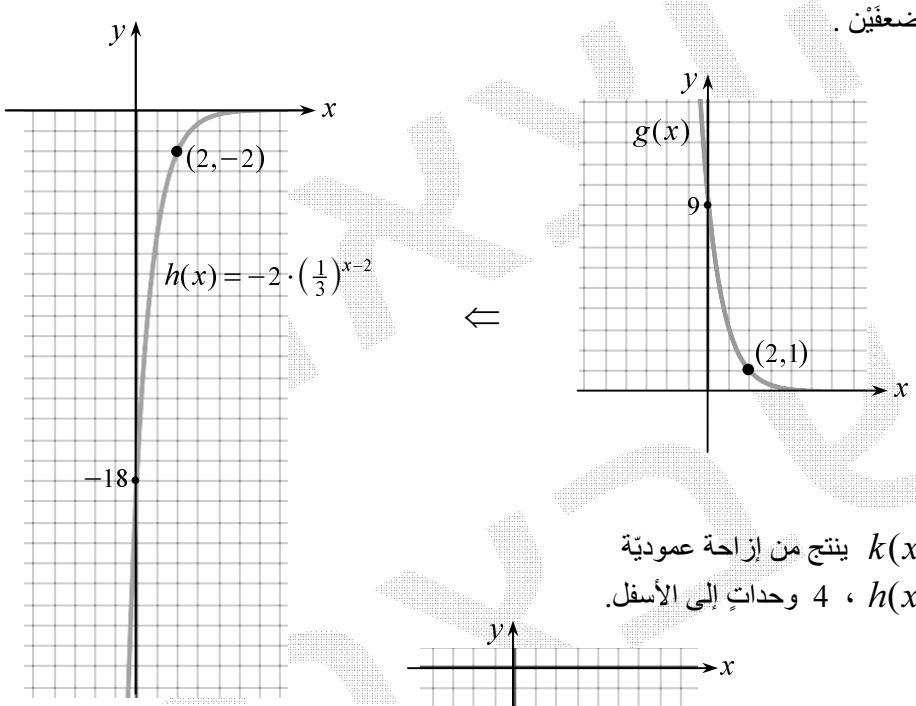
تكملة الحلّ في الصّفحة التّالية ◄◄◄

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

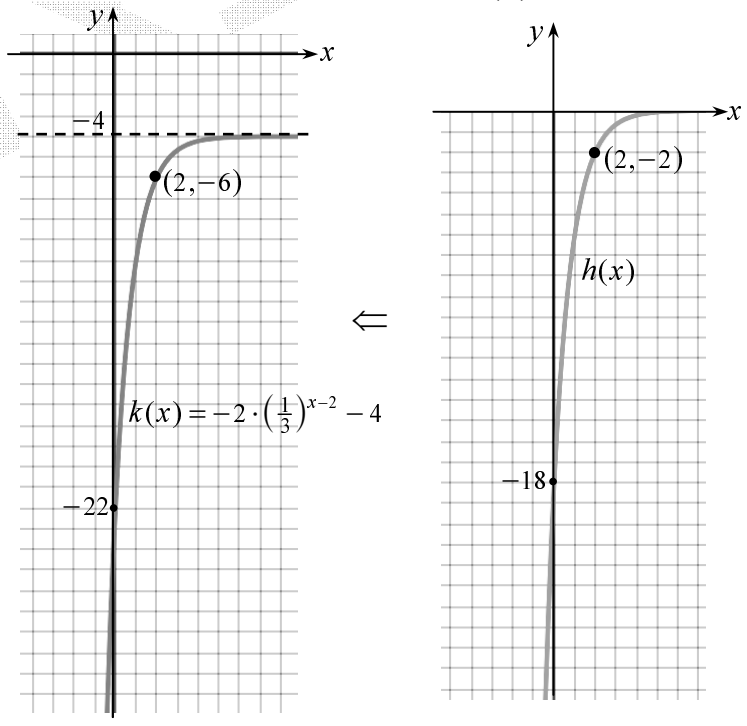
(ب) الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ينتج من إزاحة أفقيّة للدّالّة $f(x)$ ، وحدتان إلى اليمين.



(ج) الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ينتج من انعكاسٍ حول المحور x للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ، ومن ثمّ تمدّدٍ عموديٍّ بضعفَيْن .



(د) الرّسم البيانيّ للدّالّة $k(x)$ ينتج من إزاحة عموديّة للرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ، 4 وحداتٍ إلى الأسفل.



© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

تمارين للعمل الذّاتيّ

(1) معطى الدّالّتان $f(x)=e^x$ وَ $g(x)=-f(x)$.

(أ) ما هو التّحويل الّذي تمّ تفعيله على الرّسم البيانيّ الدّالّة $f(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ب) ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ج) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(د) أُرسموا في **نفس** هيئة المحاور الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$.

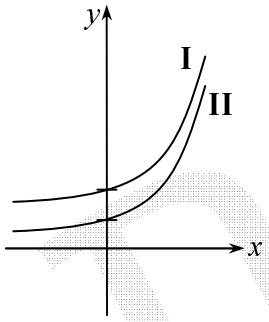
(2) معطى الدّالّتان $f(x)=e^x$ وَ $g(x)=f(x)+1$.

(أ) ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ب) ما هو مجال تعريف كلّ واحدة من هاتَيْن الدّالّتَيْن ؟

(ج) ما هو التّحويل الّذي تمّ تفعيله على الرّسم البيانيّ الدّالّة $f(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(د) أمامكم رسمٌ بيانيٌّ للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$.



لائموا كلّ دالّة للرّسم البيانيّ المناسب لها.

(هـ) ما هي إحداثيّات نقطة التّقاطع مع المحور y للرّسم البيانيّ للدّالّة:

(i) $f(x)$ ؟

(ii) $g(x)$ ؟

(و) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ لكلّ واحدة من الدّالّتَيْن ؟

(ز) اِشرحوا لماذا الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ مماثلٌ للرّسم البيانيّ للدّالّة $|g(x)|$.

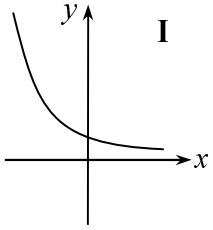
(3) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=e^{-x}$.

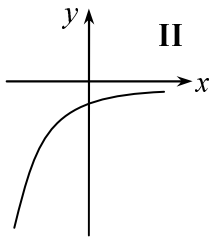
(أ) ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟

(ب) ما هي إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور y ؟

(ج) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ؟

(د) أيٌّ من بين الرّسمَيْن **I** أو **II** يصف الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ؟





معطاةٌ الدّالّة $g(x)=f(x)-5$.

(هـ) ما هو التّحويل الّذي تمّ تفعيله على الرّسم البيانيّ الدّالّة $f(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(و) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

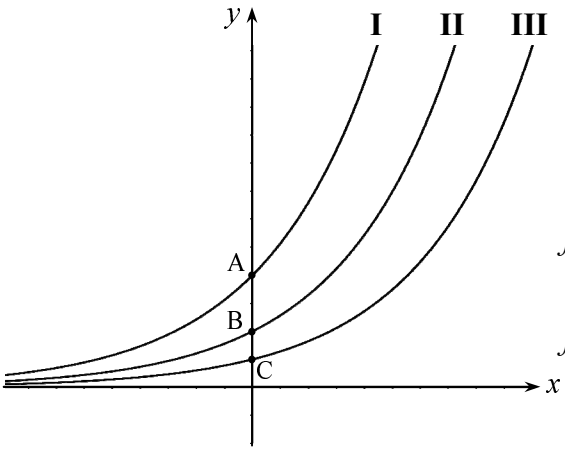
(ز) أُرسموا في **نفس** هيئة المحاور الرّسم البيانيَّ للدّالّة $g(x)$ والرّسم البيانيَّ للدّالّة $f(x)$.

(ح) أُرسموا الرّسم البيانيّ التّقريبيّ للدّالّة $h(x)=|g(x)|$.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(4) معطى أمامكم الرّسمَيْن البيانيَّيْن **I** – **III** للدّالّتَيْن:

$f(x)=e^{0.5x}$ ، $g(x)=2e^{0.5x}$ ، $h(x)=\frac{1}{2}e^{0.5x}$.



(أ) لائموا كلّ دالّة للرّسم البيانيّ المناسب لها.

(ب) أُكتبوا إحداثيّات النّقاط A ، B ، C .

(ج) ما هو التّحويل الّذي تمّ تفعيله على الرّسم البيانيّ الدّالّة $f(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(د) ما هو التّحويل الّذي تمّ تفعيله على الرّسم البيانيّ الدّالّة $f(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(5) معطى الدّالّتان $f(x)=e^{x}$ وَ $g(x)=e^{-x}$.

(أ) ما هو مجال تعريف كلّ واحدة من هاتَيْن الدّالّتَيْن ؟

(ب) (i) ما هي إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$ مع المحور y ؟

(ii) ما هي إحداثيّات نقطة التّقاطع بين الرّسمَيْن البيانيَّيْن ؟

(ج) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ لكلّ واحدة من الدّالّتَيْن المعطتَيْن ؟

معطاةٌ الدّالّة $h(x)=0.25f(-x)$.

(د) أُكتبوا التّعبير الجبريّ للدّالّة $h(x)$.

(هـ) ما هما التّحويلان اللّذان تمّ تفعيلهما على الرّسم البيانيّ الدّالّة $f(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(و) ما هو التّحويل الّذي تمّ تفعيله على الرّسم البيانيّ الدّالّة $g(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(ز) (i) ما هي إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ مع المحور y ؟

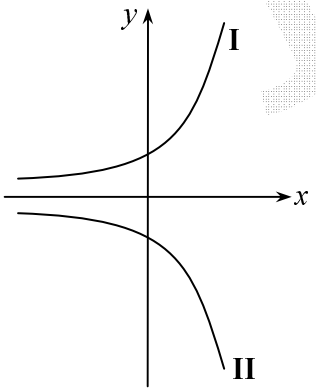
(ii) أُرسموا في **نفس** هيئة المحاور الرّسوم البيانيّة للدّوالّ الثّلاث $f(x)$, $g(x)$ وَ $h(x)$.

(ح) اِختاروا وأكملوا في دفاتركم الإجابة الصّحيحة:

نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ مع الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ تقع:

(1) على يمين المحور y . (2) على يسار المحور y . (3) على المحور y .

(6) معطى الرّسمان البيانيّان للدّالّتَيْن $f(x)=e^{x}$ وَ $g(x)=-f(x)$.



(أ) لائموا لكلّ واحدٍ من الرّسمَيْن **I** – **II** الدّالّة الّتي يصفها.

معطاةٌ الدّالّة $h(x)=g(x+1)$.

(ب) ما هو التّحويل الّذي أُجرِيَ على الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(ج) بيّنوا أنّ النّقطة الّتي إحداثيّاتها $(-1,-1)$ تقع على الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$.

(د) أُرسموا الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$.

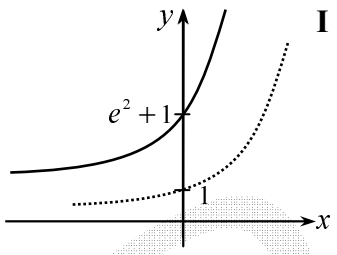
(هـ) هل يوجد للمستقيم الّذي معادلته $y=x$ ، نقطة تقاطع في الرّبع الثّالث مع الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ؟ إذا أجبتم نعم، أكتبوا إحداثيّات هذه النّقطة.

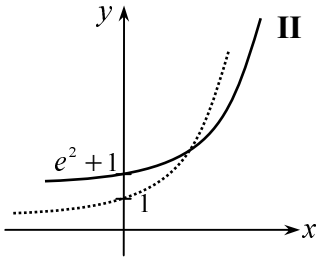
© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(7) معطاةٌ الدّوالّ $f(x)=e^x$ ، $g(x)=f(x)+1$ وَ $h(x)=g(x+2)$.

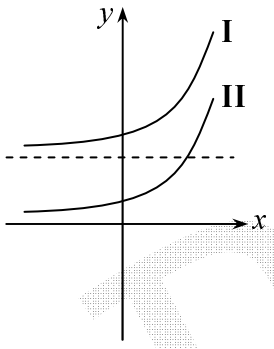
(أ) بيّنوا أنّه لا يوجد حلٌّ للمعادلة $e^{x+2}+1=e^x$.

(ب) حدّدوا بأيٍّ من الرّسمَيْن **I** أو **II** يوجد وصفٌ للرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $h(x)$، في **نفس** هيئة المحاور. حدّدوا أيضًا في نفس الرّسم، ما هي الدّالّة الّتي يمثّلها المنحنى المتقطّع.





(8) معطى أمامكم الرّسمان البيانيّان للدّالّتَيْن $f(x)=e^x$ وَ $g(x)=f(x)+3$



(أ) لائموا كلّ دالّةٍ للرّسم البيانيّ الّذي يصفها.

(ب) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

معطاةٌ الدّالّة $h(x)=-g(x)$.

(ج) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(د) أرسموا الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ بما في ذلك خطّها التّقاربيّ.

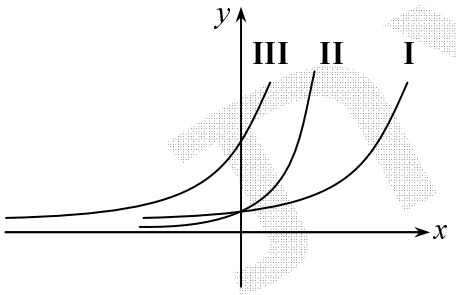
(هـ) هل يوجد حلٌّ للمعادلة $h(x)=\mathrm{k}$ إذا كان:

$\mathrm{k}=8$ (*i*) $\mathrm{k}=-3$ (*ii*) $\mathrm{k}=-8$ (*iii*) ؟

علّلوا إجابتكم بواسطة الرّسم البيانيّ الّذي رسمتموه في البند (ج).

(9) معطاةٌ أمامكم الرّسوم البيانيّة للدّوالّ

$f(x)=e^x$ ، $g(x)=f(x+4)$ وَ $k(x)=7^x$.



(أ) لائموا كلّ دالّةٍ للرّسم البيانيّ الّذي يصفها.

معطاةٌ الدّالّة $h(x)=g(-x)$.

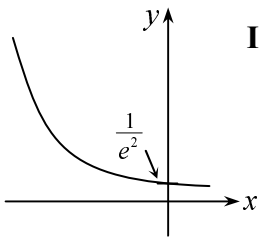
(ب) أرسموا الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$.

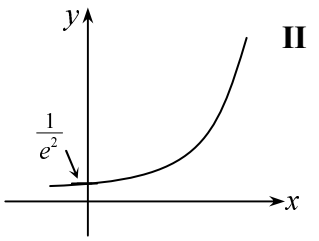
(10) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=e^x$ ومعطاةٌ الدّالّة $g(x)=e^{x-2}$.

(أ) جدوا إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ مع المحور y .

(ب) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ج) أيٌّ من بين الرّسمَيْن **I** أو **II** ، يصف الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟





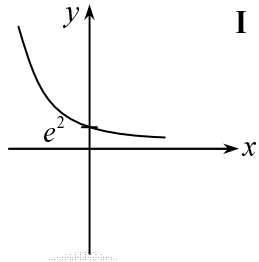
© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(11) معطى الدّالّتان $f(x)=e^{x}$ وَ $g(x)=e^{-x+2}$.

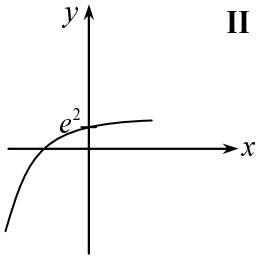
(أ) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ب) أيٌّ من بين الرّسمَيْن **I** أو **II** ، يصف الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

I



II



(ج) جدوا إحداثيّات نقطة التّقاطع بين الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن المعطتَيْن.

(12) معطى الدّالّتان $f(x)=e^{x}$ وَ $g(x)=-e^{x-2}$.

(أ) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ب) هل توجد نقاط تقاطع بين الرّسمَيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن المعطتَيْن ؟

علّلوا إجابتكم (بطريقةٍ جبريّة أو بطريقةٍ بيانيّة).

(13) (أ) أُرسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة $f(x)=3^{x}$.

(ب) أُرسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة $g(x)=3^{x-1}$.

(ج) أُرسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة $h(x)=-2\cdot 3^{x-1}$.

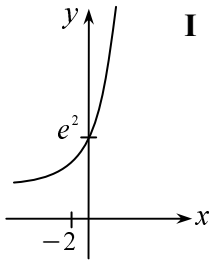
(د) أُرسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة $q(x)=-2\cdot 3^{x-1}+4$.

(هـ) الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ يقطع المحور y في النّقطة $\mathrm{A}(0,1)$.

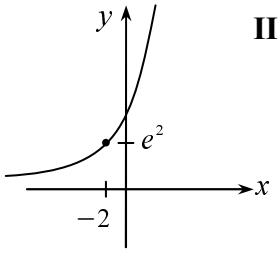
أكتبوا بالنّسبة لكلّ واحدٍ من البنود (ب) – (د)، إلى أين أُزيحت النّقطة A بعد تفعيل التّحويل على الدّالّة $f(x)$ ، الموصوفة في نفس البند.

(14) أيّ الرّسوم البيانيّة التّالية يصف الدّالّة $g(x)=-e^{x+2}$ ؟ علّلوا.

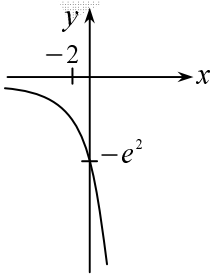
I



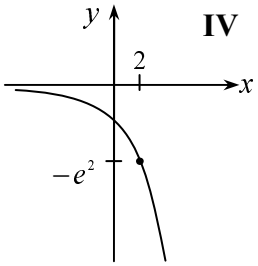
II



III

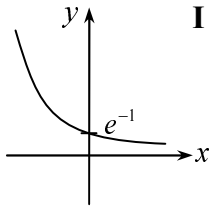


IV

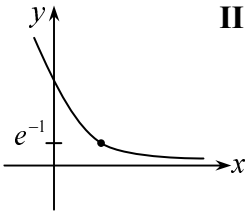


(15) أيّ الرّسوم البيانيّة التّالية يصف الدّالّة $g(x)=e^{-x-1}$ ؟ علّلوا.

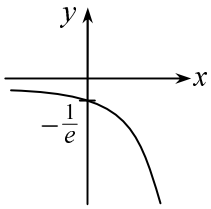
I



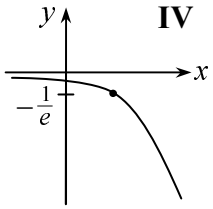
II



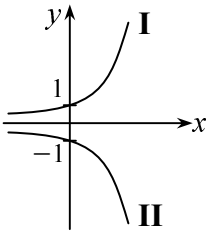
III



IV



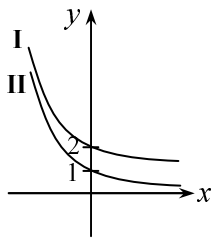
© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد



(16) معطى الدّالّتان $f(x)=5^x$ وَ $g(x)=-f(x)$.

(أ) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ب) في الرّسم أمامكم، يظهر وصفٌ بيانيٌّ للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$.
لائموا كلّ دالّة للرّسم البيانيّ الّذي يصفها.



(17) معطى الدّالّتان $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ وَ $g(x)=f(x)+1$.

(أ) ما هو مجال تعريف كلّ واحدة من الدّالّتَيْن المعطتَيْن ؟

(ب) في الرّسم أمامكم، يظهر وصفٌ بيانيٌّ للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$.
لائموا كلّ دالّة للرّسم البيانيّ الّذي يصفها.

(ج) ما هي إحداثيّات نقطة التّقاطع مع المحور y للرّسم البيانيّ للدّالّة:

(i) $f(x)$ ؟

(ii) $g(x)$ ؟

(د) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ لكلّ واحدة من الدّالّتَيْن المعطتَيْن ؟

(هـ) اِشرحوا لماذا الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ مُطابقٌ للرّسم البيانيّ للدّالّة $|g(x)|$.

(18) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=6^{-x}$.

(أ) ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟

(ب) ما هي إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور y ؟

(ج) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ؟

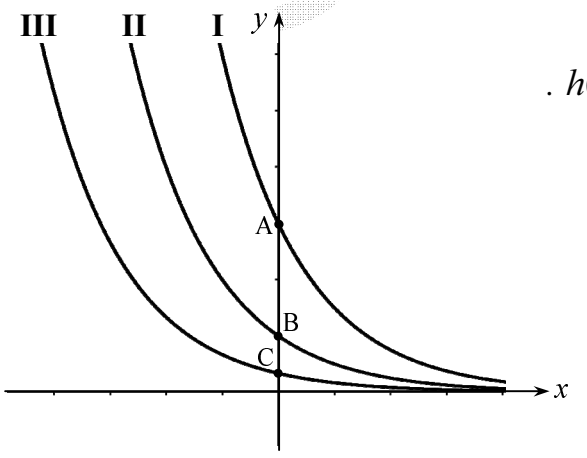
(د) أُرسموا الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

معطاةٌ الدّالّة $g(x)=f(x)-2$.

(هـ) ما هي معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ للرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(و) أَضيفوا إلى الرّسم في البند (د)، الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ (في نفس هيئة المحاور).

(ز) أُرسموا الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)=|g(x)|$.



(19) معطاةٌ في الرّسم أمامكم الرّسوم البيانيّة **I** – **III** للدّوالّ:

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، $g(x)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، $h(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

(أ) لائموا كلّ دالّة للرّسم البيانيّ الّذي يصفها.

(ب) أُكتبوا إحداثيّات النّقاط A ، B ، C .

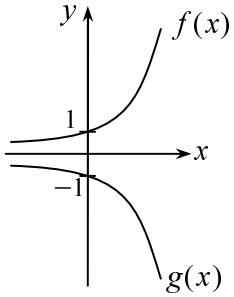
(ج) ما هو التّحويل الّذي أُجرِيَ على الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(د) ما هو التّحويل الّذي أُجرِيَ على الرّسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ للحصول على الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ ؟

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) اِنعكاس بالنّسبة للمحور x.



(ب) $g(x)=-e^{x}$

(ج) $y=0$

(د) أُنظروا الرّسم.

(2) (أ) $g(x)=e^{x}+1$

(ب) مجال تعريف الدّالّتَيْن هو كلّ x.

(ج) إزاحة عموديّة إلى الأعلى بوحدةٍ واحدة.

(د) $f(x)$ – رسم بيانيّ II ، $g(x)$ – رسم بيانيّ I.

(هـ) (i) $(0,1)$ (ii) $(0,2)$

(و) للدّالّة $f(x)$: $y=0$، للدّالّة $g(x)$: $y=1$.

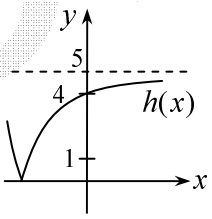
(ز) لأنّ $g(x)>0$ لكلّ x.

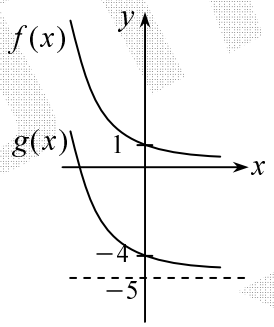
(3) (أ) كلّ x. (ب) $(0,1)$ (ج) $y=0$

(د) رسم بيانيّ **I**. (هـ) إزاحة عموديّة إلى الأسفل 5 وحدات.

(و) $y=-5$ (ز) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.

(ح)





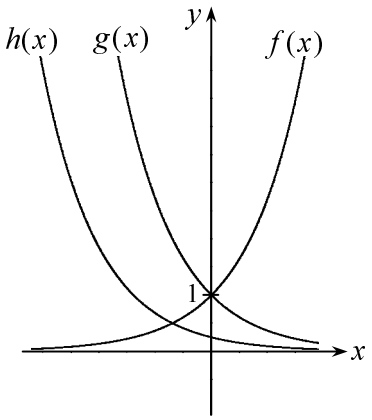
(4) (أ) $f(x)$ – رسم بيانيّ **II** ، $g(x)$ – رسم بيانيّ **I** ، $h(x)$ – رسم بيانيّ **III**.

(ب) $A(0,2)$, $B(0,1)$, $C\left(0,\frac{1}{2}\right)$

(ج) تمدّد عموديّ بضعفَيْن.

(د) اِنكماش عموديّ بضعفَيْن (أو تمدّد عموديّ بِـ $\frac{1}{2}$ ضعف).

(5) (أ) الدّالّتان معرّفتان لكلّ x.



(ب) (i) $(0,1)$ (ii) $(0,1)$

(ج) معادلة خطّ التّقارب الأفقيّ مماثلة في الدّالّتَيْن: $y=0$.

(د) $h(x)=0.25e^{-x}$

(هـ) اِنعكاس بالنّسبة للمحور y واِنكماش عموديّ بِـ 4 (تمدّد بِـ 0.25 ضعف).

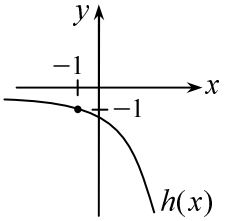
(و) اِنكماش عموديّ بِـ 4 أضعاف (تمدّد بِـ 0.25 ضعف).

(ز) (i) $(0,0.25)$ (ii) أُنظروا الرّسم.

(ح) (2) على يسار المحور y.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(6) (أ) رسم بيانيّ **I** – $f(x)$ ، رسم بيانيّ **II** – $g(x)$.



(ب) إزاحة أفقيّة وحدة واحدة إلى اليسار.

(ج) اِفحصوا مع المعلّم في الصّف.

(د) أنظروا الرّسم.

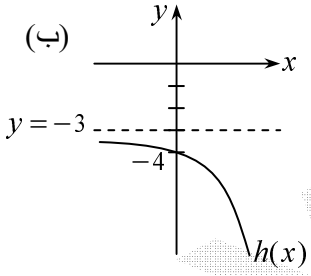
(هـ) نعم. $(-1,-1)$.

(7) (أ) اِفحصوا مع المعلّم في الصّف.

(ب) رسم بيانيّ **I** . المنحنى المتقطّع يمثّل $f(x)$.

(8) (أ) رسم بيانيّ **I** – $g(x)$ ، رسم بيانيّ **II** – $f(x)$.

(ب) $y=3$



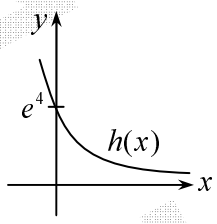
(ج) $y=-3$ (د) أنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.

(هـ) (*i*) كلّا. (*ii*) كلّا. (*iii*) نعم.

(9) (أ) رسم بيانيّ **I** – $f(x)$ ،

رسم بيانيّ **II** – $k(x)$ ،

رسم بيانيّ **III** – $g(x)$.



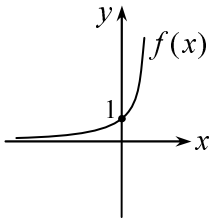
(ب) أنظروا الرّسم.

(10) (أ) $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ (ب) $y=0$ (ج) رسم بيانيّ **II** .

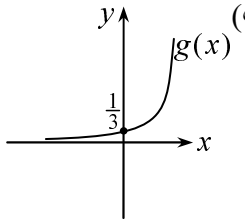
(11) (أ) $y=0$ (ب) رسم بيانيّ **I** . (ج) $(1,e)$

(12) (أ) $y=0$ (ب) لا يوجد.

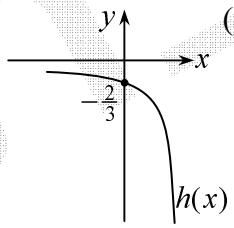
(13) (أ)



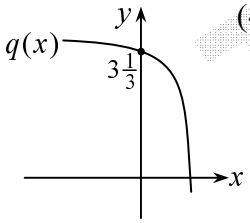
(ب)



(ج)



(د)



(هـ) $g(x)$ – $(1,1)$ ، $h(x)$ – $(1,-2)$ ، $q(x)$ – $(1,2)$.

(14) رسم بيانيّ **III** .

(15) رسم بيانيّ **I** .

(16) (أ) $y=0$

(ب) $f(x)$ – رسم بيانيّ **I** ، $g(x)$ – رسم بيانيّ **II** .

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(17) (أ) مجال تعريف الدّالّتَيْن هو كلّ x.

(ب) $f(x)$ – رسم بيانيّ **II**, $g(x)$ – رسم بيانيّ **I**.

(ج) (i) $(0,1)$ (ii) $(0,2)$

(د) للدّالّة $f(x)$: $y=0$، للدّالّة $g(x)$: $y=1$.

(هـ) لأنّ $g(x)>0$ لكلّ x.

(18) (أ) كلّ x.

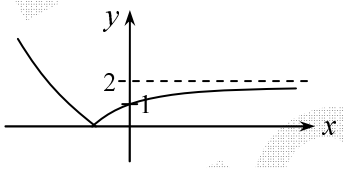
(ب) $(0,1)$

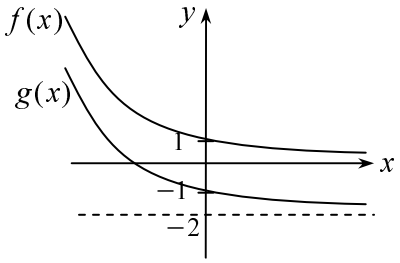
(ج) $y=0$

(د)+ (و) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.

(هـ) $y=-2$

(ز)





(19) (أ) $f(x)$ – رسم بيانيّ **II**,
$g(x)$ – رسم بيانيّ **I**,
$h(x)$ – رسم بيانيّ **III**.

(ب) $A(0,3)$, $B(0,1)$, $C\left(0,\frac{1}{3}\right)$

(ج) تمدّد عموديّ بِـ 3 أضعاف.

(د) اِنكماش عموديّ بِـ 3 أضعاف (أو تمدّد عموديّ بِـ $\frac{1}{3}$ ضعف).

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

לצפייה חינם – לתחילת שנת הלימודים
www.mishbetzet.co.il

الفصل 5: اللّوغريثمات

أ. عمليّة اللّوغريثم

عمليّة اللّوغريثم هي العمليّة العكسيّة لعمليّة القوّة. يوجد لعمليّة القوّة، عمليًّا، عمليّتان عكسيّتان.
نتمعّن في المساواة: $a^n = b$.

- بمساعدة عمليّة **الجذر** (من الدّرجة n، عندما يكون معرّفًا وموجودًا) نجد **أساس القوّة** a : $a = \sqrt[n]{b}$.
  مثال: إذا كان $a^3 = 8$ ، عندها $a = \sqrt[3]{8} = 2$.
- بمساعدة عمليّة **اللّوغريثم** (حسب الأساس a) نجد **أُسّ القوّة** n .
  نرمز إلى عمليّة اللّوغريثم بـ $\log$ (وهكذا أيضًا أُشير على مِفتاح الآلة الحاسبة).
  مثال: إذا كان $2^n = 8$ ، عندها $n = \log_2 8$.

$\log_2 8$ نقرأ **لوغريثم 8 للأساس 2**.
المعنى: بأيّ أُسٍّ يجب رفع العدد 2 كي نحصل على 8 ؟
جواب: 3 ، لأنّ $2^3 = 8$. أي: $\log_2 8 = 3$.

مهمّة: معنى اللّوغريثم

أكملوا القيمة النّاقصة في الـ $\square$ في كلّ واحدٍ من البنود التّالية وفقًا للمثال المعطى.

$\log_2 32 = ?$ **لوغريثم 32 للأساس 2** ، **معنى:** بأيّ أُسٍّ يجب رفع العدد 2 لكي نحصل على 32 ؟
جواب: 5 ، لأنّ $2^5 = 32$.

(أ) $\log_{10} 100 = ?$
لوغريثم 100 للأساس 10 ، **معنى:** بأيّ أُسٍّ يجب رفع العدد 10 لكي نحصل على 100 ؟
جواب: $\square$ ، لأنّ $10^{\square} = 100$.

(ب) $\log_5 1 = ?$
لوغريثم 1 للأساس 5 ، **معنى:** بأيّ أُسٍّ يجب رفع العدد 5 لكي نحصل على 1 ؟
جواب: 0 ، لأنّ $5^{\square} = 1$.

(ج) $\log_2 \frac{1}{8} = ?$
لوغريثم $\frac{1}{8}$ للأساس 2 ، **معنى:** بأيّ أُسٍّ يجب رفع العدد 2 لكي نحصل على $\square$ ؟
جواب: -3 ، لأنّ $2^{\square} = \frac{1}{8}$.

(د) $\log_9 27 = ?$
لوغريثم 27 للأساس 9 ، **معنى:** بأيّ أُسٍّ يجب رفع العدد $\square$ لكي نحصل على 27 ؟
جواب: $\square$ ، لأنّ $9^{\square} = 27$. (**إرشاد:** $27 = 3^3$, $9 = 3^2$)

نقرأ التّعبير $\log_a x$ على النّحو التّالي: **لوغريثم x للأساس a** ،
ومعناه: بأيّ أُسٍّ يجب رفع a لكي نحصل على x .

بشكلٍ عامّ، يمكننا صياغة القاعدة التّالية (تُسمّى أيضًا تعريف عمليّة اللّوغريثم):

$$a^b = x \iff \log_a x = b$$

العدد a يُسمّى **أساس اللّوغريثم** ; $a > 0$ ، $a \neq 1$
العدد x (والّذي يُسمّى أيضًا محتوى اللّوغاريتم) يجب أن يكون **موجبًا**: $x > 0$; يمكن للعدد b أن يكون أيّ عددٍ حقيقيّ.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

أحيانًا يكون أسهل علينا الحصول على $\log_a x$ بمساعدة اِستعمال معادلة أُسّيّة.

أمثلة محلولة

(1) نحسب قيمة التّعبير $\log_9 3$.

الحلّ:

نرمز $\log_9 3 = x$.

حسب تعريف اللّوغريثم نحصل على: $9^x = 3$

بما أنّ $9 = 3^2$ ، نحصل على: $\left(3^2\right)^x = 3$

لذا، نحصل على: $3^{2x} = 3^1$

ومن هنا: $2x = 1 \Rightarrow x = 0.5$

أي أنّ $\log_9 3 = 0.5$

(2) نحسب قيمة التّعبير $\log_4(8\sqrt{2})$.

الحلّ:

نرمز $\log_4(8\sqrt{2}) = x$.

حسب تعريف اللّوغريثم نحصل على: $4^x = 8\sqrt{2}$

بما أنّ $\sqrt{2} = 2^{0.5}$ وَ $8 = 2^3$، نحصل على: $\left(2^2\right)^x = 2^3 \cdot 2^{0.5}$

لذا، نحصل على: $2^{2x} = 2^{3.5}$

ومن هنا: $2x = 3.5 \Rightarrow x = 1.75$

أي أنّ $\log_4(8\sqrt{2}) = 1.75$

ملاحظة: حلٌّ بطريقة مشابهة لهذه، يُناسب أيضًا البند (د) في المهمّة في الصفحة السّابقة.

اِنتبهوا: عندما نكتب $\log a$ نقصد $\log_{10} a$ ، أي أنّ أساس اللّوغريثم هو 10 .

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

نسمّي اللّوغريثم حسب الأساس e لوغريثم طبيعيّ. ونرمز له بـِ $\ln$.
بدل أن نكتب $\log_e x$ ، نستخدم الكتابة المختصرة $\ln x$.

حسب تعريف اللّوغريثم يتحقّق:
- $\ln e = \log_e e = 1$ (لأنّ $e^1 = e$).
- $\ln 1 = \log_e 1 = 0$ (لأنّ $e^0 = 1$).

نجد على سبيل المثال قيمة $\ln 3$ بمساعدة الآلة الحاسبة هكذا: **LN → 3 → =**

بعد القيام بهذا، سيظهر على شاشة الآلة الحاسبة العدد 1.098612289 .
أي: $\ln 3 \approx 1.098612289$

بطريقة مشابهة نحسب في الآلة الحاسبة ونحصل على: $\ln 15 = 2.708050201$

نستخدم المِفتاح **ln** كي نجد **أسّ القوّة** e^x .

<u>مثال:</u> إذا كان $e^x = 7$ ،
عندها $x = \log_e 7$
أو $x = \ln 7 = 1.945910149$.

أمثلة محلولة

(1) (أ) جِدُوا قيمة x الّتي تُحقّق: $e^x = 10$.
(ب) جِدُوا قيمة y الّتي تُحقّق: $e^y = 100$.

<u>الحلّ:</u>
(أ) $x = \ln 10 \approx 2.302585093$
(ب) $y = \ln 100 \approx 4.605170186$

<u>سؤال:</u> اِشرحوا لماذا النّتيجة الّتي حصلتم عليها في البند (ب) أكبر بالضّبط بضعفَيْن من نتيجة البند (أ) ؟
(**إرشاد:** $10^2 = 100$).
<u>جواب:</u> يتحقّق: $e^y = 100 = (10)^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$ ولذا: $y = 2x$.

(2) (أ) جِدُوا قيمة x الّتي تُحقّق: $e^x = 2$.
(ب) جِدُوا قيمة y الّتي تُحقّق: $e^y = 0.5$.

<u>الحلّ:</u>
(أ) $x = \ln 2 \approx 0.69314718$
(ب) $y = \ln 0.5 \approx -0.69314718$

<u>سؤال:</u> اِشرحوا لماذا النّتيجة الّتي حصلتم عليها في البند (ب)، هي العدد المُضادّ للنّتيجة، في البند (أ) ؟
(**إرشاد:** $0.5 = 2^{-1}$).
<u>جواب:</u> يتحقّق: $e^y = 0.5 = (2)^{-1} = (e^x)^{-1} = e^{-x}$ ولذا: $y = -x$.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(3) جِدُوا قيمة x ، الّتي تحقّق $e^{-0.6x}=2.3$.

الحلّ:

$$-0.6x=\ln 2.3$$

أي أنّ $x=\frac{\ln 2.3}{-0.6}\approx\frac{0.8329}{-0.6}\approx -1.388$.

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ

اِنتبهوا: للتّمارين **(1) – (6)** لم تُعطَ أجوبة نهائيّة. عليكم الفحص مع المعلّم في الصّفّ.

(1) اِنتقلوا من متساوياتٍ أسّيّة إلى متساوياتٍ لوغريثميّة

(**مثال:** $2^3=8 \Leftrightarrow \log_2 8=3$):

(أ) $3^2=9$ (ب) $2^4=16$ (ج) $10^{-2}=\frac{1}{100}$

(د) $25^{\frac{1}{2}}=5$ (هـ) $8^{\frac{2}{3}}=4$ (و) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1.5}=8$

(2) اِنتقلوا من متساوياتٍ لوغريثميّة إلى متساوياتٍ أسّيّة (**مثال:** $\log_4 8=1\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4^{1.5}=8$):

(أ) $\log_8 64=2$ (ب) $\log_3 81=4$ (ج) $\log_4 32=2\frac{1}{2}$

(د) $\log_{10}\frac{1}{10}=-1$ (هـ) $\log_3 9=2$ (و) $\log_7 1=0$

(3) اِحسبوا دون استخدام الآلة الحاسبة اللّوغريثمات التّالية حسب الأساس 2 ($\log_2\square$):
(يمكن الاستعانة بكتابة معادلة أُسّيّة ملائمة).

(أ) $\log_2 16$ (ب) $\log_2\frac{1}{4}$ (ج) $\log_2\sqrt{2}$

(د) $\log_2\sqrt[4]{8}$ (هـ) $\log_2(2\sqrt{2})$

(4) اِحسبوا دون استخدام الآلة الحاسبة اللّوغريثمات التّالية حسب الأساس 5 ($\log_5\square$):
(يمكن الاستعانة بكتابة معادلة أُسّيّة ملائمة).

(أ) $\log_5 5$ (ب) $\log_5 125$ (ج) $\log_5\sqrt{5}$

(د) $\log_5\frac{1}{\sqrt{5}}$ (هـ) $\log_5\sqrt[3]{5}$ (و) $\log_5\frac{1}{125}$

(5) اِحسبوا دون استخدام الآلة الحاسبة اللّوغريثمات التّالية حسب الأساس 10:

(أ) $\log 10{,}000$ (ب) $\log\frac{1}{100}$ (ج) $\log\sqrt{10}$

(د) $\log\frac{1}{\sqrt{10}}$ (هـ) $\log 10\sqrt{10}$

ملاحظة: إذا لم يُكتَب أساسٌ للوغريثم، يكون الأساس هو العدد 10 .

مثال: نكتب $\log_{10}1{,}000$ هكذا: $\log 1{,}000$ ، ويتحقّق: $\log 1{,}000=3$.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – שבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(6) اِحسبوا دون اِستخدام الآلة الحاسبة اللّوغريثمات التّالية حسب الأساس e ($\ln\square$):

(أ) $\ln e^3$ (ب) $\ln\sqrt{e}$ (ج) $\ln(e^2\sqrt{e})$

(د) $\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$ (هـ) $\ln 1$ (و) $\ln\frac{1}{e^5}$

ملاحظة: كما تعلّمنا، إذا كان أساس اللّوغريثم e عندها، بدل $\log_e\square$ ، نكتب $\ln\square$:

<u>مثال:</u> $\log_e e^4=4$ نكتب: $\ln e^4=4$.

(7) اِستعينوا بالآلة الحاسبة، وجدوا قيمة x في كلّ بند (في هذا التّمرين، عليكم تقريب النّتيجة الّتي تظهر على شاشة الآلة الحاسبة حتّى أربع منازل بعد الفاصلة العشريّة).

(أ) $e^x=90$ (ب) $e^x=900$ (ج) $e^x=0.09$ (د) $e^x=0.009$

(8) اِستعينوا بالآلة الحاسبة، وجدوا قيمة x في كلّ بند (في هذا التّمرين، عليكم تقريب النّتيجة الّتي تظهر على شاشة الآلة الحاسبة حتّى أربع منازل بعد الفاصلة العشريّة).

(أ) $e^{2x}=5$ (ب) $e^{4x}=10$ (ج) $e^{0.7x}=1.4$ (د) $e^{-0.8x}=3.2$

أجوبة نهائيّة

(7) (أ) 4.4998 (ب) 6.8024 (ج) −2.4079 (د) −4.7105

(8) (أ) 0.8047 (ب) 0.5756 (ج) 0.4807 (د) −1.4539

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

ب. قوانين اللّوغريثمات

بمساعدة تعريف اللّوغريثم $\boxed{a^b = x \Leftrightarrow \log_a x = b}$ ، نبرهن خصائص وقوانين أخرى لعمليّة اللّوغريثم، ونرقّمها.

تذكير: التّعبير $\boxed{\log_a x}$ يُقرَأُ، **لوغريثم x حسب الأساس a** ،

ومعناه: بأيّ أُسٍّ يجب رفع a لكي نحصل على x.

بحسب هذا التّعريف، تتحقّق المساواة التّالية: $\boxed{a^{\log_a x} = x \qquad (1)}$

دعونا نرى **مثالين عدديَّيْن** يوضّحان المساواة (1).

(1) التّعبير $\log_2 8$ يمثّل أسَّ القوّة، الّذي يجب أن نرفع به الأساس 2 لكي نحصل على 8 ،
وإذا أخذنا العدد 2 ورفعناه للقوّة $\log_2 8$، يجب أن نحصل على 8 ، أي، $2^{\log_2 8} = 8$.

(2) نحسب قيمة التّعبير: $3^{\log_3 \frac{1}{2}} = ?$.
التّعبير $\log_3 \frac{1}{2}$ يمثّل أُسّ القوّة، الّذي يجب أن نرفع به الأساس 3 كي نحصل على $\frac{1}{2}$ ،
وإذا أخذنا العدد 3 ورفعناه للقوّة $\log_3 \frac{1}{2}$، يجب أن نحصل على $\frac{1}{2}$ ،
أي، $3^{\log_3 \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

نعرض فيما يلي عدّة **خصائص** لعمليّة اللّوغريثم.

(2)	$\log_a a = 1$	لأنّ	$a^1 = a$	**في جميع الخصائص الثّلاث العدد a موجب ولا يساوي 1 ، أي:** $a > 0$ ، $a \neq 1$.
(3)	$\log_a a^b = b$	لأنّ	$a^b = a^b$	
(4)	$\log_a 1 = 0$	لأنّ	$a^0 = 1$	

الخصائص الثّلاث هذه تُسمّى **الخصائص الأساسيّة**، وهي تنبع مباشرةً من تعريف عمليّة اللّوغريثم.

(5) لوغريثم حاصل ضرب	
$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	$1 \neq a > 0$, $y > 0$, $x > 0$

بكلمات: **لوغريثم حاصل ضرب يساوي مجموع اللّوغريثمات للعوامل في الضّرب (جميع اللّوغريثمات حسب نفس الأساس).**

برهان: نرمز: $\log_a y = v \Rightarrow a^v = y$, $\log_a x = u \Rightarrow a^u = x$

نعوّض ونحصل على: $\log_a (xy) = \log_a (a^u a^v) = \log_a a^{u+v} =$

نستعمل الخاصّيّة (3) ونحصل على: $= u + v = \log_a x + \log_a y$

مثالان:

(1) $\log_5 2 + \log_5 12.5 = \log_5 (2 \cdot 12.5) = \log_5 25 = 2$

(2) $\log_{16} 64 = \log_{16} (16 \cdot 4) = \log_{16} 16 + \log_{16} 4 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

انتبهوا: في المثالَيْن **(1)** وَ **(2)** اِستعملنا القانون **(5)** في الاتّجاهَيْن: في المثال **(1)** اِنطلقنا من الطّرف الأيمن إلى الطّرف الأيسر، وفي المثال **(2)** اِنطلقنا من الطّرف الأيسر إلى الطّرف الأيمن.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(6) لوغريثم قسمة	
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$	$1\neq a>0\ ,\ y>0\ ,\ x>0$

بكلمات: لوغريثم قسمة يساوي لوغريثم البسط ناقص لوغريثم المقام (جميع اللّوغريثمات بنفس الأساس).

برهان:

نرمز: $\log_a x=u \ \Rightarrow\ a^u=x$ ، $\log_a y=v \ \Rightarrow\ a^v=y$

نعوّض ونحصل على: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a\left(\frac{a^u}{a^v}\right)=\log_a a^{u-v}=$

نستعمل الخاصّيّة **(3)** ونحصل على: $=u-v=\log_a x-\log_a y$

أمثلة:

(1) $\log_7 98-\log_7 2=\log_7\left(\frac{98}{2}\right)=\log_7 49=2$

(2) $\log\frac{1{,}000}{\sqrt{10}}=\log 1{,}000-\log\sqrt{10}=\log 10^3-\log 10^{\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$

انتبهوا: (أ) $\log_a x-\log_a y\neq\log_a(x-y)$ أي: $\log_2 96-\log_2 3\neq\log_2(96-3)$

(ب) $\log_a\frac{x}{y}\neq\frac{\log_a x}{\log_a y}$ أي: $\log_2\frac{96}{3}\neq\frac{\log_2 96}{\log_2 3}$

(ج) $\log_a(x-y)\neq\frac{\log_a x}{\log_a y}$

(7) لوغريثم قوّة	
$\log_a x^b=b\cdot\log_a x$	$1\neq a>0\ ,\ x>0$

بكلمات: لوغريثم قوّة يساوي حاصل ضرب أسّ القوّة في لوغريثم أساس القوّة (جميع اللّوغريثمات بنفس الأساس).

برهان:

نرمز: $\log_a x=u \ \Rightarrow\ a^u=x$

نعوّض ونحصل على: $\log_a x^b=\log_a\left(a^u\right)^b=\log_a a^{u\cdot b}=$

نستعمل الخاصّيّة **(3)** ونحصل على: $=u\cdot b=b\cdot\log_a x$

انتبهوا: **(1)** التّعبير $\log_a x$ معرّف فقط لكلّ $x>0$.

إذا كان b هو عددٌ زوجيٌّ، يكون التّعبير $\log_a x^b$ معرّفًا لكلّ $x\neq 0$ ،

ولذا الطّلب بأن يكون $x>0$ يهدف إلى التّأكيد بأنّه لا يوجد تغييرٌ في مجال التّعويض.

(2) يمكن إستعمال القانون **(7)** أيضًا إذا كان $x<0$ ، وَ **b** عددًا **زوجيًّا**.

لكن في مثل هذه الحالة يتحقّق: $\log_a x^b=b\log_a(-x)$.

أمثلة:

(1) $\frac{\log_3 125}{\log_3 25}=\frac{\log_3 5^3}{\log_3 5^2}=\frac{3\log_3 5}{2\log_3 5}=\frac{3}{2}=1.5$

(2) $\log\frac{1{,}000}{\sqrt{10}}=\log\frac{10^3}{10^{0.5}}=\log 10^{2.5}=2.5\log 10=2.5\cdot 1=2.5$

(3) $\log_2\sqrt[3]{16}=\log_2 16^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_2 16=\frac{1}{3}\cdot 4=1\frac{1}{3}$

(4) $\log_2(-4)^4=4\log_2 4=4\cdot 2=8$

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

نعرض فيما يلي إجمال لقوانين اللّوغريثمات، النّاتجة عن تعريف اللّوغريثم $a^b = x \Leftrightarrow \log_a x = b$

(1) $a^{\log_a x} = x$	
(2) $\log_a a = 1$ لأنّ $a^1 = a$ (3) $\log_a a^b = b$ لأنّ $a^b = a^b$ (4) $\log_a 1 = 0$ لأنّ $a^0 = 1$	في جميع الخصائص النّلاث، a موجب ولا يساوي 1 ، أي: $a > 0 \ , \ a \neq 1$.
(5) لوغريثم حاصل ضرب $\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y$	$1 \neq a > 0 \ , \ y > 0 \ , \ x > 0$
(6) لوغريثم قسمة $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$1 \neq a > 0 \ , \ y > 0 \ , \ x > 0$
(7) لوغريثم قوّة $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$	$1 \neq a > 0 \ , \ x > 0$

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ

(1) اِحسبوا قِيَمَ اللّوغريثمات التّالية.

(أ) $\log_4 16$ (ب) $\log_6 \frac{1}{6}$ (ج) $\log_8 1$ (د) $\log_7 \frac{1}{49}$

(هـ) $\log_{\sqrt{2}} 4$ (و) $\log_8 \sqrt{8}$ (ز) $\log_7 \frac{1}{\sqrt{7}}$ (ح) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$

(2) **تذكير:** حسب تعريف اللّوغريثم، يتحقّق: $a^{\log_a x} = x$.

مثال: • $5^{\log_5 25} = 25$ • $16^{\log_2 3} = 2^{4\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^4 = 3^4 = 81$

اِحسبوا قِيَمَ التّعابير التّالية دون اِستعمال الآلة الحاسبة.

نذكّركم: • log بدون كتابة أساس يمثّل لوغريثم حسب الأساس 10 .

• ln يمثّل لوغريثم حسب الأساس e .

(أ) $5^{1+\log_5 3}$ (ب) $2^{\log_2 5 - 1}$ (ج) $3^{2\cdot \log_3 4}$ (د) $8^{1-\log_8 4}$

(هـ) $4^{\log_4 16}$ (و) $\left(3^{\log_3 5}\right)^2$ (ز) $e^{\log_e 5}$ (ح) $e^{\ln e^2}$

(ط) $e^{\ln 7}$ (ي) $e^{-\ln 5}$ (ي أ) $e^{\ln 3 - 1}$ (ي ب) $10^{\log 25 - 2}$

(ي ج) $\left(e^2\right)^{\ln 3}$ (ي د) $e^{2+\ln 2}$ (ط و) $e^{-2\ln 5}$ (ط ز) $e^{\ln 3 - \ln 4}$

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

(3) إستعينوا بخصائص اللّوغريثم، واحسبوا قِيَمَ التّعابير التّالية.

(أ) $\log_6 3+\log_6 2$ (ب) $\ln e^3+\ln e^2$

(ج) $\log_3 45-\log_3 5$ (د) $\ln e^5-\ln\frac{1}{e^3}$

(هـ) $\log 5+\log 4-\log 20$ (و) $\ln e+\ln e^4-\ln e^{-2}$

(ز) $-\log_{\frac{1}{2}}12-\log_{\frac{1}{2}}3+\log_{\frac{1}{2}}9$ (ح) $\ln\sqrt{e}-\ln(2e)+\ln\left(2\sqrt{e}\right)$

(ط) $2\log 2+\log 0.25$ (ي) $3\ln e+2\ln\frac{1}{e}$

(4) إستعينوا بخصائص اللّوغريثم، واحسبوا قِيَمَ التّعابير التّالية.

(أ) $\frac{\log_4 27}{\log_4 3}$ (ب) $\frac{\log 16-\log 4}{\log 16}$ (ج) $\frac{\log_5 3-\log_5 12}{\log_5 4}$

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) 2 (ب) -1 (ج) 0 (د) -2 (هـ) 4 (و) $\frac{1}{2}$ (ز) $-\frac{1}{2}$ (ح) -2

(2) (أ) 15 (ب) 2.5 (ج) 16 (د) 2 (هـ) 16 (و) 25 (ز) 5 (ح) e^2

(ط) 7 (ي) 0.2 (ي أ) $\frac{3}{e}$ (ي ب) $\frac{1}{4}$ (ي ج) 9 (ي د) $2e^2$ (ط و) $\frac{1}{25}$ (ط ز) $\frac{3}{4}$

(3) (أ) 1 (ب) 5 (ج) 2 (د) 8 (هـ) 0

(و) 7 (ز) 2 (ح) 0 (ط) 0 (ي) 1

(4) (أ) 3 (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) -1

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

الفصل 6: الدّالّة اللّوغريثميّة

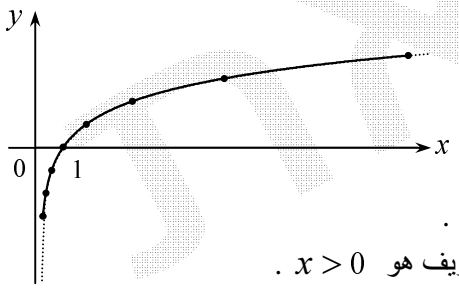
الدّالّة اللّوغريثميّة $y=\log_a x$ $(a>0\ ،\ a\neq 1)$ معرّفة لكلّ $x>0$.
لذا، لا يقطع رسمُها البيانيّ المحور y.
نفحص تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور x: عندما يكون $y=0$ يتحقّق: $\log_a x=0$،
ومن هنا نحصل على: $x=a^0=1$. أي أنّ الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=\log_a x$ يقطع المحور x في النّقطة $(1,0)$.

نُميّز بين الحالة الّتي فيها $a>1$، وبين الحالة الّتي فيها $0<a<1$.

في الحالات الّتي فيها **$a>1$**، الدّالّة $y=\log_a x$ هي دالّة **تصاعديّة تمامًا**.

<u>على سبيل المثال:</u> $y=\log_3 x$ هي دالّة تصاعديّة تمامًا.
سنشرح ذلك بشكلٍ حدسيّ: إذا كان $x_1>x_2$ ، عندها $\log_3 x_1>\log_3 x_2$
مثال: $27>9$ ، لذا $\log_3 27>\log_3 9$
لأنّ الأسّ الّذي نرفع به الأساس 3 لنحصل على 27، أكبر من الأسّ الّذي نرفع به الأساس 3 لنحصل على 9.

نرسم على سبيل المثال الرّسم البيانيّ للدّالّة: $y=\log_2 x$:

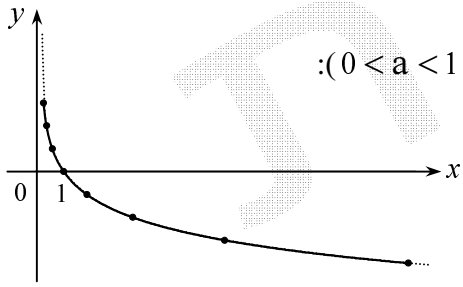


x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

اَلمجال الّذي فيه الدّالّة موجبة $x>1$، اَلمجال الّذي فيه الدّالّة سالبة $0<x<1$.
يقترب الرّسم البيانيّ إلى المحور y من جهة اليمين ولكن لا يقطعه لأنّ مجال التّعريف هو $x>0$.
أي أنّ المحور y يشكّل **خطَّ تقاربٍ عموديًّا** للرّسم البيانيّ للدّالّة.

في الحالات الّتي فيها **$0<a<1$**، الدّالّة $y=\log_a x$ هي دالّةٌ **تنازليّة تمامًا**.

نرسم للتّوضيح الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ (مثال لأساسٍ a، مقداره $0<a<1$):



x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

اَلمجال الّذي فيه الدّالّة موجبة $0<x<1$، المجال الّذي فيه الدّالّة سالبة $x>1$.
أيضًا في هذه الحالة، يقترب الرّسم البيانيّ من جهة اليمين إلى المحور y ولكن لا يقطعه لأنّ مجال التّعريف هو $x>0$.
أي أنّ المحور y يشكّل **خطَّ تقاربٍ عموديًّا** للرّسم البيانيّ للدّالّة.

في هذَيْن الرّسمَيْن نلاحظ أنّ:

- $y=\log_2 x$ هي دالّة **تصاعديّة تمامًا**.
- $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ هي دالّة **تنازليّة تمامًا**.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

ملاحظة: لحساب قيم y يمكن الاستعانة **بآلة حاسبة علميّة** وتحديدًا بالمِفتاح $\log_{\square}\square$ الّذي يمثّل $\log_a x$.

على سبيل المثال، لكي نحسب $\log_3\left(\frac{2}{3}\right)$ يمكن أن نضغط في الآلة الحاسبة:

$\log_{\square}\square \rightarrow 3 \rightarrow \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \rightarrow =$

في مكان الأساس a — في مكان مُحتوى اللّوغريثم x

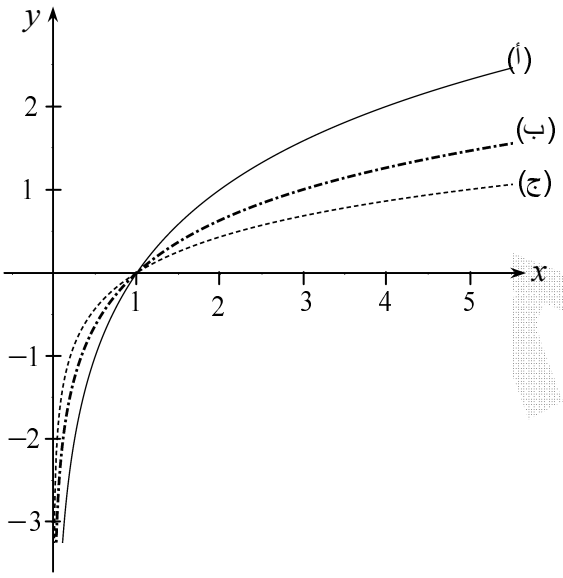
نتحقّق كيف تؤثّر قيمة a على شكل الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=\log_a x$، عندما يكون $a>1$، وعندما يكون $0<a<1$.

عندما يكون $a>1$:

نرسم في **نفس** هيئة المحاور الرّسومات البيانيّة للدوّال الثّلاث:

(أ) $y=\log_2 x$ (ب) $y=\log_3 x$ (ج) $y=\log_5 x$

نستعين بجدول القِيَم ونحصل على الرّسوم البيانيّة التّالية:



x	(أ) $y=\log_2 x$	(ب) $y=\log_3 x$	(ج) $y=\log_5 x$
$\frac{1}{4}$	-2	-1.2619	-0.8614
$\frac{1}{2}$	-1	-0.6309	-0.4307
$\frac{2}{3}$	-0.585	-0.3691	-0.2519
1	0	0	0
2	1	0.6309	0.4307
3	1.585	1	0.6826
5	2.3219	1.465	1

توضيح مُحوسب: مقارنة بين دوالّ لوغريثميّة ذوات أساسٍ مقداره أكبر من 1

أُدخلوا إلى الموقع www.mishbetzet.co.il ← 4 وحدات تعليميّة ← الصّفّ الثّاني عشر ← فعّاليّات محوسبة التّابعة لهذا الكتاب ← اِضغطوا على الرّابط المناسب لاسم عنوان إطار هذه الفعّاليّة.

أمامكم الرّسوم البيانيّة للدّوالّ: (أ) $y=\log_2 x$ (ب) $y=\log_3 x$ (ج) $y=\log_5 x$

من خلال تمرير عجلة الفأرة، يمكنكم الاقتراب من الرّسوم البيانيّة المرسومة والعثور على نقاط إضافيّة عليها، وكذلك تحريك لوحة الرّسم لفحص سلوك الرّسوم البيانيّة في الأجزاء غير الظّاهرة في الرّسم في هذه الصّفحة.

تمعّنوا في الرّسوم البيانيّة، واكتبوا بالنّسبة لكلّ **واحدة من الدّوالّ** خصائص الرّسم البيانيّ الّذي يصفها وفقًا للتّعليمات التّالية:

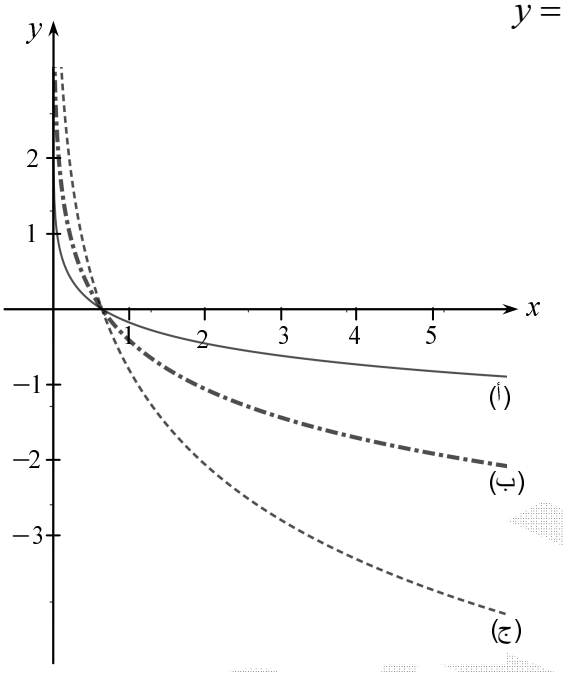
1. ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟ كيف ينعكس على الرّسم البيانيّ للدّالّة ؟
2. لأيّ قيمةٍ تقترب الدّالّة، عندما يقترب x إلى الصّفر ؟
3. هل هناك خطّ تقاربٍ مُعامدٌ لأحد المحورَيْن (أفقيّ أو عموديّ) ؟ إذا أجبتم نعم، ما هي معادلته ؟
4. ما هي إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور x ؟
5. في أيّ الأرباع يمرّ الرّسم البيانيّ، وما المجال الّذي تكون فيه الدّالّة الّتي يصفها موجبة / سالبة ؟
6. أيٌّ من بين الرّسوم البيانيّة الثّلاثة يتواجد فوق الرّسمَيْن الآخرَيْن عندما يكون $x>1$ ؟
7. أيٌّ من بين الرّسوم البيانيّة الثّلاثة يتواجد فوق الرّسمَيْن الآخرَيْن عندما يكون $0<x<1$ ؟

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّفّ الثّاني عشر – المنهج الجديد

عندما يكون $0 < a < 1$:

نرسم في **نفس** هيئة المحاور الرّسومات البيانيّة للدّوال الثّلاث:

(أ) $y = \log_{0.2} x$ (ب) $y = \log_{0.5} x$ (ج) $y = \log_{0.7} x$



نستعين بجدول القيم ونحصل على الرّسوم البيانيّة التّالية:

x	(أ) $y = \log_{0.2} x$	(ب) $y = \log_{0.5} x$	(ج) $y = \log_{0.7} x$
$\frac{1}{4}$	0.8614	2	3.8867
$\frac{1}{2}$	0.4307	1	1.9434
$\frac{2}{3}$	0.2519	0.585	1.1368
1	0	0	0
2	−0.4307	−1	−1.9434
5	−1	−2.3219	−4.5123
25	−2	−4.6439	−9.0247

توضيح مُحوسب: مقارنة بين دوالّ لوغريثميّة ذوات أساسٍ مقداره بين 0 وَ 1

أُدخلوا إلى الموقع www.mishbetzet.co.il ← 4 وحدات تعليميّة ← الصّفّ الثّاني عشر ← فعّاليّات محوسبة التّابعة لهذا الكتاب ← اِضغطوا على الرّابط المناسب لاسم عنوان إطار هذه الفعّاليّة.

أمامكم الرّسوم البيانيّة للدّوالّ: (أ) $y = \log_{0.2} x$ (ب) $y = \log_{0.5} x$ (ج) $y = \log_{0.7} x$

من خلال تمرير عجلة الفأرة، يمكنكم الاقتراب من الرّسوم البيانيّة المرسومة والعثور على نقاط إضافيّة عليها، وكذلك تحريك لوحة الرّسم لفحص سلوك الرّسوم البيانيّة في الأجزاء غير الظّاهرة في الرّسم في هذه الصّفحة.

تمعّنوا في الرّسوم البيانيّة، واكتبوا بالنّسبة لكلّ **واحدة من الدّوالّ** خصائص الرّسم البيانيّ الّذي يصفها وفقًا للتّعليمات التّالية:

1. ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟ كيف ينعكس على الرّسم البيانيّ للدّالّة ؟
2. لأيّ قيمةٍ تقترب الدّالّة، عندما يقترب x إلى الصّفر ؟
3. هل هناك خطّ تقاربٍ مُعامدٌ لأحد المحورَيْن (أفقيّ أو عموديّ) ؟ إذا أجبتم نعم، ما هي معادلته ؟
4. ما هي إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور x ؟
5. في أيّ الأرباع يمرّ الرّسم البيانيّ، وما المجال الّذي تكون فيه الدّالّة الّتي يصفها موجبة / سالبة ؟
6. أيٌّ من بين الرّسوم البيانيّة الثّلاثة يتواجد فوق الرّسمَيْن الآخرَيْن عندما يكون $x > 1$ ؟
7. أيٌّ من بين الرّسوم البيانيّة الثّلاثة يتواجد فوق الرّسمَيْن الآخرَيْن عندما يكون $0 < x < 1$ ؟

مهمّة: تصرّف الرّسم البيانيّ للدّالّة $y = \log_a x$

أكملوا في دفاتركم:

بالنّسبة لـِ $a > 1$ ، كلّما كَبُرَ **a** هكذا الرّسم البيانيّ للدّالّة $y = \log_a x$
_____ (يتصاعد/يتنازل) بصورةٍ _____ (معتدلة / منحدرة) أكثر.

بالنّسبة لـِ $0 < a < 1$ ، كلّما كَبُرَ **a** هكذا الرّسم البيانيّ للدّالّة $y = \log_a x$
_____ يتصاعد/يتنازل) بصورةٍ _____ (معتدلة / منحدرة) أكثر.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّفّ الثّاني عشر – المنهج الجديد

إجمال

خصائص الدّالّة اللّوغريثميّة $f(x)=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)

مجال التّعريف: $x>0$

إحداثيّات نقطة تقاطع الرّسم البيانيّ للدّالّة مع المحور x : $(1,0)$

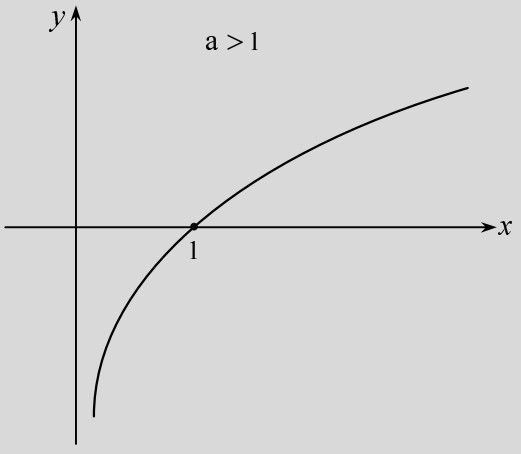
معادلة خطّ التّقارب العموديّ: $x=0$

مجال التّصاعد / التّنازل:

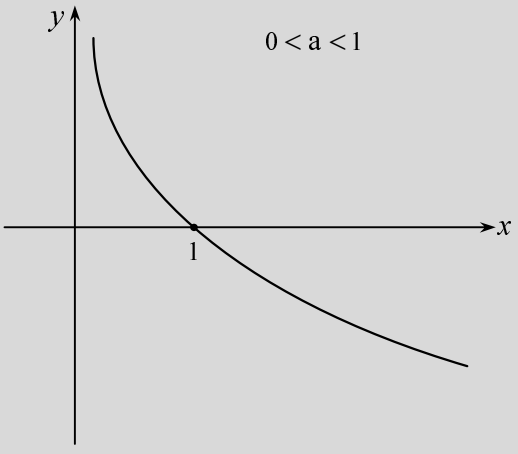
- إذا كان $a>1$: تكون الدّالّة تصاعديّة لكلّ x . (أُنظروا **الرّسم "أ"**)
- إذا كان $0<a<1$: تكون الدّالّة تنازليّة لكلّ x . (أُنظروا **الرّسم "ب"**)

اَلمجال الّذي فيه الدّالّة موجبة / سالبة:

- إذا كان $a>1$: الدّالة موجبة في المجال $x>1$ وسالبة في المجال $0<x<1$.
(أُنظروا **الرّسم "أ"**)
- إذا كان $0<a<1$: الدّالّة موجبة في المجال $0<x<1$ وسالبة في المجال $x>1$.
(أُنظروا **الرّسم "ب"**)



الرّسم "أ"



الرّسم "ب"

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّف الثّاني عشر – المنهج الجديد

تمارين للعمل الذّاتيّ

(1) (أ) معطاةٌ الدّالّة $y=\log_4 x$. ما هو مجال تعريفها ؟

(ب) أكملوا النّاقص في جدول القيم أمامكم.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y							

(ج) عيّنوا النّقاط في هيئة المحاور، وارسموا الرّسم البيانيّ للدّالّة $y=\log_4 x$.

(د) ما هي معادلة خطّ التّقارب العموديّ للدّالّة $y=\log_4 x$ ؟

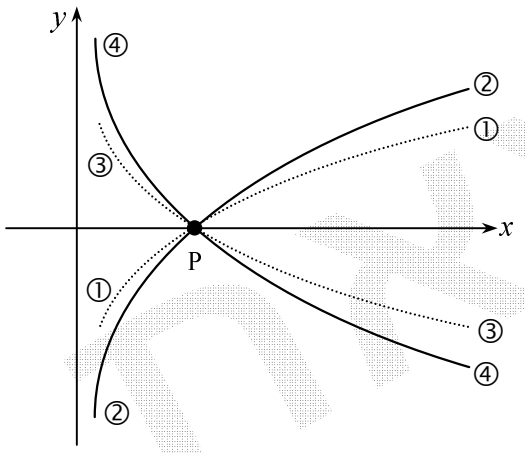
(2) يظهر في الرّسم أمامكم وصفٌ لرسومٍ بيانيّة لأربع دوالّ أُشير إليها بواسطة الأرقام ① , ② , ③ , ④ .

معطاةٌ فيما يلي معادلات أربع دوالّ:

أ $y=\log_2 x$ ب $y=\log_3 x$

ج $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ د $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

معلومٌ أنّ الرّسوم البيانيّة المرسومة أمامكم هي لهذه الدّوالّ الأربع.



(أ) أُكتبوا رقم الرّسم البيانيّ المناسب لكلّ واحدة من الدّوالّ الأربع.

(ب) ما هي إحداثيّات النّقطة P ؟

(3) (أ) أُرسموا في **نفس** هيئة المحاور الرّسم البيانيّ لكلّ واحدة من الدّالّتَيْن $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$.

(ب) قارنوا بين الدّالّتَيْن من خلال التّطرّق إلى الخصائص التّالية: مجال التّعريف، نقاط التّقاطع مع المحورَيْن، المجال الّذي فيه الدّالّة موجبة / سالبة، مجالات التّصاعد / التّنازل، خطوط التّقارب.

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) $x>0$ (ب)

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5

(ج) إفحصوا مع المعلّم في الصّفّ.

(د) $x=0$

(*) **ملاحظة:** عليكم فحص باقي الأجوبة مع المعلّم في الصّفّ.

© جميع الحقوق محفوظة **لجابي يكوئيل** – משבצת – رياضيّات لطلّاب 4 وحدات تعليميّة – الصّفّ الثّاني عشر – المنهج الجديد