סדרת אולימפוס

מתמטיקה לכיתה י"א

משבצת

מתמטיקה

3 יחידות לימוד

כיתה י"א ♦ חלק א

מדריך למורה

אשכול חברה ומדע

צוות משבצת: עדה לוי, רחל בלומנקרנץ, דיה זגורי, בת-שבע אילני, ברכה מוזיקנט, שחר זק, דוד רץ, רנה זלוטניק, גבי יקואל

משבצת
ספרי מתמטיקה

תא דואר: 1441 , קרית טבעון 3601702
טלפון: 04-8200929 , פקס: 04-8200106
כתובתנו באינטרנט:www.mishbetzet.co.il

מדריך למורה – כיתה י"א 3 יחידות לימוד
אשכול חברה ומדע

מבוא

מתמטיקה לתלמידי כיתה י"א - 3 יחידות לימוד – אשכול חברה ומדע

״אשכול חברה ומדע״ הוא האשכול הראשון מתוך שלושה אשכולות המיועדים ללימוד מתמטיקה בכיתה י״א ברמה של 3 יחידות לימוד.

האשכול השני הוא ״אשכול התמצאות במישור ובמרחב״ (אשכול גאומטרי)

והאשכול השלישי הוא ״אשכול כלכלי פיננסי״.

אחת מהמטרות של תוכנית הלימודים החדשה במתמטיקה היא ללמד נושאים מתמטיים באמצעות שאלות מציאותיות מחיי היומיום.

השאלות ב״אשכול חברה ומדע״ עוסקות בנושאים חברתיים ונושאים מדעיים.

״אשכול חברה ומדע״ לכיתה י״א הוא המשך ל״אשכול חברה ומדע״ לכיתה יוד וחלק מהנושאים מתבססים על הנלמד בספר לכיתה יוד.

אם הנושא הוא המשך לנושא הנלמד בכיתה יוד, הפרק מתחיל מתזכורת וחזרה על הנלמד. השאלות ברמת קושי מפתחת – משאלות ברמת ידע וזיהוי, ועד לשאלות מתפתחות, כלומר שאלות שבהן מוסיפים מידע לנתון ועליו שואלים שאלות, והשוואה.

תרגילים של טכניקה אלגברית נמצאים במהל ההוראה לפני השאלות שלפתרון שלהן נדרשת טכניקה אלגברית. ההמלצה שלנו היא ללמד באופן זה, בהקשר.

מה אפשר למצוא <u>בספר</u> ?

(1) **משימת פתיחה** שהנושא שלה עוסק בתוכן הנלמד בסעיף.
זוהי לרוב משימה שהשאלות בה הן איכותיות.
השאלות מעוררות **שיח בכיתה** ומדגישות את הנחיצות בלימוד הנושא המתמטי שבפרק.
אנו ממליצים לעשות אותה בכיתה **ולדון עליה**.
משימות הפתיחה מהווים כניסה רכה של התלמידים ללימוד הנושא המתמטי.
לעיתים מופיעה גם משימה חישובית אחרי משימת הפתיחה.

(2) **תאוריה** מלווה בהסברים, בהגדרות ובדוגמאות פתורות.
הדוגמאות כתובות בצורה מדורגת ובכל דוגמה יש היבט אחר של הנושא. אנו ממליצים לקרוא את הדוגמאות הפתורות בכיתה, ולדון עליהן עם התלמידים. התרגילים בעבודה העצמית בדרך כלל מסודרים בהתאמה לדוגמאות.
המסקנות, ההגדרות והסיכומים מוקפים במסגרת וכתובים על רקע תכלת.

(3) הערות ותזכורות מסומנות ב״**שימו לב**״. **קטעי מידע** מטרימים לטקסט אורייני ואנו ממליצים להתייחס אליהם לפני מתן דוגמה או תרגיל שיש בו התייחסות לנושא.

(4) **סיכום** של כל מה שנלמד בפרק. הסיכום כתוב במסגרת על רקע תכלת.
כאשר מופיעה מסקנה בסיכום שיש לה גיבוי בדוגמה פתורה, יש גם הפנייה לדוגמה המתאימה.

(5) בסוף כל סעיף יש **תרגילים לעבודה עצמית**.
התרגילים מסודרים לפי רמת קושי עולה.
לעיתים התרגילים הראשונים הם תרגילים בסיסיים המתרגלים את נושא הפרק.
בהמשך יש שאלות אוריינות עם "סיפור", ובתוכן שזורים חישובים מתמטיים בנושא הפרק.
בסוף כל פרק יש פתרונות סופיים.

(6) בסוף הספר יש **נספח** ובו הוראות לשימוש במחשבון.

מה אפשר למצוא במדריך למורה ?

(1) **מבוא** לכל היחידה כולל הדגשים הקשורים לחומר הלימוד.

(2) **פריסת הוראה מומלצת** המותאמת לפריסת ההוראה המומלצת של הפיקוח על המתמטיקה.
בפריסת ההוראה אנו מציינים גם את שעות ההוראה המומלצות לכל נושא.
יש להתייחס לשעות אלה בגמישות. ייתכן שיהיו נושאים שידרשו יותר זמן וכאלה, שפחות.
זאת מסגרת הזמן המומלצת אך יש להתאימה לקצב של הכיתה. אם יש יותר שעות הוראה, ניתן להעמיק יותר, לעבור על תרגילים נוספים או להתקדם מהר יותר.

(3) **דגשים מתמטיים ופדגוגיים** בקשר לנושא הנלמד.
נושאים של ידע מקדים, סעיפים שאנו ממליצים להדגיש או לדון בהם בכיתה ולהסב את תשומת לבם של התלמידים.

אלגברה לפי הקשר וצורך – טכניקה אלגברית משולבת בספר לפי הקשר וצורך.
לפני סעיף שנדרשת בו טכניקה אלגברית שלא נלמדה בעבר, תהיה למידה של הטכניקה האלגברית המתאימה. טכניקה אלגברית שנלמדה ויש בה שימוש בסעיף מופיעה בנספח בסוף הספר.
אם מורה מרגיש צורך לערוך חזרה קצרה בנושא מסוים, הוא יכול להיעזר בתרגילים שבנספח.

המחשה מתוקשבת – התלמידים יתנסו בפעילויות מתוקשבת מוכנות באקסל, ישערו השערות הניתנות לבדיקה באמצעות היישומון ויוכלו לנסח למקרים כלליים. הלמידה הפעילה משפרת את ההבנה, מעודדת חשיבה ושיח מתמטי ותורמת להנאה של התלמידים.
פעילויות מתוקשבות נוספות לאלו המופיעות בספר, שנכתבו על ידי צוות משבצת, ניתן למצוא באתר האינטרנט של משבצת, בחומרים המשויכים לספר זה.

לשימוש המורים והתלמידים בסעיפים הרלוונטיים יש הסבר על שימוש במחשבון.

(4) **מושגים אוריינים** שיש להסביר לפני שנעשה בהם שימוש בכיתה – בדוגמה או בתרגול (אוריינות טקסטואלית).

פריסת שעות הוראה

על פי הפריסה של משרד החינוך לתוכנית הלימודים החדשה,
ל״אשכול חברה ומדע״ מוקדשות 30 שעות הוראה.
חשוב שכל מורה יתאים את הפריסה לרמת תלמידיו.

שימו לב: פריסת הוראה **לשנת תשפ״ו** ונושאים **שלא יילמדו**, ראו באתר **״משבצת״**.

יחידה 1 : למידת תהליכים ותופעות המתנהגים באופן מעריכי בהקשר לחברה ומדע

ליחידה זו מוקדשות 14 שעות הוראה.

סעיף		מספר שעות לפי המלצת ״משבצת״	עמודי תאוריה	עמודי תרגילים
סעיף א זיהוי תהליך מעריכי	א1	2	5 – 11	11 – 16
	א2		18 – 21	21 – 23
סעיף ב חישובים בתהליך מעריכי	ב1	2	25 – 29	29 – 32
	ב2		33	34 – 38
סעיף ג חישובים בתהליך מעריכי באמצעות שימוש בנוסחה	ג1	3	42 – 44	45 – 49
	ג2	1	52 – 55	55 – 58
	ג3	2	59 – 61	61 – 66
	ג4	1	68 – 70	70 – 72
	ג5	2	74	74 – 76
סעיף ד הצגת מידע באמצעות תיאור ויזואלי		2	78	79 – 83
סעיף ה השוואה ואומדן בייצוגים שונים		2	85 – 87	88 – 96

יחידה 2 : סטטיסטיקה

ליחידה זו מוקדשות 8 שעות הוראה.

סעיף	מספר שעות לפי המלצת "משבצת"	עמודי תאוריה	עמודי תרגילים
סעיף א ריענון : כלים סטטיסטיים לעיבוד מידע שאלות נוספות בייצוגים שונים	2	99 – 107	108 – 116 117 – 123
סעיף ב מדד הפיזור של נתונים סביב הממוצע	2	127 – 134	135 – 143
סעיף ג * חישוב סטיית תקן שאלות נוספות	3	144 – 151	151 – 163 163 – 166
סעיף ד * הערכת השינוי בסטיית התקן בעקבות שינוי בנתון או הוספה של נתון	3	170 – 178	178 – 189

* **שימו לב:** בשנת תשפ"ו **לא יילמדו** סעיפים : ג , ד .

יחידה 3 : חישוב מתקדם של הסתברות להתרחשויות לא ודאיות

ליחידה זו מוקדשות 8 שעות הוראה.

סעיף		מספר שעות לפי המלצת "משבצת"	עמודי תאוריה	עמודי תרגילים
סעיף א ריענון : הסתברות		2	191 – 198	198 – 204
סעיף ב זיהוי מאורעות תלויים וזיהוי מאורעות בלתי-תלויים		2	206 – 207	208 – 210
סעיף ג כפל וחיבור הסתברויות	ג1	1	211 – 214	215 – 216
	ג2 *	1	218	219 – 220
	ג3	1	221 – 227	228 – 233
סעיף ד דיאגרמת עץ	ד1	1	235 – 241	242 – 247
	ד2	1	249 – 252	252 – 255
	ד3 *	1	256 – 257	257 – 258
סעיף ה השוואת הסתברויות וקבלת החלטות		2	260 – 261	262 – 265
סעיף ו שאלות סיכום וחזרה		1	266 – 270	271 – 275

* **שימו לב:** בשנת תשפ"ו **לא יילמדו** סעיפים : ג2 , ד3 .

יחידה 1: למידת תהליכים ותופעות המתנהגים באופן מעריכי בהקשר לחברה ומדע

רציונל

ביחידה נלמד לזהות תהליך (מודל) מעריכי – גדילה או דעיכה, בהשוואה למודל ליניארי לתיאור תופעות מציאותיות בטבע ובחברה ולהעריך את השינוי בכמויות בכל אחד מהמודלים. נלמד לזהות מתוך תיאור מילולי וויזואלי מה מייצגים: הכמות ההתחלתית, מקדם הגדילה / הדעיכה, יחידת הזמן, הכמות הסופית. נלמד לבצע חישובים ולחשב כמויות כעבור זמן קטן של יחידות זמן ולחשב את מקדם הגדילה / הדעיכה ביחידת זמן ללא שימוש בנוסחה.

נלמד להשתמש בנוסחה המתארת את התהליך המעריכי $\mathrm{A}_t = \mathrm{A}_0 \cdot q^t$ בצורה הדרגתית על כל מרכיביה.

נלמד להיעזר בנוסחה לחישובים גם כאשר חלק מהנתונים ניתנים בתיאור גרפי.

נשים לב לקביעת יחידת זמן אחידה ונפתח יכולת לאמוד כמות כתוצאה של תהליך מעריכי בהשוואה לתהליך מעריכי אחד או בהשוואה לתהליך ליניארי.

תוכן מתמטי נלווה

- אחוזים
- קריאת גרפים
- המרת יחידות מידה
- המודל הלינארי (גרפית)
- שינוי נושא נוסחה
- טכניקה אלגברית נוספת נלמדת לפי הקשר וצורך (תלמד בסעיף ג)

מושגים ביחידה

- אחוז
- גדילה / דעיכה מעריכית
- תהליך לינארי
- כמות של חומר
- מקדם גדילה / דעיכה
- יחידת זמן

דגשים מתמטיים ופדגוגיים

סעיף א: זיהוי תהליך מעריכי של גדילה / דעיכה

א1. זיהוי תהליך מעריכי (ללא אחוזים)

נבחין בין:

- שינוי ליניארי לבין שינוי מעריכי.
- שינויים מעריכיים עם אותה מגמה (גדילה או דעיכה).
- שינויים מעריכיים – אחד גדילה ואחד דעיכה.

נלמד לאמוד ולחשב כמויות בזמנים שונים ואת גודל מקדם הגדילה / הדעיכה לפי כמויות נתונות.

דגשים והערות

- בדוגמאות הפתורות ובתרגילים לעבודה עצמית יושם דגש על השוואה בין תהליך מעריכי ללינארי אחרי הצבה וחישובים של כמויות.
- זיהוי והתאמה של סוג התהליך (לינארי או מעריכי) מתוך ייצוג מילולי או גרפי. התלמידים יזהו שכאשר הכמות משתנה "פי מספר קבוע" או "באחוז מסוים" אז התהליך הוא מעריכי. כאשר הכמות משתנה במספר קבוע של יחידות, התהליך הוא לינארי.
- תיאור גדילה / דעיכה מעריכית יתבטא באמצעות הניסוחים הבאים:
  גדול פי – קטן פי – גדול/קטן ב- , גדול/קטן באחוז.
- הדגשת קצב השינוי המהיר של תהליך מעריכי.
- קשר בין צורת הגרף לבין תהליך לינארי / מעריכי גדל / מעריכי דועך.
- קשר בין תהליך מעריכי של גדילה / דעיכה למקדם הגדילה (גדול מ-1 או חיובי קטן מ-1).

ידע מקדים

- קריאת נתונים מגרף
- המרת יחידות

אוריינות טקסטואלית

ניסוי מדעי, תמיסה, צריכת חשמל במשק, חוג לימוד, עוקב ברשת חברתית, ריכוז חומר פעיל, אורגניזם.

התייחסות לתרגילים

עמוד 15 תרגיל **(8)** –

(א) יש להבין מצורת הגרפים הנתונים, שגרף ① מתאר התרבות מהירה יותר של החיידקים. אפשר להסביר כך: בתחילת התהליך, מספר החיידקים בתמיסה ① היה קטן ממספר החיידקים בתמיסה ② . כעבור שעתיים (נקודה A) מספר החיידקים בשתי התמיסות היה **שווה**, לכן התרבות החיידקים בתמיסה ① היה מהיר יותר מאשר בתמיסה ② .

(ג) החיידקים ממשיכים להתרבות באותו האופן ולכן כעבור 3 שעות מספר החיידקים בתמיסה ① יהיה **גדול יותר** מאשר מספר החיידקים בתמיסה ② .

עמוד 15 תרגיל **(9)** –

(ה) הטמפרטורה של הנוזלים ממשיכה לגדול באותו אופן, כלומר שינוי הטמפרטורה בגרף ① יהיה המהיר ביותר, והשינוי בטמפרטורה בגרף ③ יהיה האיטי ביותר.
לכן הגרפים לא ייפגשו פעם נוספת.
כבר בסרטוט הקיים רואים שהגרפים מתרחקים זה מזה ככל שעובר הזמן.

עמוד 16 תרגיל **(10)** –

(א) הגרף **איננו** ישר ולכן השינוי בתהליך הוא מעריכי.

(ב) הגרף יורד ולכן הוא מתאר תהליך של דעיכה.

א2. זיהוי תהליך מעריכי – השינוי באחוזים

בסעיף זה נלמד לזהות תהליך מעריכי ונבחין בין תהליכים כפי שפירטנו בסעיף א1, כשהשינוי נתון באחוז.

ידע מקדים

- אחוז כפעולת ככפל

דגשים והערות

שימו לב: יש תהליכים שאינם מעריכים ואינם ליניאריים, אבל בסעיף זה נעסוק **רק** באחד משני התהליכים הללו (ראו הערה בעמוד 11).

הזיהוי מתבצע לפי צורת הגרף, או לפי ניסוח מילולי.

זיהוי גרפי – אם הגרף **ישר** אז הוא מתאר תהליך **לינארי**;
אם הגרף **איננו ישר** אז הוא מתאר תהליך **מעריכי**.

זיהוי מילולי – אם הכמות גדלה / קטנה במספר מסוים אז התהליך הוא **לינארי**;
אם הכמות גדלה / קטנה **פי** מספר מסוים או **באחוז** מסוים אז התהליך הוא **מעריכי**.
(ראו מסגרת בעמוד 8).

בעמוד 21 יש סיכום על ההבדל בין גדילה לדעיכה.

חשוב **להדגיש**: **בגדילה** כופלים את הכמות במספר **גדול מ-1**
בדעיכה כופלים את הכמות במספר **חיובי קטן מ-1**.

למשל, אם מספר הדגים בבריכה **גדל ב-** 1.2% מדי חודש: $\frac{100+1.2}{100}=1.012$

מספר הדגים בבריכה **גדל פי** 1.012 מדי חודש ולכן התהליך הוא תהליך מעריכי המתאר גדילה (עמוד 21 תרגיל 3).

התייחסות לתרגילים

עמוד 22 שאלות **(5)** , **(6)** –

כאשר התלמיד נדרש להסביר את בחירתו, עליו להראות את החישוב למספר בו מוכפלת הכמות.

למשל בשאלה **(5)**, אם מספר העוקבים של אלעד ברשת החברתית **גדל ב-** 10% מדי שבוע,
אז - $\frac{100+10}{100}=1.1$

ולכן מספר העוקבים של אלעד גדל בכל שבוע **פי** 1.1 . התשובה הנכונה היא **ב**

<u>עמוד 23 תרגיל **(8)** (ב) –</u>

התשובה הנכונה היא ① אפשר להסביר את הבחירה על ידי פסילה של מסיחים :

במסיחים ② , ③ ריכוז הסוכר **קטן ב-** ולכן התהליך הוא תהליך לינארי.

במסיח ④ ריכוז הסוכר **גדל באחוז** ולכן התהליך הוא תהליך של גדילה ולא של דעיכה.

שיטה זו נקראת **"שיטת האלימינציה"** : שלילה של כל מה שלא יכול להיות.

<u>עמוד 23 תרגיל **(9)** (ב) –</u>

הגרף המיותר הוא גרף **II**

הגרף מתאר תהליך של דעיכה.

סיפור אפשרי : לבצק נוסף חומר "מעכב" הגורם לנפח הבצק לקטון.

סעיף ב: חישובים בתהליך מעריכי ללא שימוש בנוסחה

ב1. חישובים בתהליך מעריכי <u>(ללא אחוזים)</u>

נלמד לזהות נתונים בהקשר אורייני ולחשב כמויות בתהליך מעריכי :

- שינוי בכמות חומר אחרי ולפני מספר יחידות זמן (סופית והתחלתית) (עמוד 26 דוגמה **(1)**).
- מקדם הגדילה / דעיכה מנתון מילולי (עמוד 27 דוגמה **(2)**) ומנתון גרפי (עמוד 28 דוגמה **(3)**).
- יחידת זמן.

<u>ידע מקדים</u>

- המרה של יחידות זמן

<u>אוריינות טקסטואלית</u>

התפשטות של נגיף, מפקד אוכלוסין.

<u>דגשים והערות</u>

- התלמידים ידעו לזהות מהנתונים האוריינים את הכמות בתחילת התהליך, מקדם הגדילה / הדעיכה, יחידת הזמן, הכמות ההתחלתית. הזיהוי הוא מילולי (ללא שימוש באותיות שהן הפרמטרים בנוסחה).
- כל החישובים בסעיף זה ללא שימוש בנוסחה אלא על ידי ביצוע של פעולות כפל או חילוק לכמות נתונה. אי לכך, כל יחידות הזמן יהיו קטנות.
- המידע מוצג בתיאור מילולי.
- קביעת יחידת זמן של התהליך. יחידת זמן הוא מושג שנלמד מתוך דוגמאות ולכן יש חשיבות רבה למתן דוגמאות רבות להבניית המושג.
- המרת יחידות.
- הבחנה בין משתנה רציף לבין משתנה בדיד ועיגול מספרים בהתאם.
- חישוב של מקדם הגדילה / דעיכה על ידי חישוב המנה של שתי כמויות בשתי יחידות זמן עוקבות.
- תהליך יכול לשנות מגמה ולא להמשיך להשתנות מעריכית.
- חישוב של אחוז השינוי על פני תקופת זמן.

<u>משימת פתיחה (עמוד 25)</u>

זוהי משימה פתוחה לפתיחת הנושא, שמטרתה לעורר עניין ומוטיבציה.

כדאי לדון בכיתה ולתת לתלמידים לנסות לפתור "אינטואיביתי" **ולא** לדרוש פתרון פורמלי.

א. ביום מסוים היו בחבית היין 10 גרם של שמרים. כעבור יום כמות השמרים הייתה 15.

אפשר לשאול: האם ייתכן שמספר השמרים גדל פי 2 ?

תשובה – מספר החיידקים בחבית גדל **פי** 1.5.

א. אם מספר החיידקים גדל בכל יום **פי** 1.5 אז – כמות החיידקים כעבור יום נוסף (היום השלישי) היא 22.5 חיידקים ($15\cdot1.5=22.5$).

ב. לפי המתואר, מדי יום כמות הסוכר **יורדת** ולכן התהליך הוא תהליך של **דעיכה**.

ג. ניתן לבחור את התשובה על ידי פסילה של מסיחים –

במסיח ① מתואר תהליך של גדילה.

במסיח ③ מתואר תהליך שנותר ללא שינוי (הכפלת מספר ב- 1).

התשובה הנכונה היא ② .

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 30 תרגיל **(6)** (א) –</u>

על התלמיד לזהות מההקשר האורייני שאם בהתחלה היו $12{,}000$ חיידקים,
וכעבור שעה **נותרו** $9{,}000$ חיידקים, התהליך המתואר הוא תהליך של **דעיכה** ($12,000 > 9,000$).

<u>עמוד 31 תרגיל **(8)** –</u>

(א) התהליך הוא תהליך מעריכי. כתוב **יגדל פי**.

(ה) אם ההפרש בין מספר החטיפים שיוצרו בין חודש פברואר לבין חודש מרץ הוא 180 ,
ההפרש בין מספר החטיפים שיוצרו בין חודש ינואר לבין חודש פברואר יהיה קטן יותר,
ולכן בהכרח קטן מ- 560 .

<u>הערה:</u> אפשר להזכיר את סדר החודשים הלועזי.

<u>עמוד 32 תרגיל **(12)** –</u>

<u>שימו לב:</u> כדאי לבחור את יחידת הזמן כשעתיים.

ב2. חישובים בתהליך מעריכי (עם אחוזים)

בסעיף זה נבצע אותם החישובים שביצענו בסעיף ב1, אלא שהפעם השינוי יינתן באחוזים.

<u>ידע מקדים</u>

- חישוב אחוזים

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 34 תרגיל **(6)** –</u>

(ג)+(ד)

כאשר התלמיד נדרש להסביר את תשובתו עליו לבצע חישובים.

$$\frac{100+4.2}{100}=1.042$$

(ג) לפי סעיף (ב) כעבור 4 ימים נדבקו 94 ארנבות.

<u>שימו לב:</u> יש **לעגל** את התוצאה המתקבלת למספר שלם, כי מספר ארנבות הוא **תמיד** מספר שלם.

נחשב את מספר הארנבות שנדבקו :

כעבור 5 ימים $94\cdot1.042=97.948$

(ד) כעבור 6 ימים $97.948\cdot1.042=102.061$

כעבור 6 ימים **לא** נדבקו יותר מ- 105 ארנבות.

בשבוע יש 7 ימים.

נחשב את מספר הארנבות שנדבקו כעבור 7 ימים $102.061\cdot1.042=106.348$

כעבור שבוע נדבקו **יותר מ-** 105 ארנבות.

<u>עמוד 36 תרגיל **(10)** –</u>

בשאלה זו יש ערכים **שניתן** לקרוא מהגרף (סעיפים (א), (ב))

ויש ערכים שצריך **למצוא** על ידי חישוב (סעיפים (ד), (ה)).

על התלמיד להפעיל שיקול דעת **ולא** לנסות להעריך מתוך הגרף בתשובותיו לכל הסעיפים.

<u>עמוד 37 תרגיל **(11)** (ג) –</u>

על התלמיד לחשב את זמן ההמתנה למתן שירות בחודש אפריל.

בחודש מרץ (לפי סעיף (א)) זמן ההמתנה הוא 15.36 דקות.

בחודש אפריל זמן ההמתנה הוא 14.74 דקות ($15.36\cdot0.96=14.74$).

$14.74<15$, ולכן הזמן **נמוך מרבע שעה**.

<u>שימו לב:</u> יש להמיר יחידות מדקות לשעות.

<u>עמוד 37 תרגיל **(12)** (ה) –</u>

על התלמיד לחשב את מספר אריזות הנייר המיוצרות מדי שנה ולבדוק באיזו שנה מספר האריזות המיוצרות יהיה **גבוה מ-** 555,555 (50% **יותר מ-** 370,370 הם 555,555).

מספר האריזות המיוצרות בשנת 2023 הוא 466,560 אריזות.

בשנת 2024 $466,560\cdot1.08=492,004.8<555,555$

בשנת 2025 $492,004.8\cdot1.08=531,365.184<555,555$

בשנת 2026 $531,365.184\cdot1.08=573,874.3987>555,555$

סעיף ג: חישובים בתהליך מעריכי באמצעות שימוש בנוסחה

בסעיף זה נכיר ונלמד להשתמש בנוסחה $\mathrm{A}_t = \mathrm{A}_0 \cdot q^t$.

התלמידים כבר ביצעו חישובים ולכן לפני הכרות עם הנוסחה אנו ממליצים להסביר את הרציונל ואת הצורך בשימוש בביטוי אלגברי לחישוב (עמוד 40).

הנתונים בסעיף זה מילוליים או ויזואליים (טבלה).

לצורך החישובים נעשה שימוש בטכניקה אלגברית של **שינוי נושא נוסחה**.

בסעיף זה נשתמש לראשונה באותיות המייצגות את המשתנים :

A_0 – כמות החומר בתחילת התהליך (כמות התחלתית)

q – מקדם הגדילה או הדעיכה של החומר (פי כמה החומר גדל או קטן בכל יחידת זמן)

t – מספר יחידות הזמן

A_t – כמות החומר לאחר t יחידות זמן (כמות סופית).

<u>משימת פתיחה (עמוד 41)</u>

זוהי משימה פתוחה לפתיחת הנושא, שמטרתה לעורר עניין ומוטיבציה.

כדאי לדון בכיתה ולתת לתלמידים לנסות לפתור "אינטואיטיבית" **ולא** לדרוש פתרון פורמלי.

מטרת המשימה היא להבנות את הנוסחה על ידי כפל חוזר והבנת החוקיות.

כדאי לתת לתלמידים להשלים את הטבלה למספר חזרות עד להבנה של החוקיות ואז לבצע הכללה באותיות.

ג1. חישוב כמויות בעזרת הנוסחה

- זיהוי הנתונים q , A_0 וחישוב A_t (דוגמה **(1)**).
- חישוב q כאשר השינוי נתון ב- p אחוזים (דוגמה **(2)**) ושימוש בנוסחה $q = \frac{100+\mathrm{p}}{100}$.
- חישוב A_0 (דוגמה **(3)**).
- חישוב "כמות סופית" ו"כמות התחלתית" הן כמות עתידית וכמות בעבר (אחרי ולפני מספר יחידות זמן), לא בהכרח כמות החומר בסוף או בתחילת התהליך.
- ניתן להיעזר בטבלה לארגון הנתונים.
- אנו ממליצים לתרגל שאלות בהן יחידות הזמן כתובות בפתיח של השאלה (עמוד 45 תרגילים **(1)** (א), **(2)** (א), וגם שאלות שצריך להסיק את מספר יחידות הזמן.
- שינוי של תהליך (עמוד 48 תרגיל **(16)**, עמוד 49 תרגיל **(20)**).
- הבנה איכותית של הצבת הפרמטרים בנוסחה (עמוד 48 תרגיל **(15)**, עמוד 49 תרגיל **(19)**).
- חישוב השינוי של הכמות באחוזים לאורך זמן (עמוד 48 תרגיל **(18)** (ב), עמוד 49 תרגיל **(20)** (ג)).
- ספירליות ושימוש בנלמד בסעיפים קודמים - חישוב ללא שימוש בנוסחה והערכת כמות.

מיומנות אלגברית

- לחישוב A_t – אנו ממליצים להציג את אופן חישוב פעולת החזקה במחשבון.
דוגמאות ותרגול בהצבה במחשבון נמצאים בנספח.
- לחישוב A_0 – אנו ממליצים לחזור על פתרון משוואות בנעלם אחד.
דוגמאות ותרגול פתרון משוואות מהסוג הדרוש נמצא בנספח. אנו ממליצים לפתור את המשוואות ולהשאיר A_0 – ולא להחליפו בנעלם " x ".
- לשים לב לקריאה נכונה של המספרים במחשבון ולעגלם במידת הצורך.

התייחסות לתרגילים

עמוד 47 תרגיל **(12)** (ב) –

יש לחשב את מספר יחידות הזמן ובהתאם לענות מהי השעה.

עמוד 49 תרגיל **(19)** (ג) –

מספר החיידקים בכל אחת מהצלחות: 1. 318.44 2. 158.32 3. 331.22

ג2. התאמה של הזמן (t) ליחידת הזמן

- הבחנה בין יחידת הזמן לבין הזמן שחלף.
- המרת יחידות זמן (דוגמאות מופיעות בעמוד 55 מסגרת כחולה).
- יש לשים לב ל- t **שאיננו** מספר שלם.
למשל, אם יחידת הזמן היא 3 שנים אז כדי לחשב כמות כעבור שנה וחצי נציב $t = 0.5$
- הסקה של הזמן שחלף מתוך הנוסחה.
- ספיראליות ושימוש במה שנלמד בסעיפים קודמים.

התייחסות לתרגילים

עמוד 56 תרגיל **(5)** (א) –

בשאלה זו נדרשת המרת יחידות זמן. אם משקל הבקטריות גדל פי 1.07 בכל חודש אז כעבור שנה וחצי עברו 18 יחידות זמן של חודש. לכן התשובה הנכונה היא ③.
יש להזכיר: בשנה יש 12 חודשים.

עמוד 56 תרגיל **(6)** (ג) –

רונן חישב את מספר החיידקים מתחילת התהליך למשך שעתיים שהן 12 יחידות זמן של 10 דקות.
בחישוב של רונן $q = 2$ כי מספר החיידקים גדל פי 2 בכל 10 דקות.
נופר חישבה את מספר החיידקים מתחילת התהליך למשך שעתיים שהן שתי יחידות זמן של שעה.
בחישוב של נופר $q = 64$ כי מספר החיידקים גדל פי 64 בכל שעה ($2^6 = 64$).

עמוד 56 תרגיל **(7)** (ב) –

כדאי להבין למה $q=\frac{1}{4}$ אפשר לתת דוגמאות מספריות.

לדוגמא: משקל החומר הוא $1,000$ גרם. בכל 20 שנה הוא **קטן לרבע ממשקלו**.

משקלו אחרי 20 שנה יהיה 250 גרם.

כדי לקבל 250 גרם, $q=\frac{1}{4}$

בדיקה: $A_t=A_0\cdot q^1$

$$250\overset{?}{=}1,000\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1$$

$$250=250 \quad \checkmark$$

טעות נפוצה של תלמידים לומר ש- $q=\frac{3}{4}$.

עמוד 57 תרגיל **(11)** –

(א) $q=\frac{100-3}{100}=0.97$ בכל **חודשיים**, כפי שכתוב בפתיח של השאלה.

(ד) היעד של משרד הבריאות הוא **לכל היותר** $285,578$ מעשנים ($342,000-125,000=285,578$).

שימו לב: בשנתיים יש 12 יחידות זמן של **חודשיים**.

נחשב את מספר המעשנים במדינה כעבור שנתיים:

$$A_{12}=410,578\cdot0.97^{12}=284,876.4<285,578$$

לפיכך התשובה היא שמשרד הבריאות עמד ביעד.

ג3. חישוב מקדם הגדילה / דעיכה

- בסעיפים קודמים למדנו לחשב את מקדם הגדילה / דעיכה כשהוא נתון באחוז או כשנתונות שתי כמויות עוקבות. רצוי להדגיש את הצורך בחישוב q כאשר נתונות שתי כמויות **שאינן עוקבות**.
- מעבר ממספר (q) לאחוז (p).
- ביקורת עצמית לפתרון – אם התהליך המתואר הוא תהליך של גדילה, נקבל $q>1$ ואם התהליך הוא תהליך של דעיכה נקבל $0<q<1$.
- ספיראליות ושימוש בנלמד בסעיפים קודמים .

מיומנות אלגברית

- שימוש במחשבון והיכרות עם פעולת שורש לא ריבועי (עמוד 59 דוגמה **(1)**, עמוד 61 תרגיל **(1)**).
- פעולת השורש כפעולה הפוכה לחזקה (עמוד 59 דוגמה **(2)**).
- פתרון משוואה $A_t=A_0\cdot q^t$ כאשר הנעלם הוא t .
- בפתרון המשוואות אנו ממליצים לכתוב את הנעלם באות t **ולא** להחליפו ל- " x ".

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 63 תרגיל **(9)** –</u>

התלמיד יכול להסביר את תשובתו על ידי הצבה נכונה של הפרמטרים בנוסחה.

<u>עמוד 63 תרגיל **(10)** –</u>

(א) על התלמיד להסביר בהתאם לערכי הפרמטרים.

בצלחת א - $A_0 = 10$, $A_5 = 80$ ולכן התהליך הוא תהליך של ***גדילה***.

בצלחת ב - $A_0 = 80$, $A_5 = 10$ ולכן התהליך הוא תהליך של ***דעיכה***.

(ב) סעיף זה מסתמך על הסיכום בעמוד 21 .

כאשר התהליך הוא תהליך של **גדילה** $q > 1$ (צלחת א),

וכאשר התהליך הוא תהליך של **דעיכה** $0 < q < 1$ (צלחת ב).

<u>עמוד 63 תרגיל **(11)** –</u>

(א) ***<u>שימו לב:</u>*** משבוע 1 עד שבוע 5 עברו 4 יחידות זמן של שבוע ($5-1=4$).

(ג) ההסבר כאן הוא על ידי חישוב.

יש לחשב את אורך מסלול הריצה של אורן כעבור 8 שבועות ולראות אם יתקבל מסלול שאורכו גדול מ- 30 ק״מ. $A_8 = 8 \cdot 1.2^8 = 34.4 > 30$

<u>עמוד 64 תרגיל **(12)** (ג) –</u>

שימו לב להערה שלפני הסעיף: השינוי **איננו** מעריכי.

<u>עמוד 64 תרגיל **(13)** –</u>

בשאלה זו יש המרת יחידות. 3,000 גרם = 3 ק״ג .

כעבור 5 שעות משקל קוביית הקרח היה **קטן מ-** 300 גרם ולכן מתואר כאן תהליך של **דעיכה**.

(ג) הערך שהתקבל בסעיף (ב) הוא בין 0 ל-1 , ואם כך הוא הדבר, מתואר תהליך של **דעיכה**.

<u>עמוד 65 תרגיל **(16)** –</u>

אפשר לענות על סעיף (ג) מבלי לענות על סעיפים (א), (ב): $\frac{90}{120} = \frac{3}{4}$.

כמות החומר **מוכפלת** ב- $\frac{3}{4}$ בכל שעתיים.

כדי לחשב את כמות החומר בשעה 11:00 נבצע את החישוב הבא: $90 \cdot \frac{3}{4} = 67.5$.

<u>עמוד 65 תרגיל **(19)** (ג.3) –</u>

השאלה פתוחה לדיון בכיתה.

<u>עמוד 66 תרגיל **(20)** (ג) –</u>

הבדיקות נעשות כל 10 שנים. כלומר יחידת הזמן בשאלה היא 10 שנים.

בסעיף (ב) חושב משקל החומר בבדיקה השנייה: 700 גרם. לכן: $A_{10} = A_0 \cdot q^{10}$

$$700 = 1{,}000 \cdot q^{10}$$

כך נוכל למצוא את q כעבור **שנה אחת**.

מתוך החישוב נקבל $q = 0.965$.

כדי לדעת כמה אחוזים ממשקלו מאבד החומר בכל שנה, ניעזר בנוסחה: $q = \frac{100 - p}{100}$

נציב ונקבל: $0.965 = \frac{100 - p}{100} \Rightarrow p = 3.5\%$

כלומר, **בכל שנה** מאבד החומר 3.5% ממשקלו.

למורה: טעות נפוצה של התלמידים היא: אם במשך 10 שנים הוא מאבד 30% ממשקלו,
אז בכל שנה יאבד 3% ממשקלו ($30 : 10 = 3$) וזה כמובן **שגוי !**

<u>עמוד 66 תרגיל **(21)** –</u>

סעיפים (א) ו- (ב) הם פשוטים ונחוצים עבור החישובים בסעיף (ג).

בסעיף (ג) נדרשת הבנה של ״קצב ההחלמה״: **אחוז** המחלימים מהתרופה בכל שבוע.

עבור תרופה A

$$A_3 = A_0 \cdot q^3$$
$$4{,}913 = 8{,}000 \cdot q^3$$
$$0.614125 = q^3 \quad / \sqrt[3]{\ }$$
$$q = 0.85$$

עבור תרופה B

$$A_2 = A_0 \cdot q^2$$
$$1{,}445 = 2{,}000 \cdot q^2$$
$$0.7225 = q^2 \quad / \sqrt{\ }$$
$$q = 0.85$$

עבור שתי התרופות התקבל $q = 0.85$.

לפיכך (ג) ③ היא התשובה הנכונה.

שימו לב: אם רוצים לחשב את **אחוז** המחלימים אפשר להיעזר בנוסחה: $q = \frac{100 - p}{100}$

$$0.85 = \frac{100 - p}{100} \Rightarrow p = 15\%$$

<u>עמוד 66 תרגיל **(22)** (ג) –</u>

סעיפים (א) ו- (ב) דומים לסעיפים (ב) ו- (ג) בשאלה **(20)**.

אחרי הגדילה יש בסעיף (ג) דעיכה.

הכמות ההתחלתית כעת היא 1.24 ק״ג (הכמות שהייתה אחרי 10 שעות של גדילה מעריכית).

הכמות הסופית היא 200 גרם (המשקל ההתחלתי).

t הוא 8 שעות.

ההצבה תהיה כך:

$$A_8 = A_0 \cdot q^8$$
$$200 = 1{,}240 \cdot q^8 \quad / : 1{,}240$$
$$0.161 = q^8 \Rightarrow q = 0.796$$

ג4. חישוב מספר יחידות הזמן

- חישוב ערכו של t על ידי הצבה של המספרים השלמים: 1, 2, 3, 4, 5.
- יש לשים לב לערכים המתקבלים בקירוב.
- אפשר להציב את הנתונים בנוסחה ולהציב מספרים במקום t מבלי לבצע פעולות אלגבריות נוספות. אין צורך להביא את הנוסחה למשוואה מהצורה $q^t = \mathrm{n}$.
- חזרה על התאמה בין t לבין יחידת הזמן בשאלה.
- התייחסות לפתרון דוגמה **(3)** בעמוד 69 – כשנתונה כמות סופית, אפשר לפתור בשתי דרכים:
  דרך ראשונה: חישוב הכמות כעבור יחידת זמן לפי יחידות זמן עוקבות בין 1 ל- 5.
  דרך שנייה: חישוב ערכו של t על ידי הצבה של מספרים ופתרון משוואה מהצורה $q^t = \mathrm{n}$.

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 72 תרגיל **(13)** (ב) –</u>

זוהי השאלה האחרונה בסעיף זה.

סעיף (א) מהווה "קביים" לסעיף (ב).

יחידת הזמן בתהליך המתואר היא 10 שנים.

משמע, 2 יחידות זמן $\Leftarrow$ 20 שנים, 10 יחידות זמן $\Leftarrow$ 100 שנים וכו'.

- אם המשקל המקורי הוא A_0, אז **מחצית** מהמשקל המקורי היא $\frac{\mathrm{A}_0}{2}$.
- **קטן ב-** 20.63% פירושו: $q = 0.7937$.

$$\left(q = \frac{100 - 20.63}{100} \Rightarrow q = 0.7937 \right)$$

בסעיף (ב) אנחנו מחפשים את ערכו של t.

נכתוב: $\mathrm{A}_t = \mathrm{A}_0 \cdot 0.7937^t$

הזמן המבוקש הוא עבור המשקל: $\mathrm{A}_t = \frac{\mathrm{A}_0}{2}$

נציב: $\frac{\mathrm{A}_0}{2} = \mathrm{A}_0 \cdot 0.7937^t \quad / : \mathrm{A}_0$

$$\frac{1}{2} = 0.7937^t \Rightarrow t = 3$$

זכרו שכל יחידת זמן היא 10 שנים, לכן כעבור 30 שנים ($3 \cdot 10 = 30$),
יהיה משקל החומר **מחצית** ממשקלו המקורי.

ג5. שאלות מסכמות

בסעיפים ג1 – ג4 התמקדנו במציאה של כל אחד מהפרמטרים בנפרד בעזרת שימוש בנוסחה.
בשאלות אלו התלמידים צריכים לזהות אילו נתונים יש בשאלה, מה חסר ונותר לחישוב, ובהתאם לבצע חישובים.

אפשר לבקש מהתלמידים בהתחלה לסמן את הנתון ואת החסר. למשל:

	t	q	A_0	A_t
שאלה 1א	✓	✓	✓	?
שאלה 3א	✓	✓	?	✓

<u>דגשים והערות</u>

- בפתרון תרגילים בהם יש לחשב האם תתקבל כמות מסוימת כעבור זמן, אפשר להיעזר בכמות שחושבה בסעיפים קודמים ולהשתמש בכפל הכמות במקדם הגדילה או הדעיכה.
  ראו למשל, תרגיל **(1)** (ב) בהתייחסות לתרגילים.
- לעיתים נדרש לבצע חישוב על ידי שימוש בנוסחה.

<u>אוריינות טקסטואלית</u>

פרסום מקוון, שינוי בנפח, דעיכה של חומר רדיואקטיבי, מצע גידול

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 74 תרגיל **(1)** (ב) –</u>

שימו לב שבסעיף (א) חושב מספר שושנות המים באגם כעבור 5 חודשים שהן 5 יחידות זמן (368 שושנות מים).
כדי לחשב את מספר שושנות המים באגם כעבור חצי שנה (6 יחידות זמן), נכפול את הכמות שהייתה בחודש החמישי במקדם הגדילה $400 < 416 \approx 368 \cdot 1.13$.

<u>עמוד 75 תרגיל **(5)** (ב) –</u>

בשנה הראשונה ייצאה החברה 50 מוצרים. יותר מפי 2 זה לפחות 100 מוצרים.
נציב $t=5$, $q=1.2$, $A_0=50$ בנוסחה $A_t = A_0 \cdot q^t$, ונקבל:

$$A_5 = 50 \cdot 1.2^5 = 124.416$$

ולכן התשובה היא – **כן** ($124.416 > 100$).

<u>עמוד 76 תרגיל **(9)** –</u>

יש לשים לב ליחידת הזמן (3 שעות).

<u>עמוד 76 תרגיל **(10)** (ד) –</u>

במסגרת מבצע ההצלה, אחוז הדעיכה של מספר העופות הדורסים **ירד ב-** 3%.
כלומר, במקום 8%, כרגע **רק** 5%.
כעבור שנתיים מספרם היה 776.
לולא מבצע הצלה, אחוז הדעיכה של מספר העופות הדורסים היה 8%,
וכעבור שנתיים מספרם היה 727 ($860 \cdot 0.92^2 = 727.9$).
$776 - 727.9 = 48.1$. מספר העופות הדורסים שניצלו כעבור שנתיים היה **קטן מ-** 50.

<u>עמוד 76 תרגיל **(11)** (א) –</u>

$$q_B = \frac{100+15}{100} = 1.15$$

שמרים מסוג B מגדילים את נפח הבצק **פי** 1.15 .

$$1.15 > 1.118$$

ולכן סוג שמרים B מגדיל את נפח הבצק **מהר יותר** מאשר סוג שמרים A .

<u>עמוד 76 תרגיל **(12)** (א) –</u>

(א) יש לחשב את מקדם הגדילה **בכל** אחד מהחוגים ומתוכו אפשר להסיק על **האחוז** הגבוה יותר.

חוג א - $1{,}505 = 1{,}300 \cdot q^2$

$q = 1.075$

חוג ב - $1{,}217 = 800 \cdot q^2$

$q = 1.233$

ולכן **בחוג ב** מספר הנרשמים גדל באחוז **גדול יותר** מאשר **בחוג א** בכל שנה.

(ב) ניתן לפתור על ידי השלמת מספר הנרשמים בכל אחד מהחוגים (אפשר להיעזר בטבלה).

אפשר לחשב את מספר הנרשמים בכל שנה על ידי "כפל חוזר" כפי שלמדנו בסעיף **ב** של היחידה.

שנה	2013	2014	2015
חוג א	1,505	1,617.87	1,739.21
חוג ב	1,217	1,500.56	1,850.19

החל משנת 2015 מספר הנרשמים **לחוג ב** יהיה **גדול** ממספר הנרשמים **לחוג א** .

סעיף ד: הצגת מידע באמצעות תיאור ויזואלי

בסעיף זה הנתונים מוצגים באמצעות גרף.

<u>ידע מקדים</u>

- קריאת גרפים
- חישובים בעזרת הנוסחה $A_t = A_0 \cdot q^t$

<u>דגשים והערות</u>

- ציר אופקי – זמן, ציר אנכי – כמות החומר.
- הבנה של משמעות נקודה: על ציר ה- x , על ציר ה- y , על הגרף.
- יש לשים לב אילו נתונים אפשר לקרוא מהגרף ואילו נתונים צריך לחשב.
- שאלות מתפתחות בסעיף יכולות להיות שאלות סיכום
  (עמודים 80 - 81 תרגילים **(5)** – **(7)**).

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 81 תרגיל **(5)** (ד) -</u>

אפשר כמובן להיעזר בתשובות לסעיפים הקודמים שאינם קשים במיוחד.

עבור צריכת חשמל של 840,000 קוט״ש, זוכה המפעל במענק.

בסעיף (ד) מחפשים את t .

$$\mathrm{A}_0 = 1{,}200{,}000$$

$$\mathrm{A}_t = 840{,}000$$

$$q = 0.914$$

$$t = ?$$

נציב בנוסחה $\mathrm{A}_t = \mathrm{A}_0 \cdot q^t$ ונקבל: $840{,}000 = 1{,}200{,}000 \cdot 0.914^t$

$$0.7 = 0.914^t \;\Rightarrow\; t = 4$$

הסעיף לא קשה במיוחד, אלא דורש הבנת הנקרא.

<u>עמוד 83 תרגיל **(7)** -</u>

(ה) כמות הבצק ביום השישי היא 163.84 ק״ג ($204.8 \cdot 0.8 = 163.84$).

מכמות בצק זו ניתן להכין 4,915.2 סופגניות ($163.84 \cdot 30 = 4{,}915.2$).

$4{,}915.2 < 5{,}000$ ולכן הכמות **לא** תספיק.

(ו) הכמות המתוכננת ליום השמיני היא: 104.86 ק״ג (חושב בסעיף (ד)).

כמות הבצק להכנת 6,290 סופגניות שהוזמנו ליום השמיני היא 209.67 ק״ג

($6{,}290 : 30 = 209.67$), לכן התשובה המתאימה היא ② (ב- 100%).

שימו לב: כדי למצוא את t יש **לזכור** ש- A_0 הוא **ביום הראשון**, לכן ביום **השמיני** עברו רק 7 **יחידות זמן**.

טעות נפוצה של תלמידים עשויה להיות: עברו 8 יחידות זמן.

סעיף ה: השוואה ואומדן בייצוגים שונים

בסעיף זה מתוארים שני תהליכים.

בייצוג מילולי (עמוד 89 תרגיל **(3)**, עמוד 94 תרגיל **(10)**, עמוד 95 תרגיל **(12)**),

בייצוג טבלאי (עמוד 88 תרגילים **(1)**, **(2)**)

בייצוג גרפי (עמוד 89 תרגיל **(4)**, עמוד 90 תרגיל **(5)**, עמודים 91 - 92 תרגילים **(6)** – **(8)**).

נדרשת השוואה ואומדן שינוי של כמות:
- בין שני תהליכים מעריכיים
- בין תהליך מעריכי לבין תהליך לינארי
- בין שלושה תהליכים

<u>דגשים והערות</u>

- משמעות נקודת החיתוך בין שני גרפים.
- השוואת כמויות על ידי אומדן אינטואיטיבי של הכמות המתקבלת לפי סוג התהליך (מעריכי או לינארי) במספר שווה של יחידות זמן.
- בתחילת היחידה ובמהלכה עסקנו בהשוואות בין תהליכים. סעיף זה משלב את ההבנה האיכותית מסעיף א עם החישובים שנלמדו במהלך היחידה.
- אומדן מקדם הגדילה בהתאם להשוואה בין גרפים.

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 88 תרגיל **(1)** (ג) –</u>

הבנה של השפעת מקדם הגדילה על כמות החומר הסופית.

<u>עמוד 88 תרגיל **(2)** (ב) –</u>

אם נחשב את ההפרש בין מספר המנויים במשך השנים המופיעות בטבלה 2023-2020, ההפרש יקטן.
בזמן מסוים הכמויות תהיינה שוות ואחריו ההפרש יגדל שוב (ראו דוגמה בעמודים 86 - 87).

<u>עמוד 89 תרגיל **(3)** –</u>

(א) בשני הכלים יש כמות התחלתית **זהה** של גז.
בכלי A משקל הגז **נמוך יותר** כעבור 2 יממות מאשר משקל הגז בכלי B כעבור 3 יממות.
לכן בכלי A מקדם **הדעיכה** של משקל הגז **גדול יותר**.

(ב) השפעת מקדם הדעיכה על כמות החומר.
<u>שימו לב</u>: מקדם הדעיכה של הגז בכלי A **גדול יותר** מאשר מקדם הדעיכה בכלי B ,
ולכן משקלו של הגז בכלי B יהיה **גדול יותר** ממשקל הגז בכלי A כעבור 10 יממות.

<u>עמוד 89 תרגיל **(4)** (ד) –</u>

כאן יש צורך בהבנה איכותית של מקדם הגדילה לפי צורת הגרף.

<u>עמוד 91 תרגיל **(6)** –</u>

(ב) כאן יש צורך להסיק מתוך צורת הגרף כיצד משפיע מקדם הדעיכה על כמות החומר.

(ה) הבחנה בין נתון שאפשר לקרוא מהגרף (ה1, ה2) לבין נתון שצריך לחשב (ה3).

<u>עמוד 92 תרגיל **(7)** –</u>

השוואה בין תהליך מעריכי לבין תהליך לינארי.

מספר המחוסנים ביום ה- 50 **שווה** למספר הנדבקים, ולפי צורת הגרפים (ומגמת התהליכים) ההפרש בין מספר הנדבקים לבין מספר המחוסנים יילך ויגדל מדי יום.

<u>עמוד 92 תרגיל **(8)** –</u>

השוואה בין תהליך לינארי לבין תהליך מעריכי. כאשר הזמן יגדל אחרי הנקודה בה הגרפים נפגשים, הגרף המעריכי יגדל מהר יותר ולכן הטמפרטורה של נוזל B (גרף ②) תהיה **גדולה יותר** בדקה השישית.

<u>עמוד 94 תרגיל **(10)** –</u>

השוואה בין תהליך לינארי לבין תהליך מעריכי.

<u>*שימו לב:*</u> מיום ראשון עד יום חמישי עברו 4 יחידות זמן.

(ד) יש לחשב את מספר הכרטיסים לפי הצעתו של נדב כך: $254+30\cdot 4=374$.

מספר הכרטיסים שנמכרו בפועל היה 429 ולכן ההפרש הוא 55 כרטיסים ($429-374=55$).

<u>עמוד 94 תרגיל **(11)** –</u>

(ב) השוואה בין תהליך לינארי לבין תהליך מעריכי.

(ג) השוואה בין שני תהליכים מעריכיים (בייצוגים שונים).

חומר A מאבד ממשקלו במשך 3 שעות כמות **שווה** לזו שמאבד חומר B במשך שעתיים,

ולכן חומר B **קטן** באחוז **גדול יותר** במשך השנים.

<u>עמוד 95 תרגיל **(12)** –</u>

כאן יש לעשות השוואה בין תהליך לינארי לתהליך מעריכי.

<u>עמוד 95 תרגיל **(13)** –</u>

כאן יש לעשות השוואה בין שלושה תהליכים (שאחד מהם ליניארי).

(ב) משמעות נקודה A :

בכלי K (גרף ②) ובכלי P (גרף ①) יש טמפרטורה **זהה** בזמן המתאים לנקודה A .

(ג) לפי ההדרכה:

	עבור גרף ①	עבור גרף ②
הטמפרטורה בדקה ה- 6 :	$A_t=5\cdot 1.2^6=14.93$	$A_t=5+1.8\cdot 6=15.8$
הטמפרטורה בדקה ה- 7 :	$A_t=5\cdot 1.2^7=17.916$	$A_t=5+1.8\cdot 7=17.6$

לפיכך הנקודה שבה הטמפרטורה **זהה** בשני הכלים היא בין הדקה ה- 6 לבין הדקה ה- 7 .

<u>עמוד 96 תרגיל **(14)** –</u>

כאן יש השוואה בין שלושה תהליכים מעריכיים והתאמה של מקדם הגדילה לצורת הגרף בצורה איכותית.

יחידה 2: סטטיסטיקה

רציונל

ביחידה זו נחזור על הנלמד בכיתה יוד: קריאת נתונים מייצוגים שונים כגון: רשימה, טבלת שכיחויות, דיאגרמת עמודות, דיאגרמת עיגול וחישוב מדדי מרכז (שכיח, ממוצע וחציון).
נכיר את הצורך בשימוש במדד פיזור המצביע על מידת הטרוגניות או הומוגניות של התפלגות נתונים.
נכיר את המשמעות של סטיית תקן כמדד פיזור, נלמד לחשב את סטיית התקן ונלמד להשוות ולהבין את המשמעות של ההבדל בין שני ערכים של סטיות תקן.
לבסוף נבחן השפעה של שינוי או תוספת של נתונים על סטיית התקן.

ידע מקדים

- אחוזים
- קריאת נתונים מייצוגים שונים: רשימה, טבלת שכיחויות, דיאגרמת עמודות, דיאגרמת עיגול
- חישוב מדדי מרכז: שכיח, ממוצע, חציון
- השפעת שינוי של נתון או הורדה של נתון על מדדי המרכז

מושגים ביחידה

- טבלת שכיחויות
- שכיחות, שכיחות יחסית
- מדדי מרכז: ממוצע, שכיח, חציון
- סטיית תקן
- לכל היותר / לכל הפחות / לפחות / לא פחות

דגשים מתמטיים ופדגוגיים

סעיף א: ריענון: כלים סטטיסטיים לעיבוד מידע

סעיף זה הוא חזרה על הנלמד בכיתה יוד.
עמודי התאוריה (עמודים 99-107) כוללים את התוכן ודוגמאות.
הריענון כולל את הנושאים הבאים:
שכיח, שכיחות, שכיחות יחסית
ממוצע
חציון
לכל אחד מהמדדים האלה יש הסבר על אופן החישוב, תכונות ודוגמאות.
שאלות **(1)** – **(17)** בעמודים 108 - 116 מחולקות לפי סוג הייצוג שלהן:
טבלה / רשימה, דיאגרמת עמודות, דיאגרמת עיגול.
שאלות **(18)** – **(27)** הן שאלות מסכמות לתרגול נוסף המשלבות ייצוגים שונים.

<u>דגשים והערות</u>

- בשאלות המסכמות שבהן יש שילוב של מספר ייצוגים אנו ממליצים לדון באיזה ייצוג נוח יותר וכדאי יותר להשתמש בכל סעיף.
- תכונות הממוצע (עמוד 102) - **אין** ללמד את המושג "**טווח נתונים**" לפי תכנית הלימודים של משרד החינוך.

  לכן כתבנו שהממוצע גדול מהנתון הקטן ביותר, וקטן מהנתון הגדול ביותר.
- בשאלות יש התייחסות לכל מדדי המרכז בהפרדה של הייצוגים השונים: טבלה/רשימה, דיאגרמת עמודות, דיאגרמת עיגול.
- שילוב של שאלות הפוכות, שבהן על התלמיד ים למצוא נתון כדי שיתקיים תנאי (ראו למשל, עמוד 109 תרגיל **(6)** (א), עמוד 110 תרגיל **(7)** (ה), עמוד 119 תרגיל **(21)** (ד)).
- עמוד 111 תרגיל **(9)** (ד): **יש להדגיש** כי ממוצע מחושב רק כאשר הנתונים הם כמותיים.
- עמוד 112 תרגיל **(11)** (ג): הבחנה בין **המיקום** של המספר האמצעי לבין ערכו של החציון.
- השפעת שינוי של נתונים על מדדי המרכז – חישובי ואיכותי (עמוד 111 תרגיל **(10)**, עמוד 112 תרגיל **(11)** (ה)).
- שאלות השוואה בדיאגרמת עמודות (עמוד 114 תרגיל **(14)**).
- בשאלות המסכמות אין הפרדה בין הייצוגים השונים.

  מרביתן הן שאלות מתפתחות ורמתן מעט גבוהה יותר.

<u>ידע מקדים</u>

- קריאה של נתונים מרשימה וטבלה, דיאגרמת עמודות, דיאגרמת עיגול
- שכיחות
- שכיחות יחסית – בשבר פשוט ובאחוזים
- חישוב מדדי מרכז – ממוצע, חציון.
- הבנה של המושגים "לכל הפחות", "לכל היותר", "לפחות", "לא יותר"
- השפעה של שינוי או תוספת של נתונים על מדדי המרכז
- חישוב אחוז מכמות, וחישוב כמות כשנתון אחוז וכמות חלקית

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 109 תרגיל **(5)** (ד) –</u>

ההסבר הנדרש הוא חישוב המדדים: ממוצע וחציון.

<u>עמוד 109 תרגיל **(6)** (ו) –</u>

מספר התלמידים שקיבלו ציון של **לפחות** 8 הוא 16 תלמידים.

הציון הממוצע שלהם הוא 8.75 .

ממוצע הציונים של **כל** התלמידים הוא 7.76 (ראו סעיף (ג)).

$$8.75 > 7.76$$

ולכן הציון הממוצע של התלמידים שקיבלו **לפחות** 8 **גדול יותר** מהציון הממוצע של **כל** התלמידים.

הדר אכן **צודקת**.

<u>עמוד 110 תרגיל **(7)** (ד) –</u>

נועם עבד פי 2 ימים יותר מאשר שרון (ראו רמז).

השכיחות היחסית של מספר הימים שבהם עבדו שרון ונועם 6 שעות **שווה**.

לכן מספר הימים שבהם עבד נועם 6 שעות גם הוא **גדול פי** 2 ממספר הימים שבהם עבדה שרון 6 שעות.

לפיכך נועם עבד 6 שעות במשך 8 ימים ($4\cdot 2=8$).

<u>עמוד 111 תרגיל **(9)** (ד) –</u>

<u>שימו לב</u>: הנתונים הם נתונים שמיים ולכן **אין** משמעות לחישוב הממוצע.

<u>עמוד 111 תרגיל **(10)** (ד) –</u>

מוטי קרא ספר אחד **פחות** מהתכנון ודנה קראה ספר אחד **יותר** מהתכנון.

בסך הכול מספר הספרים שנקראו **לא** השתנה, לכן הממוצע **לא השתנה**.

<u>עמוד 112 תרגיל **(11)** (ה) –</u>

אם ממוצע השעות הוא 3 אז סך שעות המשחק של כל שמונת הילדים הוא 24 .

מספר שעות המשחק של מיכל יהיה: $24-2-4-3-2.5-2-2-1=6.5$

זאת אומרת שמיכל שיחקה במחשב מהשעה 14:00 ועד השעה 20:30

וזה **לא** ייתכן (ראו שורה לפני סעיף (א) שבה נכתב: בין השעות 14:00-20:00).

<u>עמוד 112 תרגיל **(12)** –</u>

(ה) 1. אחרי ההצטרפות: מספר המשפחות שלהן יש ילד אחד הוא 4 .

מספר המשפחות שלהן יש 4 ילדים הוא 4 .

לכן השכיח נותר 3 ילדים במשפחה (6 משפחות).

2. ממוצע מספר הילדים למשפחה הוא 2.28 (חושב בסעיף ג).

לבניין הצטרפו 2 משפחות. באחת יש ילד אחד ובשנייה יש 4 ילדים.

ממוצע מספר הילדים למשפחה לאחר הצטרפותן יחושב כך:

$$\overline{x}=\frac{1\cdot 4+2\cdot 4+3\cdot 6+4\cdot 4}{20}=2.3$$

$2.3>2.228$, כלומר **הממוצע** של מספר הילדים במשפחה **יגדל**.

הערה: אפשר לבקש מתלמידים שמתקשים לסרטט את דיאגרמת העמודות לאחר הצטרפות שתי המשפחות (משפחה אחת שהצטרפה לעמודה של "ילד 1" ומשפחה אחת שהצטרפה לעמודה של "4 ילדים").

בהתחלה היו 18 משפחות (ראו סעיף (א)).

הצטרפו 2 משפחות, כלומר כעת יש 20 משפחות ($18+2=20$).

<u>עמוד 113 תרגיל **(13)** –</u>

בעקבות ההצטרפות של התלמידים ממוצע הגבהים **קטן** ולכן גובהם **קטן מ-** 162 ס״מ (חושב בסעיף (ג)).

(ד) השכיח הוא 160 ס״מ (ראו סעיף ב).

זוהי שאלה פתוחה.

לפניכם אפשרויות לפתרון:

דוגמה	התפלגות גובהם של ששת הילדים שהצטרפו לכיתה	השינוי בשכיח
1	גובהם של כל ששת הילדים הוא 160 ס״מ.	השכיח לא השתנה.
2	גובהם של 3 מהילדים הוא 155 ס״מ. וגובהם של 3 ילדים נוספים הוא 150 ס״מ.	השכיח לא השתנה.
3	גובהם של כל ששת הילדים הוא 155 ס״מ.	השכיח ישתנה והוא 155 ס״מ.

<u>עמוד 115 תרגיל **(15)** –</u>

(ב) כדאי להסביר שמציאת **שכיח** מתוך דיאגרמת העיגול נעשית בהתאם למספר האחוזים **הגדול ביותר**.

(ג)+(ד)

הבחנה בין שכיח לבין רוב.

לאחר השינוי בבחירה, השכיח ישתנה כי מתקבל ש- 40% מהתלמידים בחרו סרט.

לא ניתן לומר שרוב התלמידים בחרו סרט כי רוב פירושו יותר מ- 50% ו- $40\% < 50\%$.

<u>עמוד 118 תרגיל **(20)** (ז) –</u>

ניתן למצוא את ממוצע צריכת המים המשותפת על ידי ״הזזה״ של יחידה אחת בדיאגרמת העמודות מחודש 1 לחודש 3 ולראות שהממוצע הוא 2 .

אפשרות שנייה היא לחשב.

<u>עמוד 119 תרגיל **(22)** –</u>

המרת יחידות זמן – ***<u>שימו לב:</u>*** 75 דקות $= 1\frac{1}{4}$ שעות

<u>עמוד 120 תרגיל **(23)** –</u>

זהו תרגיל מורכב. אנו ממליצים לפתור **רק** במידה ויש זמן, אפשר לתרגל יחד בכיתה.

<u>עמוד 123 תרגיל **(27)** –</u>

שאלה מתפתחת אחרונה בסעיף זה.

בחלקה הראשון (סעיפים (א) – (ג)) השאלה משווה בין שני תחומים: מתמטיקה ואנגלית

ובחלקה השני (סעיפים (ד) – (ו)) נוסף נתון והשוואה: התפלגות הציונים בכל אחד מהמקצועות.

אפשר לחלק את השאלה: לתת לתלמידים לפתור לבד את החלק הראשון ולתווך את החלק השני.

סעיף ב: פיזור נתונים סביב הממוצע

בסעיף זה נכיר מדד חדש המודד את מידת הפיזור של נתונים מספריים סביב הממוצע שלהם.

הסעיף עוסק בשאלות **חשיבה אינטואיטיבית** להבנה של משמעות סטיית התקן.

אין צורך לחשב את סטיית התקן.

בפיתוח החשיבה האינטואיטיבית ניתן להיעזר בהמחשה ויזואלית על ציר המספרים (כאשר השכיחות של כל הנתונים היא 1) או על מערכת הצירים.

בסעיף זה נחזור ונחשב מדדי מרכז שחישבנו בסעיף **א**.

<u>דגשים והערות</u>

- בכל השאלות התלמידים אמורים להבין את משמעות סטיית התקן מתוך השוואה בין שתי קבוצות נתונים שיש להן **אותו** ממוצע והבנה לאיזו מהקבוצות יש פיזור גדול / קטן יותר סביב הממוצע שלה. נדבר גם על קבוצה הומוגנית יותר / פחות מקבוצה אחרת.
- אנו ממליצים להשתמש לסירוגין במושגים "סטיית תקן" או "פיזור הנתונים סביב הממוצע" כדי שהתלמידים יבינו שהמונחים שקולים.
- הבנה של פיזור הנתונים סביב הממוצע כאשר נתונים ההפרשים מהממוצע (עמוד 141 תרגיל 13) או כאשר נתונה השכיחות היחסית של הנתונים (עמוד 133 דוגמה **(5)**).
  בעמוד 142 התלמידים נדרשים **להעריך** באיזו קבוצה סטיית התקן גדולה יותר.
  ההערכה צריכה להיות איכותית, **ללא** ביצוע חישובים, אלא על ידי התבוננות בפיזור הנתונים סביב הממוצע שלהם. בשאלות בהן אין ייצוג גרפי, כדאי להציג גרפית.
- בכל השאלות בסעיף זה ממוצע הציונים **שווה**.

סעיף ג: חישוב סטיית התקן

בסעיף זה נלמד לחשב את סטיית התקן.

בדוגמה **(1)** בעמודים 145-146 יש מקרה שבו קשה לאמוד את מידת הפיזור בין שתי קבוצות והתלמידים יבינו את הצורך במדד שונה ובחישוב כלשהו. בניית הנוסחה היא בשלבים ובליווי הסברים לכל שלב: מדוע מעלים בריבוע, מדוע מוציאים שורש וכדומה.

<u>דגשים והערות</u>

- התלמידים למדו לזהות אינטואיטיבית באיזו משתי קבוצות נתונים סטיית התקן גדולה יותר ולכן אנו ממליצים לפתוח במוטיבציה לחישוב.
- נתחיל עם חישוב סטיית תקן כאשר השכיחות של הנתונים היא 1 (עמודים 151 - 157 תרגילים **(1)** – **(14)**) ואח"כ נעבור לחישוב שלה כאשר שכיחות הנתונים לא בהכרח שווה ל- 1 (עמודים 158 - 166 תרגילים **(15)** – **(31)**).
  בכל אחת מקבוצות התרגילים, השאלות הראשונות הן שאלות בסיס. אפשר לתרגל את שאלות הבסיס בכל אחת משתי קבוצות התרגילים ואחר כך להעלות את רמת הקושי.
- יש לדעת לחשב את סטיית התקן כשנתונה השכיחות היחסית של הנתונים (ראו עמוד 148 דוגמה (3)).

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

- יש לשים לב שסטיית התקן מחושבת באותן יחידות של הנתונים.
- הסעיף כולל שאלות לתרגול נוסף שיש בהן שאלות מתפתחות, השוואה, שילוב בין ייצוגים. אפשר לתרגל בשלב מאוחר יותר של השנה, בחזרות לקראת בחינת הבגרות.
שאלות אלו מתחילות מעמוד 163 .
- כאשר התלמיד נדרש לנמק את בחירתו, הנימוק יכול להתבצע בשלושה אופנים –
  - ✓ על ידי קריאת נתונים מהייצוג הנתון.
  - ✓ על ידי חישוב מתאים.
  - ✓ על ידי השוואה של פיזור הנתונים סביב הממוצע שלהם בצורה איכותית (למשל, עמוד 156 שאלה **(13)** סעיף (ד)).
- בעמודים 149 - 150 יש הסבר על חישוב סטיית תקן בעזרת תוכנת Excel .

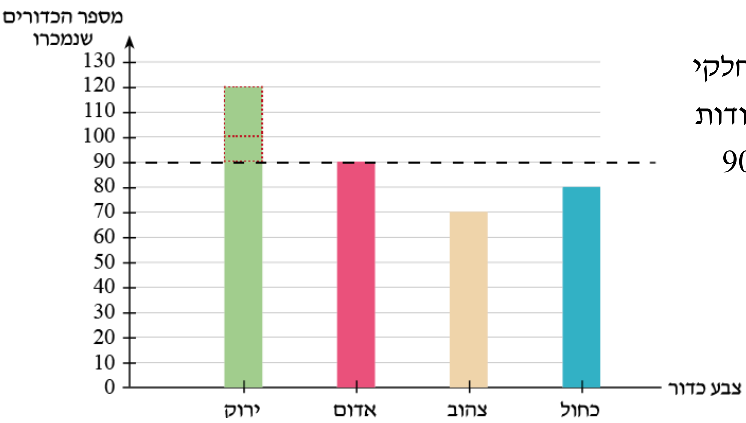
<u>משימת פתיחה (עמוד 144)</u>

מטרת המשימה: להציג דוגמה לשתי קבוצות שיש להן ממוצעים **שונים** והפיזור של הנתונים סביב הממוצע בכל אחת מהקבוצות דומה (ויזואלית).
דגמה זו מעוררת את הצורך **בחישוב** סטיית התקן.

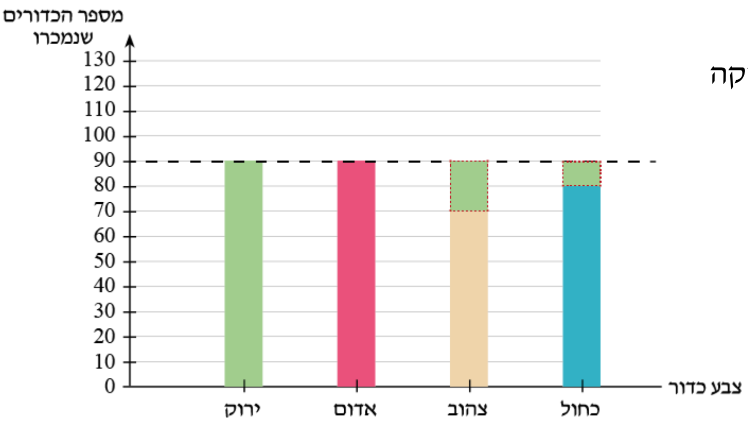
<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 153 תרגיל **(9)** –</u>

(א) 2. אפשר לראות על ידי ״הזזה״ של חלקי העמודה הירוקה והשלמה של עמודות אחרות, שהממוצע הוא המספר 90 (עקרון ה״חלוקה השווה״).



באיור – החלקים מהעמודה הירוקה שמסגרתם מקווקוות הועתקו לשתי עמודות הימניות.



(ו) רצוי לנמק ללא חישוב, כדי לחזק את ההבנה האינטואיטיבית של משמעות סטיית תקן כמדד פיזור נתונים סביב הממוצע.

<u>עמוד 154 תרגיל **(11)** –</u>

בשאלה זו התלמידים יתנסו במקרה שבו מתקבל ממוצע **זהה** אך סטיית תקן **שונה**.

קיימות אפשרויות שונות להתפלגות שעות העבודה, לכן יתקבלו סרטוטים שונים עבור אותם נתונים.

<u>פתרון:</u>

דני יסרטט לפי ההתפלגות:

יום א: 1
יום ג: 2
יום ו: 12
} **15** שעות

יום ד: 9
יום ה: 1
} **10** שעות

יום ב: **2** שעות

רעות תסרטט לפי ההתפלגות:

יום א: 4
יום ג: 4
יום ו: 7
} **15** שעות

יום ד: 5
יום ה: 5
} **10** שעות

יום ב: **2** שעות

(א) אומנם יש אינסוף אפשרויות להתפלגות של 15 שעות העבודה בימים א, ג, ו .
ולהתפלגות של 10 שעות העבודה בימים ד ו- ה, **אבל** בחישוב הממוצע, בסופו של דבר,
כל התלמידים יקבלו:

$$\bar{x} = \frac{15+2+10}{6} = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}$$

כי מספר הימים הוא 6 , והמספר הכולל של שעות העבודה בימים אלו הוא 27 .

(ב) סטיית התקן עשויה **להשתנות** בהתאם לפיזור מספר השעות סביב הממוצע שיבחר כל תלמיד.
למשל בדוגמה הנ"ל:
סטיית התקן שיקבל **דני** עבור ההתפלגות שבחר:

$$S = \sqrt{\frac{(1-4.5)^2+(2-4.5)^2+(12-4.5)^2+(9-4.5)^2+(1-4.5)^2+(2-4.5)^2}{6}} = 4.193$$

ואילו סטיית התקן שתקבל **רעות** עבור ההתפלגות שבחרה:

$$S = \sqrt{\frac{(4-4.5)^2+(4-4.5)^2+(7-4.5)^2+(5-4.5)^2+(5-4.5)^2+(2-4.5)^2}{6}} = 1.258$$

$4.193 > 1.258$,

לפיכך סטיית התקן לפי הבחירה של דני **גדולה יותר** מסטיית התקן לפי הבחירה של רות.

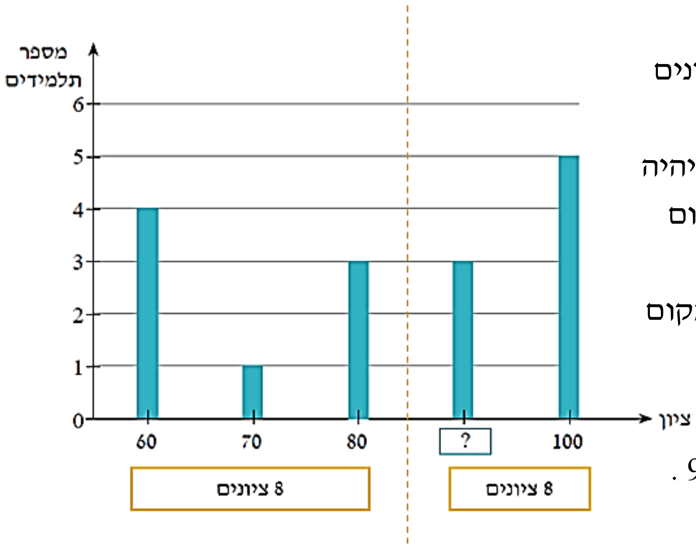
<u>עמוד 155 תרגיל **(12)** –</u>

(א) קריאת נתונים מטבלה.
בשנת 2020 יש ירידה משמעותית במספר היציאות לחו"ל ולכן זו השנה בה פרצה המגפה.

(ד) 1. על התלמידים לתת נימוק **איכותי**.
נראה שבין השנים 2020-2022 **הפיזור גדול יותר.** (למורה: טווח הנתונים גדול יותר).

<u>עמוד 158 תרגיל **(17)** (א) –</u>

לא ניתן לדעת כמה משחקי כדורגל התקיימו בסך הכול כי הדיאגרמה מציגה **רק** את הניצחונות. ייתכן והיו משחקים נוספים שהסתיימו בתיקו.



<u>עמוד 159 תרגיל **(19)** (א) –</u>

אם חציון הציונים הוא 85 אז מחצית מהציונים קטנים ממנו ומחצית מהציונים גדולים ממנו.
בסך הכול יש 16 ציונים ולכן הציון החציוני יהיה הממוצע בין הציון במקום השמיני לציון במקום התשיעי.
הציון במקום השמיני הוא 80 ולכן הציון במקום התשיעי הוא 90 .

$$\frac{80+90}{2}=85$$

לפיכך, המספר שחסר במלבן הוא המספר 90 .

למורה – אם תלמיד משלים במשבצת את המספר 90 בטענה כי הציונים מסודרים בסדר עולה בקפיצות של 10 , הוא מפספס את השימוש בחציון ואין לקבל את הנימוק, כי נדרש במפורש להסביר באמצעות שימוש בחציון.

<u>עמוד 160 תרגיל **(20)** (א) –</u>

<u>***שימו לב:***</u> מספר התלמידים הוא מספר חיובי **שלם** ולכן מספר התלמידים מיוצג בשורה השנייה של הטבלה (בשורה הראשונה כתוב 2.5).

<u>עמוד 161 תרגיל **(23)** –</u>

(ג) <u>***שימו לב:***</u> ממוצע הניקוד הוא 3.2 (חושב בסעיף (ב)).
נטע צודקת כי 57% מהבוחרים שלחו ניקוד שהוא נמוך מהממוצע (3 ומטה).
($25\%+18\%+14\%=57\%$)

(ד) יש לחשב את סטיית התקן של ציוני הסקר משנת 2022.
מהחישוב מתקבל שסטיית התקן הייתה 1.34 נקודות.
בשנת 2023 הייתה סטיית התקן 2 .
סטיית התקן של שנת 2022 **קטנה** מסטיית התקן של שנת 2023 ולכן הדירוג בשנת 2022 היה **הומוגני** יותר. <u>***תזכורת:***</u> הומוגני = פיזור קטן.

<u>עמוד 165 תרגיל **(30)** (ב) 2.</u>

אפשר לראות מגמה של ירידה במספר ספרי העיון שנכתבו בשנת 2020 לעומת מספר ספרי העיון שנכתבו בשנת 2019.
גורמים למגמה יכולים להיות למשל התפתחות הטכנולוגיה וספרי עיון מקוונים ולא מודפסים.
ייתכן שאנשים העדיפו לצרוך תוכן מקוון, ולכן ירד הצורך בכתיבה של ספרים כתובים.

סעיף ד: הערכת השינוי בסטיית התקן בעקבות שינוי בנתון או הוספה של נתון

בסעיף זה נלמד להעריך את השינוי בסטיית התקן (האם היא גדלה או קטנה) בעקבות:

- שינוי בערך נתון (ללא שינוי של הממוצע)
- תוספת של נתון (ללא שינוי של הממוצע)
- שינוי בשכיחות של ערך נתון (ללא שינוי של הממוצע)
- שינוי בערך נתון (המביא לשינוי הממוצע)

<u>דגשים והערות</u>

- אנו ממליצים להציג את השינויים בשכיחות הנתונים על ידי שימוש ביישומון כדי לעזור לתלמידים להגיע להכללה.
- ההבנה של השינוי בערך סטיית התקן כאשר הממוצע לא משתנה היא איכותית.
  יש להבין שמשמעות סטיית התקן היא מדד המאפיין את הפיזור של הנתונים סביב הממוצע.
- כאשר יש שינוי בממוצע של הנתונים, כדאי כבר מההתחלה לחשב את סטיית התקן.

<u>שימוש ביישומונים</u>

בעמודים 173-171 יש משימות חקר שבהן אפשר להיעזר ביישומון בעמוד 170 .
מטרת משימות החקר היא לאפשר לתלמידים לאשש / להפריך את השערותיהם בעניין השינוי של הממוצע ושל סטיית התקן, בעקבות הוספה / הורדה של נתונים, ובהתאם לבצע הכללות.
למשימות אין פתרונות בספר מהסיבות הבאות –

- התלמיד יכול להיעזר ביישומון (עמוד 170) לבדיקת התשובות.
- כל תלמיד יכול להקליד מספרים **שונים** ולקבל ערכים שונים.

מומלץ לדון בכיתה על השונה ועל הדומה, ולבצע הכללות על ידי השוואה של תשובות בין התלמידים.
שלוש המשימות **אינן** תלויות זו בזו.

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 179 תרגיל **(5)** (ב) –</u>

שינוי של נתון כך שהממוצע יגדל הוא שינוי שיגדיל את הפיזור ולכן זה בלתי אפשרי
(ראו שורה ראשונה בטבלה בסעיף (א)).

<u>עמוד 181 תרגיל **(10)** –</u>

(ב) עמית הוסיף שני תפוחים.
משקלו של אחד **גדול ב-** 5 גרם מהממוצע ומשקלו של השני **קטן ב-** 5 גרם מהממוצע.
סך הסטיות מהממוצע הוא 0 ולכן הממוצע לא ישתנה.

(ג) משקל התפוחים שהוסיף עמית קרוב למשקל הממוצע ולכן פיזור הנתונים סביב הממוצע **קטן**.

<u>עמוד 181 תרגיל **(11)** (ב) –</u>

למשחקייה נוספו שני ילדים.
גילו של האחד **גדול ב-** 2 מהגיל הממוצע וגיל הילד השני **קטן ב-** 2 מהגיל הממוצע.
סך הסטיות מהממוצע הוא 0 ולכן הממוצע לא ישתנה.

<u>עמוד 185 תרגיל **(19)** (ד) –</u>

תוספת של נתונים **השווים לממוצע** לא תשנה את המונה אבל כן תגדיל את המכנה בנוסחה של סטיית התקן. ערך המונה יישאר 15 . המכנה יהיה 10.

כדי שהמנה תהיה שווה ל- 1 המכנה צריך להיות 15 ולכן יש להוסיף 5 נתונים.

<u>עמוד 185 תרגיל **(20)** (ג) –</u>

אפשר להראות שסכום הסטיות של השינויים הוא 0 , או לחשב את הממוצע החדש ולהראות שאין שינוי.

<u>עמוד 186 תרגיל **(21)** (ב) –</u>

אפשר להראות שסכום השגיאות שנמחקו שווה לסכום השגיאות שנכתבו או לחשב את הממוצע.

<u>עמוד 186 תרגיל **(22)** (א) –</u>

הנימוקים מתבססים על ההבנה שממוצע הוא חלוקה של הנתונים שווה בשווה במספרים.

אם כל נתון גדל ב- 5 אז הממוצע יגדל ב- 5 (מקרה א) ואם אחד הנתונים גדל ב- 20 אז ההפרש מתחלק בין 4 הנתונים ולכן הממוצע גדל ב- 5 (מקרה ב).

<u>עמוד 186 תרגיל **(24)** (ג) –</u>

אם כל הנתונים קטנים ב- 20 יחידות, גם הממוצע שלהם קטן ב- 20 יחידות והפיזור שלהם סביב הממוצע לא משתנה.

<u>עמוד 187 תרגיל **(28)** (ה) 1. –</u>

הנימוק צריך לכלול התייחסות לפיזור הנתונים סביב הממוצע.

יחידה 3:
חישוב מתקדם של הסתברות להתרחשויות לא ודאיות

רציונל

ביחידה זו נפתח בחזרה על הנלמד בכיתה יוד – חישוב הסתברות של מאורע חד-שלבי ושימוש בטבלה דו-ממדית.

נכיר את המושגים: מאורעות תלויים, מאורעות בלתי-תלויים ונדע להבחין ביניהם.

נלמד לסרטט דיאגרמת עץ לחישוב הסתברויות של מאורע דו-שלבי כאשר המאורעות תלויים או בלתי-תלויים, ולחשב הסתברות של מאורע תלת-שלבי כאשר המאורעות תלויים.

בסוף היחידה נחשב הסתברויות של שני מאורעות כדי להשוות ביניהם ולקבל החלטות לגבי אפשרות מועדפת.

ידע מקדים

- חישוב הסתברות לפי לפלאס (שכיחות יחסית).
- חישוב הסתברות של מאורע משלים.
- חישוב הסתברויות של איחוד מאורעות זרים.

מושגים ביחידה

- אחוזים
- מרחב מדגם, מאורע
- מאורע ודאי, מאורע בלתי אפשרי, מאורע משלים
- מאורעות זרים, מאורע האיחוד
- מאורע דו-שלבי / מאורע תלת-שלבי
- מאורעות תלויים / מאורעות בלתי-תלויים
- לככל היותר / לכל הפחות / לא יותר / לפחות

דגשים מתמטיים ופדגוגיים

סעיף א: ריענון: הסתברות

סעיף זה הוא חזרה על החומר שנלמד בכיתה יוד.

עמודי התאוריה (עמודים 191 - 198) כוללים גם דוגמאות.

התרגילים כוללים חישוב הסתברות של מאורע חד-שלבי, חישוב הסתברות של מאורע דו-שלבי עם טבלה דו-ממדית, ושילוב סטטיסטיקה.

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 194 דוגמה **(1)** –</u>

דוגמה בסיסית לחזרה על החומר שנלמד בכיתה יוד. אפשר לתת לתלמידים לפתור לבד לחזרה.

<u>עמוד 199 תרגיל **(3)** (ג) –</u>

המאורע המשלים למאורע בסעיף (ב) הוא: "ייבחר תלמיד שציונו 60 , 70 , או 80 ".

<u>עמוד 203 תרגיל **(11)** (א) –</u>

יש לשים לב שהציר האופקי מתאר את מספר הילדים למשפחה בדירה והציר האנכי מתאר את מספר הדירות.

סעיף ב: זיהוי מאורעות תלויים וזיהוי מאורעות בלתי-תלויים

בסעיף זה נכיר מאורעות תלויים ומאורעות בלתי-תלויים.
התלמיד ילמד לזהות את המאורעות, ואת התלות או אי-התלות ביניהם.
זיהוי תלות או אי-תלות בין מאורעות ברמה אינטואיטיבית, בהתאם למצב האורייני (ללא הגדרה פורמלית מתמטית).

<u>משימת פתיחה (עמוד 206)</u>

מטרת המשימה היא להבחין בין מאורעות תלויים לבין מאורעות בלתי-תלויים.
ניתן להשתמש בעזרים ויזואליים להמחשה. המשימה איכותית **ואין** צורך לפתור אותה במחברות.
כדאי לדון בכיתה על ההשוואה בין התלמידים:
החזרת התפוח לסל (כמו אדיר) או אכילת התפוח שהוצא ראשון (כמו נעמה).

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 208 תרגיל **(1)** (א) –</u>

על התלמיד לכתוב כל אפשרות שיכולה להתקבל בהוצאת כדור.
למשל: "הכדור שייצא באקראי הוא כדור צהוב", "הכדור שייצא באקראי הוא כדור כחול".

<u>עמוד 208 תרגיל **(5)** –</u>

(א) מאורעות אפשריים: "שרית הוציאה באקראי מחברת משובצת מהתיק", "שרית הוציאה באקראי מחברת חלקה מהתיק".

(ב) מספר המחברות בתיק של שרית לאחר הוצאת המחברת הראשונה השתנה, ולכן הוצאת המחברת הראשונה השפיעה על הוצאת המחברת השנייה. לפיכך המאורעות הם מאורעות תלויים.

(ג) אם שרית **תחזיר** את המחברת שהוציאה בהוצאה הראשונה לתיק, אז מספר המחברות בתיק של שרית **לפני** ההוצאה השנייה יהיה **שווה** למספר המחברות בתיק שלה **לפני** ההוצאה הראשונה ולכן המאורעות יהיו מאורעות בלתי-תלויים.

<u>עמוד 209 תרגיל **(6)** (א) –</u>

על התלמיד לכתוב כל אפשרות שיכולה להתקבל בבחירה אקראית.
למשל: "התלמיד שנבחר לומד במגמת מחשבים", "התלמיד שנבחר לומד במגמת ביולוגיה".

עמוד 210 תרגיל **(12)** –

זהו התרגיל האחרון לסעיף זה. הוא מסומן ב- ★ . יכול להיות כאן קושי בהבנת הנקרא.

סעיף ג: כפל וחיבור הסתברויות

מטרת סעיף זה היא להבחין מתי יש **לכפול** הסתברויות לפי **כלל הכפל**,
ומתי יש **לחבר** הסתברויות לפי **כלל החיבור**.
כדאי להדגיש את "**שימו לב**" שנמצא בתחתית עמוד 213 ,
ואת הכתוב במסגרת הנמצאת בתחתית עמוד 221 .

- ✓ **גם / ו** "מתורגם" ***לכלל הכפל***.
- ✓ **או** "מתורגם" ***לכלל החיבור***.

<u>דגשים והערות</u>

- הדוגמה המתארת את **כלל הכפל** במאורעות בלתי-תלויים (**סעיף ג1** בעמודים 212 - 213) ממחישה שלב אחר שלב בעזרת טבלה דו-ממדית את נושא **החיתוך**.
- כדאי, לפחות בהתחלת הלימוד, להקפיד על צורת הכתיבה של ההסתברויות.
(ראו דוגמה **(2)** בעמוד 214, דוגמה **(1)** בעמוד 222).
- **בסעיף ג3** – כשמדובר על מאורעות שהסתברויותיהם ידועות, ניתן לתאר את האפשרויות ברשימה או בטבלה (ראו עמוד 224).
- מומלץ לקרוא בכיתה את הדוגמאות בעמודים 222 – 227 .
- כדאי להדגיש את "**שימו לב**" בעמוד 224 , המסביר על היתרון באירגון המקרים בטבלה.
- לעיתים קצר יותר לחשב באמצעות ההסתברות של המאורע המשלים (ראו דרך שלישית עמוד 225).
- דוגמה **(4)** בעמוד 227 עוסקת במאורע "תתקבל על תנאי".
כדאי לקרוא אותה בכיתה יחד עם התלמידים.

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 229 תרגיל **(4)** (א) –</u>

המאורע "התלמיד הצליח בבחינת הבגרות"
והמאורע "התלמיד הצליח במבחן המתכונת"
הם מאורעות תלויים.

<u>הסבר:</u> אם התלמיד מצליח במבחן המתכונת, ההסתברות שהוא יצליח בבחינת הבגרות **גדולה יותר**.
ולכן אלו מאורעות תלויים.

<u>עמוד 226 תרגיל **(6)** –</u>

חשוב להסביר את ההבדל בין **רק** באחד לבין באחד **לפחות**.
רק באחד – משמעותו בניסוי הראשון **או** בניסוי השני.
באחד **לפחות** – משמעותו בניסוי הראשון **או** בניסוי השני **או** בשניהם.

<u>עמוד 231 תרגיל **(11)** (ב) –</u>

אחרי חישוב ההסתברות לפי תת-סעיף 1. ותת-סעיף 2. , כדאי לדון בכיתה על אפשרות החישוב הקצרה יותר.

<u>עמוד 232 תרגיל **(12)** –</u>

תרגיל זה מסומן ב- ★ כי יכול להתעורר קושי בהבנת הנקרא.

בסוף הסעיף מצורפים הפתרונות.

(א) דיאגרמת העיגול צריכה להשלים ל- 1 . לכן :

$$1-\frac{7}{15}-\frac{1}{3}=$$
$$=1-\frac{7}{15}-\frac{5}{15}=1-\frac{12}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

ההסתברות לזכות ב- 100 ש״ח היא $\frac{1}{5}$.

(ב) אמיר מסובב את הרולטה **פעמיים** כי קנה בסכום של 230 ש״ח ($150+80=230$).

האפשרויות שיזכה ב- 150 ש״ח **לפחות** הן :

אפשרות	**תוצאת סיבוב ראשון**	**הסתברות**	**תוצאת סיבוב שני**	**הסתברות**	**ההסתברות שהאפשרות תתרחש**
.1	100	$\frac{1}{5}$	100	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$
.2	100	$\frac{1}{5}$	50	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$
.3	50	$\frac{1}{3}$	100	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{לזכות}\\ \text{ב- 150 ש"ח}\\ \textbf{לפחות}\end{array}\right)=P(\text{אפשרות 1.})+P(\text{אפשרות 2.})+P(\text{אפשרות 3.})=$$
$$=\frac{1}{25}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{13}{75}$$

(ג) אפרת רכשה בקניון בסכום של 400 ש״ח.

לפי המודעה היא רשאית לסובב את הרולטה 3 פעמים.

50% מסכום הרכישה הוא 200 ש״ח.

האפשרויות לזכות ב- 200 ש״ח **בדיוק** ב- 3 סיבובים הן :

אפשרות	תוצאת סיבוב ראשון	הסתברות	תוצאת סיבוב שני	הסתברות	תוצאת סיבוב שלישי	הסתברות	ההסתברות שהאפשרות תתרחש
.1	100	$\frac{1}{5}$	50	$\frac{1}{3}$	50	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{45}$
.2	50	$\frac{1}{3}$	100	$\frac{1}{5}$	50	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{45}$
.3	50	$\frac{1}{3}$	50	$\frac{1}{3}$	100	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{45}$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{לזכות}\\ \text{ב- 200 ש"ח}\\ \textbf{בדיוק}\end{array}\right)=3\cdot\frac{1}{45}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$$

<u>עמוד 233 תרגיל **(17)** –</u>

נדרשת הבנה בסיסית באחוזים.

70% אפשר לכתוב כ- $\frac{70}{100}$ ובכתיב מצומצם $\frac{7}{10}$, וכשבר עשרוני 0.7 .

אם 0.7 מתלמידי הכיתה הביאו אישור ביום הראשון

אז 0.3 מתלמידי הכיתה **לא** הביאו אישור ביום הראשון.

כדאי לרכז את האפשרויות בטבלה בדומה לטבלה בעמוד 227 בפתרון דוגמה **(4)**.

אפשרות לצאת לטיול	יום ראשון	יום שני	ההסתברות שיצא לטיול
1	**הביאו** אישור 0.7	**לא הביאו** אישור 1	$0.7 \cdot 1 = 0.7$
2	**לא הביאו** אישור 0.3	**הביאו** אישור 0.8	$0.3 \cdot 0.8 = 0.24$

סעיף ד: דיאגרמת עץ

בסעיף זה יוצגו שניים או שלושה מאורעות בלתי-תלויים או שני מאורעות תלויים. התלמיד ילמד "לתרגם" את הנתונים האורייניים לדיאגרמת עץ ולחשב את ההסתברות של המאורע המתקבל מחיתוך המאורעות.

ד1. דיאגרמת עץ במאורעות בלתי-תלויים

בסעיף זה יוצגו שני מאורעות בלתי-תלויים. שלבי בניית העץ מפורטים בעמודים 235-237.

התלמיד ידע לזהות את המאורעות ואת מרחב המדגם בכל שלב.

<u>דגשים והערות</u>

- התרגילים מופיעים בצורה מדורגת. בתרגילים הראשונים דיאגרמת העץ מסורטטת והתלמיד צריך להשלים חלק מהנתונים.
  לתלמידים לוקח זמן לסרטט את דיאגרמות העץ. בשאלות הראשונות שבהן צריך להשלים את הנתונים בדיאגרמות העץ כדאי להשתמש בדפים עם הסרטוטים באתר "משבצת".
- מניסיון – רוב התלמידים מעדיפים להשתמש בדרך כלל בדיאגרמת עץ.

<u>התייחסות לתרגילים</u>

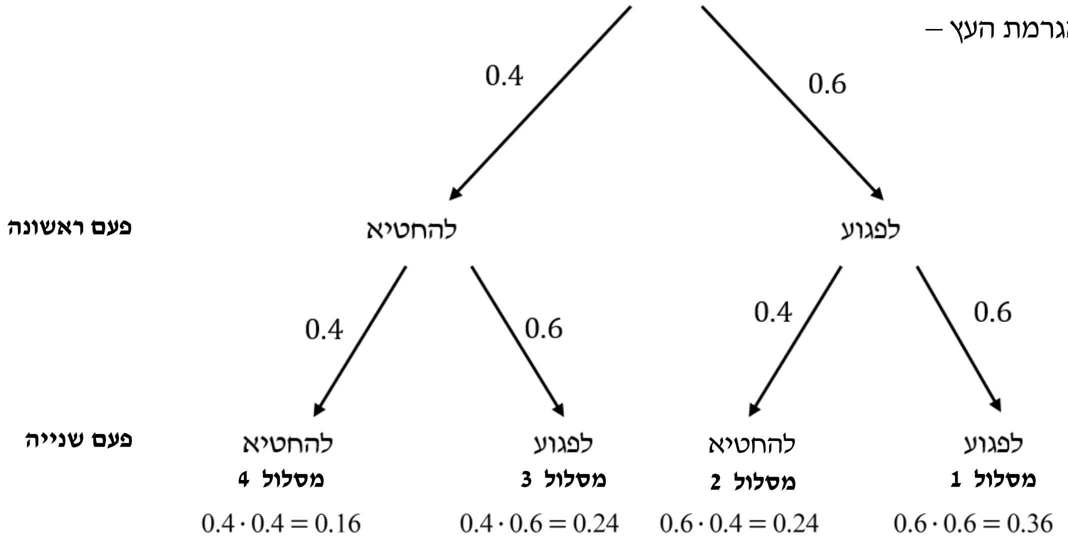
<u>עמוד 242 תרגיל **(1)** (ב) –</u>

מומלץ להרגיל את התלמידים לבדוק את עצמם על ידי חישוב סכום ההסתברויות של המסלולים **בכל** אחד משלבי העץ. צריך להתקבל סכום השווה ל- 1 .

ראו למשל בדוגמה בעמוד 241 בסוף פתרון סעיף (א).

<u>עמוד 243 תרגיל **(3)** –</u>

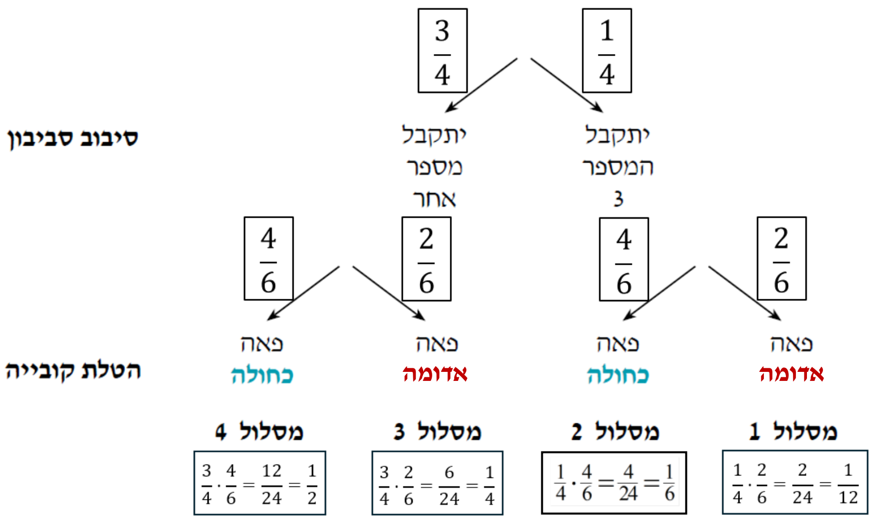
(ב) דיאגרמת העץ –



(ד) ההסתברות שהקלע יחטיא בשתי הפעמים היא 0.16 (**מסלול 4**).

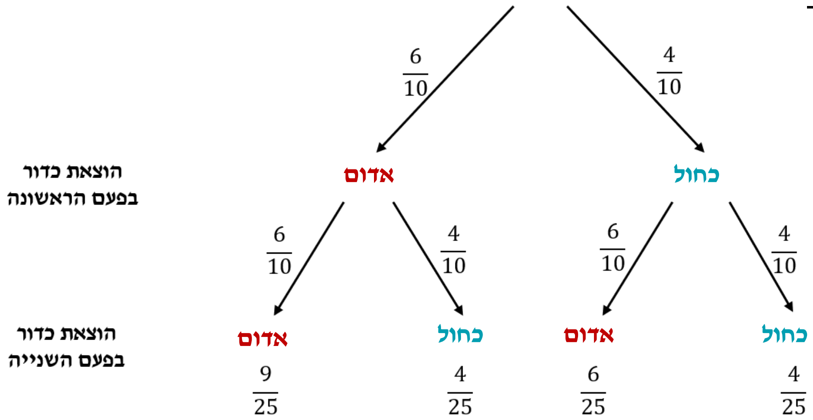
<u>עמוד 243 תרגיל **(4)** (ב) –</u>

השלמה של דיאגרמת העץ



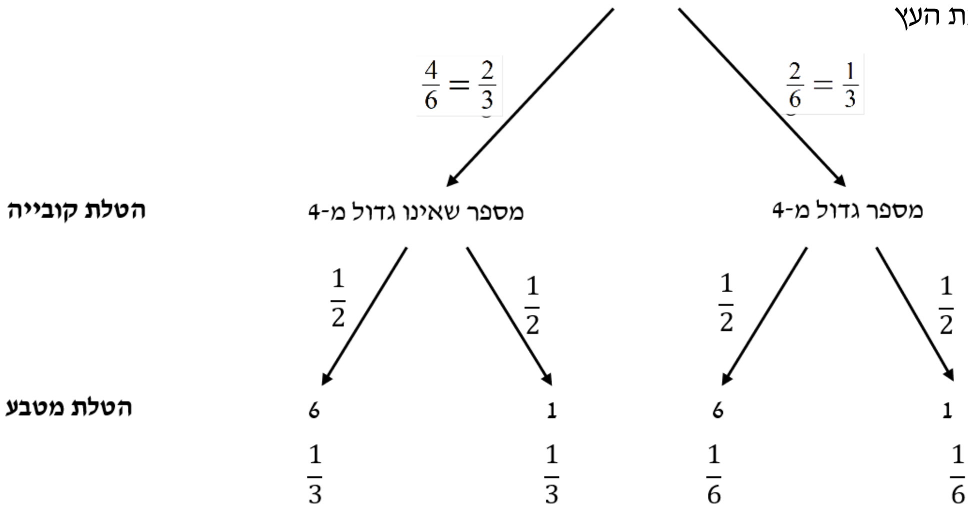
<u>עמוד 243 תרגיל **(5)** (א) –</u>

סרטוט דיאגרמת העץ



<u>עמוד 244 תרגיל **(8)** (ב) –</u>

סרטוט דיאגרמת העץ



<u>עמוד 229 תרגיל **(13)** (ד) 1. –</u>

המאורע המשלים הוא: "שני הספרים שנבחרו הם מסוגים **שונים**".

ד2. דיאגרמת עץ במאורעות תלויים

בסעיף זה יוצגו שני מאורעות תלויים והתלמיד ילמד לחשב את ההסתברות של המאורע המתקבל **מחיתוך** המאורעות. סרטוט דיאגרמת העץ הוא בדיוק כפי שהיה בסעיף הקודם.

התייחסות לתרגילים

עמוד 253 תרגיל **(5)** (ג) –

לפתרון הסעיף **אין** צורך להמשיך את העץ (**אין הוצאה שלישית**).

התלמידים בעצם נשאלים: מה ההסתברות ששתי הגרביים שהוצאו היו **באותו הצבע**.

כי רק אם הן **אינן** באותו הצבע, ריטה צריכה להוציא גרב בפעם השלישית.

ד3. דיאגרמת עץ בשלושה שלבים במאורעות בלתי-תלויים

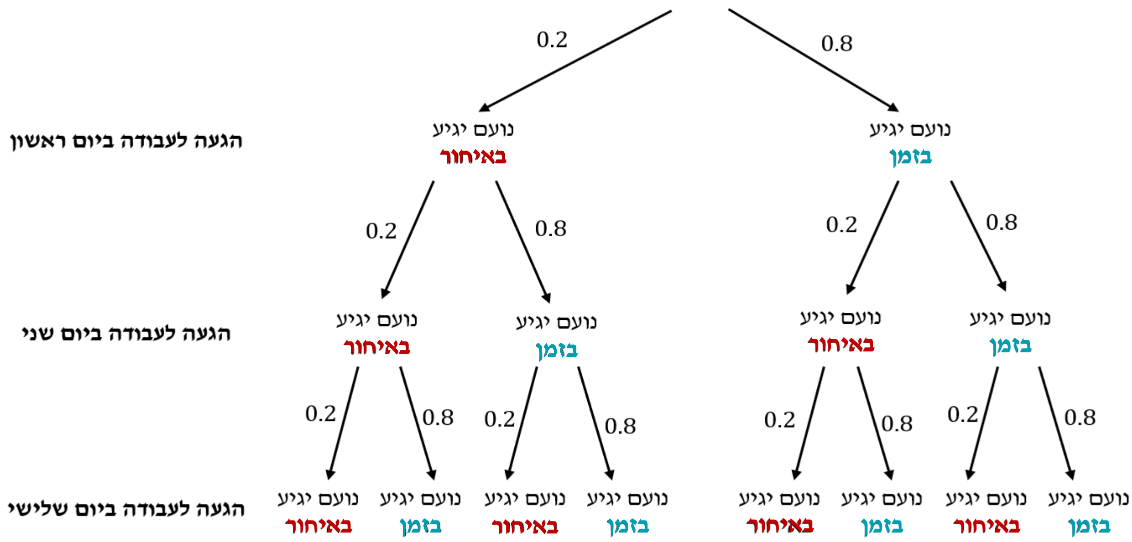
בסעיף זה התלמיד יידע לזהות שלושה מאורעות בלתי-תלויים ולחשב את ההסתברות של המאורע המתקבל מחיתוך המאורעות.

התייחסות לתרגילים

עמוד 257 תרגיל **(1)** (א) –

המאורע המשלים הוא: "כפיר **לא יאחר** לבית-הספר".

עמוד 258 תרגיל **(3)** (א) –



עמוד 258 תרגיל 6 –

דיאגרמת עץ של 3 שלבים כשבכל שלב יש 3 אפשרויות.

התרגיל מתאים לתלמידים **מתקדמים** לכן הוא מסומן ב- ★.

שימו לב: **בדיוק ב-** 1,000 ש"ח: $P(500,500,0)+P(500,0,500)+P(0,500,500)$.

לפחות ב- 1,000 ש"ח: יש להוסיף גם את האפשרויות $P(500,500,200)$, $P(500,200,500)$ ו- $P(200,500,500)$.

סעיף ה: השוואת הסתברויות וקבלת החלטות

בסעיף זה יוצגו מספר אפשרויות למקרים שונים.
התלמיד יחשב את הסתברויותיהן, ויקבל החלטה על האפשרות הסבירה יותר.

<u>התייחסות לתרגילים</u>

<u>עמוד 262 תרגיל **(1)** (ג) –</u>

סכום ההסתברויות **לזכות** בסכום כלשהו **בדוכן השני** (**500** ₪ או **1,000** ₪) שווה ל- 0.5 .
$(0.35+0.15=0.5)$.

לפיכך ההסתברות **לא לזכות בדוכן השני** שווה ל- 0.5 ($1-0.5=0.5$),
לכן היא **שווה** להסתברות **לא לזכות** בהגרלה אחת **בדוכן הראשון** (הנתון בשורה 6)

<u>עמוד 263 תרגיל **(4)** (ב) 1. –</u>

הוצאה של שני מטבעות כסף.

<u>עמוד 265 תרגיל **(7)** (ה) –</u>

<u>*שימו לב:*</u> מעוניינים בסכום **הזוגי הנמוך ביותר**.

התשובה היא כן. כי $\frac{1}{2}<\frac{113}{225}$

חושב בסעיף (ג)   חושב בסעיף (ד)

סעיף ו: שאלות סיכום וחזרה

שאלות סיכום מכל הסוגים שנלמדו ביחידה ברמת קושי עולה.
מתאים לפתור אותן כחזרה לפני מבחן

<u>התייחסות לתרגילי סיכום וחזרה</u>

<u>עמוד 272 תרגיל **(4)** (ב) –</u>

המאורע המשלים הוא: "שני המטבעות שהוציאה אליס מהשק היו מטבעות **כסף**"

<u>עמוד 272 תרגיל **(6)** (ג) 1. –</u>

מאורע אפשרי להוצאת שטר בפעם הראשונה:
"הוצאת שטר של 20 ש"ח".
מאורע אפשרי להוצאת שטר בפעם השנייה:
"הוצאת שטר של 100 ש"ח".

למורה: זוהי שאלה פתוחה. כל תלמיד יכול לכתוב מאורע **אחר** אפשרי.
יש לשים לב שהמאורעות הם מאורעות תלויים כי כתוב **ללא** החזרה.
וכאשר לא מחזירים, מספר השטרות בארנק משתנה, ובהתאם גם משתנות ההסתברויות.