

נגזרת של מכפלת פונקציות

(תוספת לעמוד 107 בספר)

ז/א מה סת/רה:

חקרו את הפונקציה $f(x) = (x-4)^2(x+2)$, לפי הסעיפים הבאים:

- (א) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- (ב) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.
- (ג) רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (ד) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- (ה) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה על הגרף שבה $x = 3$.

סת/ו!:

(א) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 16 \cdot 2 = 32 \Rightarrow (0, 32)$

$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = (x-4)^2(x+2) \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -2 \Rightarrow (4, 0), (-2, 0)$

(ב) + (ג)

נגזור את $f(x)$ כמכפלת הפונקציות $(x-4)^2$ ו- $(x+2)$:

$$f'(x) = 2(x-4) \cdot 1 \cdot (x+2) + (x-4)^2 \cdot 1$$

$$f'(x) = 2(x^2 + 2x - 4x - 8) + x^2 - 8x + 16 =$$

$$f'(x) = 2x^2 + 4x - 8x - 16 + x^2 - 8x + 16 = 3x^2 - 12x$$

הערה: אפשר לגזור את הפונקציה $f(x)$ בדרך אחרת: לרשום את $f(x)$ לא כמכפלה (כלומר לפתוח סוגריים), ורק אז לגזור.

נשווה את הנגזרת שקיבלנו לאפס:

$$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$f(0) = 32, f(4) = 0$$

כלומר הנקודות $(0, 32)$, $(4, 0)$ הן נקודות חשודות לקיצון.

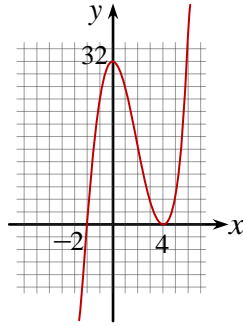
נערוך טבלת חקירה:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
נקודת בוחן	$f'(-1) = 15$	-	$f'(1) = -9$	-	$f'(5) = 15$
$f'(x)$	חיובית	0	שלילית	0	חיובית
מסקנות לגבי $f(x)$	↗	max	↘	min	↗
	עלייה	$f(0) = 32$	ירידה	$f(4) = 0$	עלייה

כלומר $\min(4, 0)$, $\max(0, 32)$.

תחומי עלייה: $x > 4$, $x < 0$, תחום ירידה: $0 < x < 4$.

המשך בעמוד הבא <<<



(ד) ניעזר בסעיפים הקודמים ונקבל את גרף הפונקציה המתואר בסרטוט הבא:

(ה) נמצא את שיפוע המשיק בנקודה שבה $x = 3$, על ידי הצבה בנגזרת:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

$$f'(x) = 3 \cdot 9 - 36 = -9$$

נמצא את שיעור ה- y של נקודת ההשקה:

$$f(x) = (x - 4)^2(x + 2)$$

משוואת המשיק ששיפועו -9 והעובר דרך הנקודה ששיעוריה $(3, 5)$:

$$f(3) = (3 - 4)^2(3 + 2) = (-1)^2 \cdot 5 = 5$$

$$y - 5 = -9(x - 3) \Rightarrow y = -9x + 32$$

תרגילים לעבודה עצמית

חקרו את כל אחת מהפונקציות (1) – (3) לפי הסעיפים הבאים:

(א) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ב) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

(ג) רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(ד) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

(ה) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה על הגרף שבה $x = 3$.

$$f(x) = x^3(x - 3)^2 \quad (2) \quad f(x) = (x - 2)(x^2 - 9) \quad (1)$$

$$f(x) = (x - 5)^2(x + 2) \quad (3)$$

(4) חקרו את כל אחת מהפונקציה $f(x) = 4x \cdot (x + 1)^3$ לפי הסעיפים הבאים:

(א) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ב) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

(ג) רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(ד) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

(ה) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה על הגרף שבה $x = -2$.

(5) חקרו את כל אחת מהפונקציה $f(x) = (x - 3)^2(x + 3)$ לפי הסעיפים הבאים:

(א) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

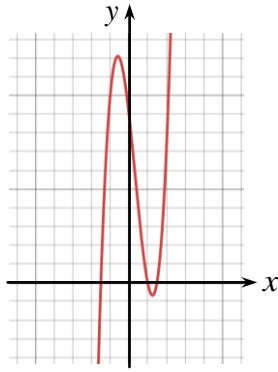
(ב) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

(ג) רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(ד) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

(ה) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה על הגרף שבה $x = 2$.

תשובות סופיות:



(א) (1) $(0,18)$, $(3,0)$, $(2,0)$, $(-3,0)$

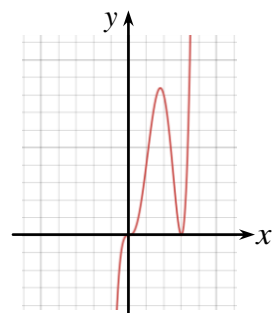
(ב) $\min(2.52, -1.38)$, $\max(-1.19, 24.19)$

(ג) תחומי עלייה: $x < -1.19$, $x > 2.52$

תחום ירידה: $-1.19 < x < 2.52$

(ד) ראו סרטוט משמאל.

(ה) $y = 6x - 18$



(א) (2) $(0,0)$, $(3,0)$

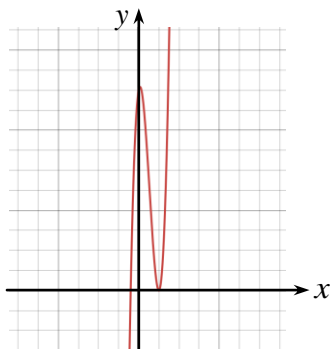
(ב) $\min(3,0)$, $\max(1.8, 8.4)$

(ג) תחומי עלייה: $x < 1.8$, $x > 3$

תחום ירידה: $1.8 < x < 3$

(ד) ראו סרטוט משמאל.

(ה) $y = 0$



(א) (3) $(0,50)$, $(-2,0)$, $(5,0)$

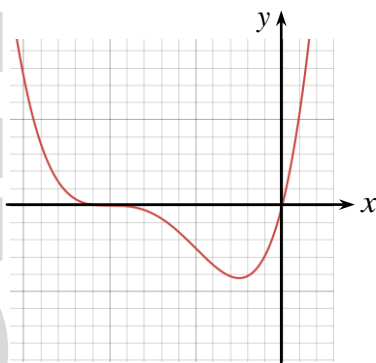
(ב) $\max(\frac{1}{3}, 50.815)$, $\min(5,0)$

(ג) תחומי עלייה: $x < \frac{1}{3}$, $x > 5$

תחום ירידה: $\frac{1}{3} < x < 5$

(ד) ראו סרטוט משמאל.

(ה) $y = -16x + 68$



(א) (4) $(0,0)$, $(-1,0)$

(ב) $\min(-0.25, -0.42)$

(ג) תחום עלייה: $x > -0.25$

תחום ירידה: $x < -0.25$

(ד) ראו סרטוט משמאל.

(ה) $y = -28x - 48$



(א) (5) $(0,27)$, $(-3,0)$, $(3,0)$

(ב) $\max(-1, 32)$, $\min(3,0)$

(ג) תחומי עלייה: $x < -1$, $x > 3$

תחום ירידה: $-1 < x < 3$

(ד) ראו סרטוט משמאל.

(ה) $y = -9x + 23$