סִלְסִלַת أُوليمبوس

رياضيّات للصّفّ العاشر

משבצת

رياضيّات

5 وحدات تعليميّة

الصّفّ العاشر

◆ مُقدّمة للتّحليل الرّياضيّ

◆ مُلحقات

طاقم "مشبيتسيت": عادا ليفي ، شاحار زاك ، أريي روكح ، داود راتس ، جابي يكوئيل ، سريت غورين

مُقدّمة

يحتوي الكتاب على الفصول التّالية:

طبعة تمّوز 2023

הוצאת משבצת

مُحتويات الكتاب

مُلحقات

مِفتاح الرُّموز

إنتبهوا: موضوعٌ يستدعي انتباهًا خاصًّا لكونه غير اعتياديّ.

تذكير: موضوعٌ دُرِّس في فصولٍ سابقة أو سنواتٍ سابقة.
هدف التّذكير هو إنعاشٌ للمعلومات السّابقة حسب مبدأ اللّولبيّة، المطلوب في المنهج التّعليميّ الجديد.

ملاحظة: إضافة للاستنتاج أو توجيه لذكر الموضوع لاحقًا، أو توضيح.

في مثل هذا الإطار الرّماديّ، نكتب حسب الحاجة إجمالًا **لقوانين وقواعد هامّة تظهر خلال المادّة النظريّة مثل:** قائمة قواعد، قوانين، نظريّات، مراحل حلّ وإلخ...

مهمّة:
تظهر المهمّة خلال عرض المادّة النّظريّة كمقدّمة لموضوع الفصل. تتضمّن المهمّة، عادةً ، بحثًا واستنتاجات.

توضيح مُحوسب:
مهمّة عبر الانترنت لتوضيح الموضوع المُدرّس.

لحظة مُحفّزة...
قطعة علميّة للمطالعة تربط الموضوع المُدرّس مع الحياة اليوميّة.

إثراء:
إثراء للطّلاّب الّذين يرغبون في تعميق وتوسيع معرفتهم في الموضوع المُدرّس.

رموز بجانب تمارين وأسئلة العمل الذّاتيّ

(1) خطٌّ رماديّ: يظهر على يمين **كلّ** تمارين وأسئلة العمل الذّاتيّ.
انتبهوا: تظهر الحلول النّهائيّة في نهاية كلّ مجموعة تمارين. أيّ، كي نجد الحلول النّهائيّة للأسئلة التي تظهر في مجموعة التّمارين، يجب أن نصل إلى نهاية الخطّ الرّماديّ هذا.

(2) الأسئلة التي أُشير إليها بمثل هذا الرّمز، لم تُعطَ لها حلولٌ نهائيّة، على الطّلاّب **فحص أجوبتهم مع المعلّم في الصّفّ،** بهدف خلق حوارٍرياضيٍّ مع المعلّم في الصّفّ، أو بهدف مقارنة أجوبتهم مع أجوبة أصدقائهم في حال وجود عدّة حلولٍ ممكنة وإلخ...

(3) أعطيَ للأسئلة التي أُشير إليها بمثل هذه الإشارة **حلٌّ كامل.**

(4) الأسئلة التي أُشير إليها بمثل هذا الرّمز، يوجد فيها توجيه **لفعاليّة محوسبة** تستدعي استعمال برمجيات بيانيّة مثل DESMOS أو GEOGEBRA بهدف تطبيق المادّة المُدرّسة أو بهدف فحص الأجوبة.

مقدّمة للتّحليل الرّياضيّ

موضوع الفصل الأوّل $(1.1\,,\,1.2\,,\,1.3)$ هو مقدّمة لحساب التّفاضل والتّكامل وهدفه التّعرّف على مصطلحاتٍ وتعاريف، التّعرّف على عائلات دوال وتحوّلاتٍ فيها سترافقنا خلال دراستنا لحساب التّفاضل.

الفصل 1:
مقدّمة لحساب التّفاضل - تعريف ومصطلحات أساسيّة

أ. مجموعات أعداد، محور الأعداد، مجالات، قطع وأشعّة، دالّة، الخطّ البيانيّ للدّالّة، تقاطع الخطّ البيانيّ مع المحورَيْن، مجالات فيها الدّالّة موجبة ومجالات فيها الدّالّة سالبة

(1) الإشارة إلى مجموعات أعداد

مجموعة هي تركيبة مؤلّفة من عناصر (دون وجود أهميّة لترتيبها).

اثنتان من المجموعات العدديّة الأساسيّة هما مجموعتا الأعداد الطّبيعيّة والصّحيحة.

- مجموعة الأعداد الطّبيعيّة: $\mathbb{N}=\{1\,,\,2\,,\,3\,,\,...\}$
- مجموعة الأعداد الصّحيحة: $\mathbb{Z}=\{...\,,\,-3\,,\,-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,...\}$

مجموعة الأعداد الطّبيعيّة مُحتواةٌ في مجموعة الأعداد الصحيحة أي أنّها جزءٌ منها.

هناك مجموعة أعدادٍ أخرى هامّة وهي مجموعة الأعداد النّسبيّة .

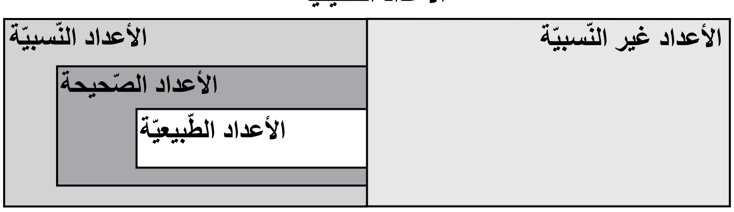
عددٌ نسبيٌّ هو عددٌ يمكننا كتابته بصورة **قسمة** بين عددَيْن صحيحَيْن.
أي، كلّ عددٍ نسبيٍّ r يمكن كتابته بالصّورة: $r=\frac{m}{n}$ ، بحيث m و n هما عددان صحيحان $(n\neq 0)$. نرمز إلى مجموعة الأعداد النّسبيّة بالحرف $\mathbb{Q}$ (q هو الحرف الأوّل في الكلمة quotient في الإنجليزيّة ومعناها **قسمة**).

استنادًا إلى التّعريف الذي ذُكِرَ أعلاه، فمن الواضح أنّ كلّ عددٍ صحيحٍ هو أيضًا عددٌ نسبيٌّ.

هناك أيضًا أعدادٌ غير نسبيّة (لا نستطيع كتابتها بصورة قسمة عددَيْن، مثال $\sqrt{5}$). مجموعة الأعداد النّسبيّة ومجموعة الأعداد غير النّسبيّة تُشكّل معًا مجموعة الأعداد الحقيقيّة ونرمز لها بالحرف $\mathbb{R}$ ، وهو الحرف الأوّل في الكلمة Real number line (محور الأعداد الحقيقيّة).

جميع الأعداد التي نعرفها في هذه المرحلة يمكن وصفها على محور أعدادٍ مُوجّهٍ (أنظروا البند **(2)** في الصّفحة التّالية).

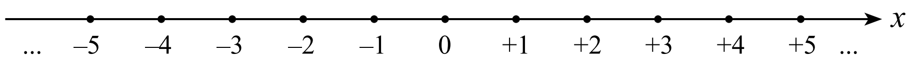
الأعداد الحقيقيّة



גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

(2) محور الأعداد الحقيقيّة، مجالات، قطع وأشعّة على محور الأعداد

نُشير إلى محور الأعداد الحقيقيّة بواسطة مستقيمٍ في طرفه الأيمن سهمٌ باتّجاه اليمين والحرف x .

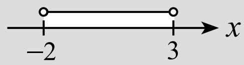
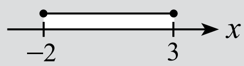
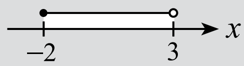
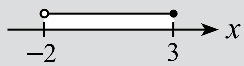


حين ننظر إلى أجزاءٍ مختلفة على هذا المستقيم نتحدّث حينها عن مجالات، قطع وأشعّة على محور الأعداد.
نُشير إلى نقاطٍ على محور الأعداد بواسطة حروفٍ إنجليزيّة صغيرة، مِثل: b , a وإلخ...
كلّ نقطةٍ على محور الأعداد تُمثِّل عددًا وكلّ عددٍ مُمَثَّلٌ بواسطة نقطةٍ على محور الأعداد.

مجال على محور الأعداد هو مجموعة نقاط (تُمثِّل أعدادًا) على هذا المحور.

نُعرّف الآن عددًا من المصطلحات المُرتبطة بالقطع.
قبل هذا، نُنوّه ونؤكّد أنّ كلّ قطعةٍ هي مجالٌ لكن، ليس كلّ مجالٍ هو قطعة.
يمكن للمجال أن يكون مركّبًا، على سبيل المثال، من عدّة قطعٍ.

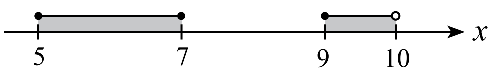
a وَ b يمثّلان عددَيْن حقيقيّيْن على محور الأعداد، بحيث يتحقّق: $b > a$. تُعرّف:

- **قطعة مفتوحة** نرمُزُ لها: $a < x < b$ تحوي كلّ الأعداد الأكبر من a والأصغر من b .
  <u>مثال:</u> $-2 < x < 3$
  
- **قطعة مُغلقة** نرمُزُ لها: $a \le x \le b$. تحوي كلّ الأعداد الأكبر أو تساوي a والأصغر أو تساوي b .
  <u>مثال:</u> $-2 \le x \le 3$
  
- **قطعة نصف مفتوحة** نرمُزُ لها: $a \le x < b$ تحوي كلّ الأعداد الأكبر أو تساوي a والأصغر من b .
  <u>مثال:</u> $-2 \le x < 3$
  
- **قطعة نصف مفتوحة** نرمُزُ لها: $a < x \le b$ تحوي كلّ الأعداد الأكبر من a والأصغر أو تساوي b .
  <u>مثال:</u> $-2 < x \le 3$
  

العددان a وَ b يُسمّيان **طرَفَي القطعة**.

كما قلنا، يمكن أن يكون المجال أحيانًا مُركّبًا من عدّة قطعٍ.
مثلًا، مجال الأعداد الواقع بين 5 وَ 7 (يشمل طرَفَي القطعة) وبين 9 وَ 10 (يشمل الطّرف الأيسر).

يمكن الإشارة إلى هذا المجال بشكلٍ بيانيّ، على النّحو التّالي:



أُشير إلى الطّرف الأيمن $(x = 10)$ الذي لا ينتمي إلى المجال بواسطة دائرة فارغة بيضاء.

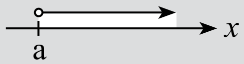
نُعرّف الآن عدّة مصطلحاتٍ مرتبطة بمصطلح الأشعّة.

قبل هذا، نُنوّه إلى أنّ كلّ شعاعٍ هو مجال لكن، ليس كلّ مجالٍ هو شعاع.

يمكن للمجال أن يكون مركّبًا، على سبيل المثال، من قطعٍ وأشعّة.

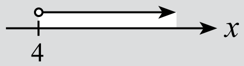
a يمثّل عددًا على محور الأعداد. نُعرّف:

- **شعاع أيمن** نرمزُ له: $x > a$ يحوي كلّ الأعداد الأكبر من a .

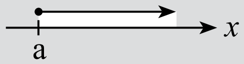


العدد a يُسمّى **الطّرف الأيسر** للشّعاع (أُنظروا الرّسم)، وهو **لا** ينتمي إلى الشّعاع (لاحظوا إشارة الدّائرة البيضاء الفارغة فوقه).

مثال: الشّعاع $x > 4$ نَصفه هكذا:

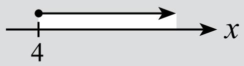


- **شعاع أيمن** نرمزُ له: $x \geq a$ يحوي كلّ الأعداد الأكبر أو تساوي a .

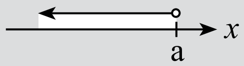


العدد a يُسمّى **الطّرف الأيسر** للشّعاع (أُنظروا الرّسم)، وهو **ينتمي** إلى الشّعاع (لاحظوا إشارة الدّائرة **الملأى** فوقه).

مثال: الشّعاع $x \geq 4$ نَصفه هكذا:

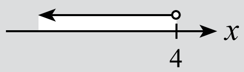


- **شعاع أيسر** نرمزُ له: $x < a$ يحوي كلّ الأعداد الأصغر من a .

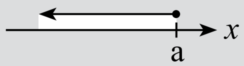


العدد a يُسمّى **الطّرف الأيمن** للشّعاع (أُنظروا الرّسم)، وهو **لا** ينتمي إلى الشّعاع (لاحظوا إشارة الدّائرة البيضاء الفارغة فوقه).

مثال: الشّعاع $x < 4$ نَصفه هكذا:

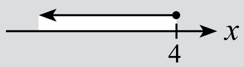


- **شعاع أيسر** نرمزُ له: $x \leq a$ يحوي كلّ الأعداد الأصغر أو تساوي a .



العدد a يُسمّى **الطّرف الأيمن** للشّعاع (أُنظروا الرّسم)، وهو **ينتمي** إلى الشّعاع (لاحظوا إشارة الدّائرة **الملأى** فوقه).

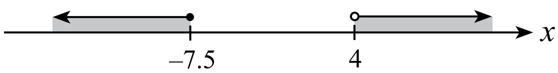
مثال: الشّعاع $x \leq 4$ نَصفه هكذا:



كما ذكرنا، يكون المجال أحيانًا مُركّبًا من قطعٍ وَ/أو أشعّة.

مثلًا، مجال الأعداد الأصغر من (-7.5) (يشمل) والأكبر من 4 (لا يشمل).

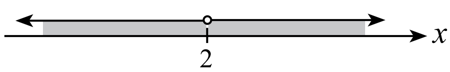
يمكننا وصفه بشكلٍ بيانيّ على النّحو التّالي:



الطّرف الأيسر للشّعاع الأيمن ($x = 4$) الذي لا ينتمي إلى المجال مُشارٌ إليه بدائرة فارغة بيضاء.

أو على سبيل المثال، مجال الأعداد الأصغر من 2 أو الأكبر من 2 .

يمكننا وصفه بشكلٍ بيانيّ على النّحو التّالي:



(3) الدّالّة

معطى المجموعتان: D وَ E .

الدّالّة هي **قاعدة تناظريّة** (أو **قانون نسخ**) تُناظر (أو تنسخ) **لكلّ** حدٍّ x من المجموعة D حدًّا y **واحدًا ووحيدًا** من المجموعة E .

يمكننا وصف الدّالّة بواسطة عدّة تمثيلات: وصفٍ كلاميٍّ، جدولٍ، تعبيرٍ جبريٍّ وخطٍّ بيانيٍّ.

نرمز للدّالّة عادةً بالحرف f (الذي هو الحرف الأوّل في الكلمة function).

الطّريقة الأكثر استعمالًا لوصف الدّالّة هي: $y = f(x)$.

مثلًا، التّعبير الجبريّ $f(x)=x^2$ يصف الدّالّة f التي تُناظر لكلّ عددٍ x ، عددًا مرفوعًا للقوّة 2 (أو مُربّع العدد). بكلماتٍ أخرى، الدّالّة f تلائم لكلّ عددٍ x العددَ x^2 .

ملاحظة: عندما نكتب $f(x)$ فالقصد أنّ متغيّر الدّالّة هو x وعندما نكتب $f(3)$ ، فهذا رمزٌ لقيمة الدّالّة عند العدد 3 . في المثال الأخير، $f(3)=9$ ، لأنّ $3^2=9$.
أي أنّ الدالّة تُناظر للعدد 3 العدد 9 .
على نفس النّحو، $f(a)$ للعدد الذي تُناظرُه الدّالّة للعدد a .

(4) مجال تعريف الدّالّة

عرّفنا الدّالّة على أنها قاعدة تُناظر كلَّ واحدٍ من حدود المجموعة D إلى حدٍّ واحدٍ ينتمي إلى المجموعة E .

نُسمّي المجموعة D **مجال تعريف الدّالّة** (domain).

عندما نصف دالّة بالصّورة: $y = f(x)$ ونمثّلها بواسطة تعبيرٍ جبريٍّ متغيّره x عددٌ حقيقيٌّ، عندها نُعرّف مجال تعريفها على النّحو التّالي:

معطاةٌ الدّالّة $y = f(x)$ الموصوفة بواسطة تعبيرٍ جبريّ.

مجال تعريف الدّالّة $f(x)$ هو مجموعة **كلّ** الأعداد الحقيقيّة، التي يمكن أن يحصُلَ عليها المتغيّر x والتي عند تعويضها في الدّالّة $f(x)$ تكون القيمة التي يحصل عليها المتغيّر y عددًا حقيقيًّا (ويكون للدّالّة $f(x)$ معنًى فيها).

مجال تعريفٍ كهذا يُسمّى أحيانًا **مجال التّعريف الطّبيعيّ** للدّالّة.

نتناول الآن عدّة أمثلة لمجالات تعريف دوال.

أمثلة

(1) الدّالّة $f(x)=x^5-\frac{1}{4}x^3+5x+2$ معرّفة لكلّ x . أي، مجال تعريف الدّالّة هو مجموعة كلّ الأعداد الحقيقيّة. كما ذكرنا، نشير عادةً إلى مجموعة الأعداد الحقيقيّة بالحرف $\mathbb{R}$.

(2) يمكننا أيضًا أن نبحث في مجالات تعريفٍ جزئيّة ليست بالضّرورة هي مجال التّعريف الطّبيعيّ للدّالّة .
هكذا على سبيل المثال، يمكننا التّمعّن في الدّالّة $f(x)=x^2-6$ في المجال $10 \le x \le 12$.
بالرّغم من أنّ التّعبير x^2-6 مُعرّفٌ لكلّ x حقيقيٍّ، فإنّ مجال تعريف الدّالّة $f(x)$ هو $10 \le x \le 12$.

(3) الدّالّة $y=\sqrt{x}$ مُعرّفة لكلّ x غير سالبٍ. أي أنّ مجال تعريف هذه الدّالّة هو $x \ge 0$.

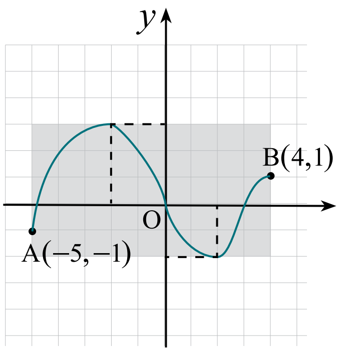
(5) التّمثيل البيانيّ للدّالّة (الخطّ البيانيّ للدّالّة) في هيئة المحاور

معطاةٌ الدّالّة $y = f(x)$ التي مجال تعريفها هو المجموعة D .
مجموعة كلّ النّقاط $(x, f(x))$ في المستوى، في هيئة المحاور، بحيث ينتمي x إلى المجال D ، تُسمّى **الخطّ البيانيّ للدّالّة** $f(x)$.

أمثلة

(1) الخطّ البيانيّ في الجهة اليسرى يصف الدّالّة $y = f(x)$.
مجال تعريف الدّالّة هو القطعة: $-5 \le x \le 4$.
من خلال التّمعّن في الخطّ البيانيّ للدّالّة، نلاحظ أنّ قيم y للدّالّة تقع بين (-2) وَ 3 . نعطي أمثلة لعدّة نقاطٍ تقع على الخطّ البيانيّ للدّالّة:

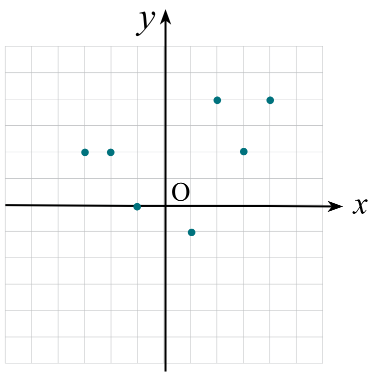
- $f(-5) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad (-5,-1)$ تقع على الخطّ البيانيّ للدّالّة.
- $f(-2) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (-2,3)$ تقع على الخطّ البيانيّ للدّالّة.
- $f(2) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad (2,-2)$ تقع على الخطّ البيانيّ للدّالّة.



(2) الدّالّة $y = f(x)$ معرّفة بواسطة الجدول التّالي:

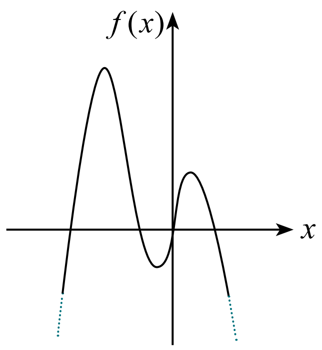
x	-3	-2	-1	1	2	3	4
$y = f(x)$	2	2	0	-1	4	2	4

في هذه الحالة، مجال تعريف الدّالّة هو
مجموعة نهائيّة مؤلّفة من الأعداد: $-3 , -2 , -1 , 1 , 2 , 3 , 4$ ،
وقيم y للدّالّة هي: $-1 , 0 , 2 , 4$.
يظهر الخطّ البيانيّ للدّالّة في الجهة اليسرى.

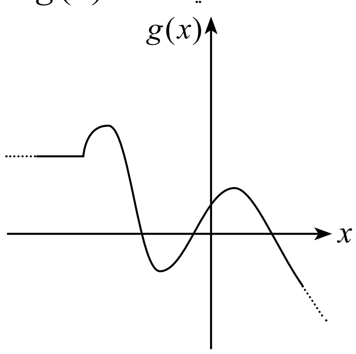


(3) في كلّ واحدٍ من الخطّين البيانيّين التّاليين وصفٌ لدالّةٍ مجال تعريفها هو كلّ x .

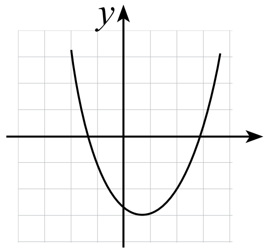
الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$:



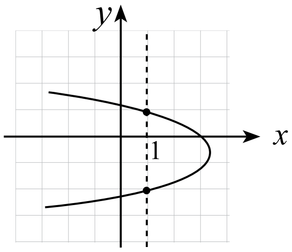
الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$:



كيف نقرّر ما إذا كان الخطّ البيانيّ يصف دالّةً ؟
حسب التّعريف، الدّالّة $y = f(x)$ تُناظر لكلّ قيمةٍ للمتغيّر x قيمةً واحدة ووحيدة فقط هي $f(x)$ ، لذا كي نقرّر ما إذا كان الخطّ البيانيّ يصف دالّة، يجب أن نفحص هل كلّ المستقيمات المُعامدة للمحور x والتي تمرّ عبر نقطةٍ على الخطّ البيانيّ (توجد لهذه المستقيمات قيمة واحدة لـ x)، تقطع الخطّ البيانيّ بالضّبط مرّةً واحدة (وعندها تكون قيمةٌ واحدة مُناظرة لـ x وهي $f(x)$)، وإلّا فإنّ الخطّ البيانيّ لا يصف دالّةً (إذا على الأقلّ مستقيمُ واحدٌ مُعامدٌ للمحور x قطع الخطّ البيانيّ أكثر من مرّةٍ واحدة كما يظهر في الرّسم في الصّفحة التّالية).

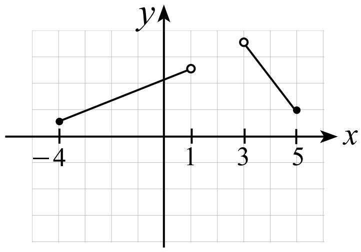


خطٌّ بيانيٌّ يصف دالّةً



خطٌّ بيانيٌّ لا يصف دالّةً

لأنّه على سبيل المثال، عند $x=1$
(الخطّ المتقطّع المُعامد للمحور x)،
يقطع المستقيم الخطّ البيانيّ في أكثر
من نقطةٍ واحدة (يقطعه في نقطتَيْن مُشارٌ إليهما).



خطٌّ بيانيٌّ يصف دالّةً
معرّفة في المجالَيْن
$-4 \le x < 1 \,,\, 3 < x \le 5$

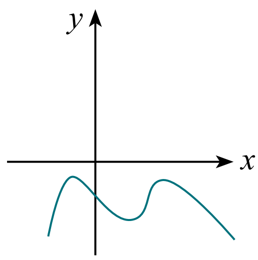
(6) نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحورَيْن

(أ) النّقاط الصّفريّة للدّالّة (نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحور x)

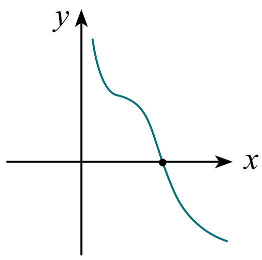
معطاة الدّالّة $f(x)$. x_0 تُسمّى **نقطةً صفريّة** أو **جذرَ** الدّالّة $f(x)$ إذا $f(x_0)=0$.

حلّ المعادلة $f(x_0)=0$ ، يُسمّى أيضًا إيجاد النّقاط الصّفريّة للدّالّة أو إيجاد جذور الدّالّة.
في هذا السّياق، تُسمَّى حلول كلّ معادلة، أحيانًا، جذور المعادلة.
إذا رسمْنا الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ فإنّ النّقطة $(x_0,0)$ ستكون نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحور x .

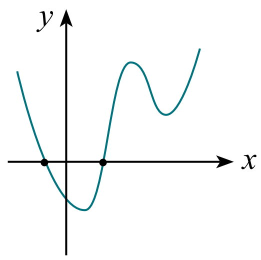
يمكن أن لا يكون للدّالّة نقاطٌ صفريّة (وعندها لا يكون للخطّ البيانيّ للدّالّة نقاط تقاطع مع المحور x).
بالإضافة، يمكن أن يكون للدّالّة عددٌ كبيرٌ من النّقاط الصّفريّة.
نتمعن بالأمثلة التّالية:



لا يوجد
للدّالّة نقاطٌ صفريّة.



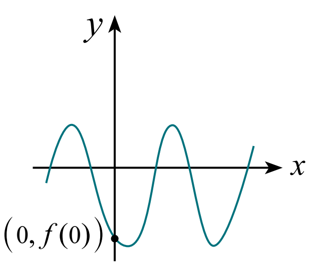
يوجد للدّالّة
نقطةٌ صفريّةٌ **واحدة**.



يوجد للدّالّة
نقطتان صفريّتان.

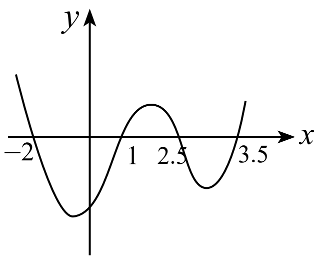
(ب) نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحور y

الإحداثيّ x لكلّ نقطةٍ تقع على المحور y هو صفر.
إذا عوّضنا $x=0$ في معادلة الدّالّة، أي حسبنا قيمة $f(0)$ ،
سنحصل على الإحداثيّ y لنقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة
مع المحور y .
أي أنّ الخطّ البيانيّ للدّالّة يقطع المحور y في النّقطة $\left(0,f(0)\right)$.



(7) المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والتي فيها الدّالّة سالبة

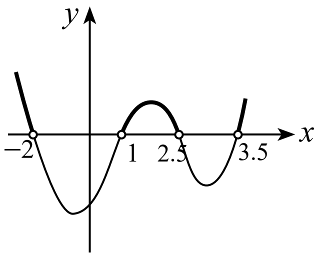
كي نشرح هذَيْن المصطلحَيْن نستعين بالخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ في الجهة اليسرى.



النّقاط $(-2,0)$ ، $(1,0)$ ، $(2.5,0)$ وَ $(3.5,0)$ هي نقاطٌ صفريّة (جذور) للدّالّة. المجالات التي فيها الدّالّة (قيم $f(x)$ ، أو قيم y) **موجبة** هي المجالات التي فيها الخطّ البيانيّ للدّالّة يقع فوق المحور x . (أُنظروا إلى الأجزاء الشديدة السّواد في الرّسم الأيسر).

نقول، إنّ المجالات التي فيها الدّالّة **موجبة** هي:

$x > 3.5$ ، $1 < x < 2.5$ ، $x < -2$.

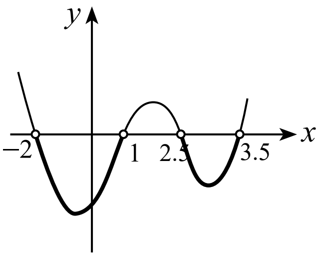


المجالات التي فيها الدّالّة (قيم $f(x)$ ، أو قيم y) **سالبة** هي المجالات التي يقع الخطّ البيانيّ للدّالّة فيها تحت المحور x .

(أُنظروا إلى الأجزاء الشديدة السّواد في الرّسم الأيسر).

نقول، إنّ المجالَيْن اللّذَيْن فيهما الدّالّة **سالبة** هما:

$2.5 < x < 3.5$ ، $-2 < x < 1$.



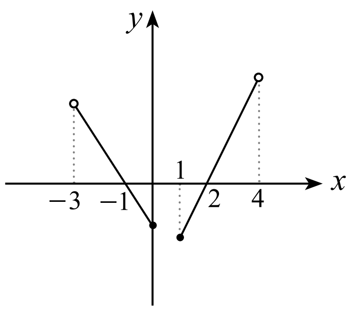
<u>مثالٌ آخر:</u>

بالنّسبة للخطّ البيانيّ للدّالّة في الرّسم الأيسر:

النّقطتان $(-1,0)$ ، $(2,0)$ هما النّقطتان الصّفريّتان للدّالّة.

المجالان اللّذان فيهما الدّالّة موجبة: $2 < x < 4$ ، $-3 < x < -1$ ،

والمجالان اللّذان فيهما الدّالّة سالبة: $1 \le x < 2$ ، $-1 < x \le 0$.



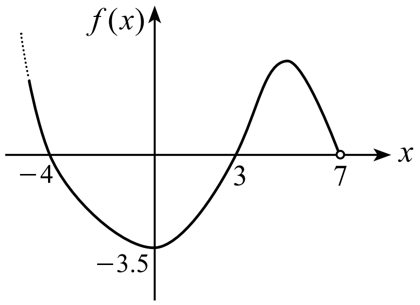
تمارين للعمل الذّاتيّ

(1) استعينوا بالخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ الموصوف في الرّسم الأيسر، وأجيبوا عن البنود التّالية:

(أ) ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟

(ب) ما هي إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحورَيْن ؟

(ج) ما هي المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والمجالات التي فيها الدّالّة سالبة ؟

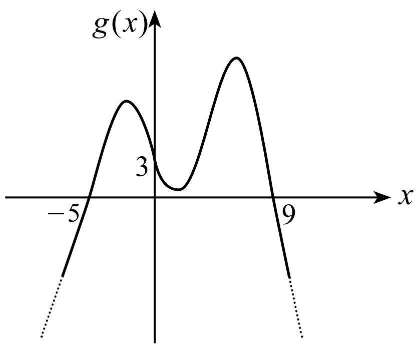


(2) استعينوا بالخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$ الموصوف في الرّسم الأيسر، وأجيبوا عن البنود التّالية:

(أ) ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟

(ب) ما هي إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحورَيْن ؟

(ج) ما هي المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والمجالات التي فيها الدّالّة سالبة ؟

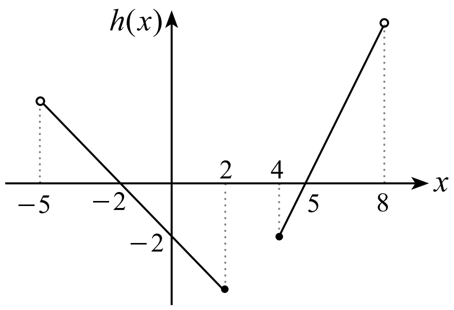


(3) استعينوا بالخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$ الموصوف في الرّسم الأيسر، وأجيبوا عن البنود التّالية:

(أ) ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟

(ب) ما هي إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحورَيْن ؟

(ج) ما هي المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والمجالات التي فيها الدّالّة سالبة ؟



أجوبة نهائيّة

(1) (أ) $x<7$ (ب) $(3,0)$, $(-4,0)$, $(0,-3.5)$

(ج) مجالان فيهما الدّالّة موجبة: $x<-4$, $3<x<7$ ، مجال فيه الدّالّة سالبة: $-4<x<3$

(2) (أ) الدّالّة معرّفة لكلّ x . (ب) $(9,0)$, $(-5,0)$, $(0,3)$

(ج) مجال فيه الدّالّة موجبة: $-5<x<9$ ، مجالان فيهما الدّالّة سالبة: $x<-5$, $x>9$

(3) (أ) $-5<x\le 2$, $4\le x<8$ (ب) $(5,0)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$

(ج) مجالان فيهما الدّالّة موجبة: $5<x<8$, $-5<x<-2$ ، مجالان فيهما الدّالّة سالبة: $-2<x\le 2$, $4\le x<5$

ب. تعاريف ومصطلحات إضافيّة تتعلّق بالدّالّة وصفاتها

(1) دالّة تصاعديّة في مجال (أو: مجال التّصاعد)

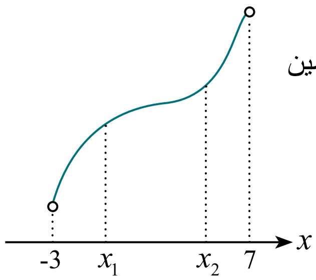
معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في المجال $a < x < b$.

نقول، إنّ **الدّالّة $f(x)$ تصاعديّة** في المجال $a < x < b$ إذا لكلّ x_1 وَ x_2 يُحقّقان: $a < x_1 < x_2 < b$ ، تَتحقّق المتباينة: $f(x_1) < f(x_2)$.

مثال:

بصورةٍ بيانيّة يمكننا أن نرى أنّ في القطعة $-3 < x < 7$ عندما نتحرّك من اليسار إلى اليمين (أي، حين تكبرُ قيم x) تكبرُ قيم الدّالّة أيضًا.

هذا هو المعنى البيانيّ للمجال (أو للقطعة) الذي فيه الدّالّة تصاعديّة.



(2) دالّة تنازليّة في مجال (أو: مجال التّنازل)

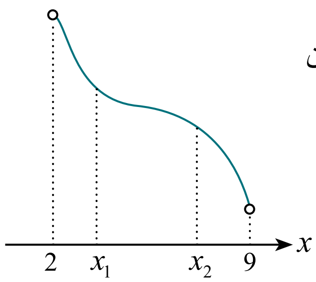
معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في المجال $a < x < b$.

نقول، إنّ **الدّالّة $f(x)$ تنازليّة** في المجال $a < x < b$ إذا لكلّ x_1 وَ x_2 يُحقّقان: $a < x_1 < x_2 < b$ تَتحقّق المتباينة: $f(x_1) > f(x_2)$.

مثال:

بصورةٍ بيانيّة يمكننا أن نرى أنّ في القطعة $2 < x < 9$ عندما نتحرّك من اليسار إلى اليمين (أي، حين تكبر قيم x) تصغر قيم الدّالّة .

هذا هو المعنى البيانيّ للمجال (أو للقطعة) الذي فيه الدّالّة تنازليّة.



(3) دالّة تصاعديّة في نقطة

نتناول الآن، باختصارٍ، العلاقة بين مصطلح التّصاعد في مجالٍ والتّصاعد في نقطة.

لنفترض أنّ الدّالّة $f(x)$ معرّفة في كلّ نقطة في المجال $a < x < b$.

إذا كانت الدّالّة تصاعديّة في المجال $a < x < b$ فإنّ كلّ نقطةٍ تنتمي إلى هذا المجال هي نقطة تصاعد، ونقول، إنّ الدّالّة تصاعديّة في هذه النّقطة.

أي: إذا كانت الدّالّة تصاعديّة في المجال $a < x < b$ فإنّ كلّ نقطة في هذا المجال هي نقطة تصاعد.

(4) دالّة تنازليّة في نقطة

نتناول الآن، باختصارٍ، العلاقة بين مصطلح التّنازل في مجالٍ والتّنازل في نقطة.

لنفترض أنّ الدّالّة $f(x)$ معرّفة في كلّ نقطة في المجال $a < x < b$.

إذا كانت الدّالّة تنازليّة في المجال $a < x < b$ فإنّ كلّ نقطةٍ تنتمي إلى هذا المجال هي نقطة تنازل، ونقول، إنّ الدّالّة تنازليّة في هذه النّقطة.

أي: إذا كانت الدّالّة تنازليّة في المجال $a < x < b$ فإنّ كلّ نقطة في هذا المجال هي نقطة تنازل.

(5) جِوار نقطة

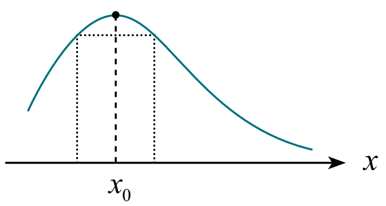
> **جِوار نقطة** هو قطعةٌ مفتوحة (أو نصف مفتوحة) يحوي النّقطة.
> القطعة (a,b) هي جوارٌ مفتوح للنّقطة x_1 إذا $a < x_1 < b$.
> القطعة $[a,b)$ هي جوارٌ نصف مفتوح للنّقطة x_1 إذا $a \le x_1 < b$.
> القطعة $(a,b]$ هي جوارٌ نصف مفتوح للنّقطة x_1 إذا $a < x_1 \le b$.

سنتناول الآن عدّة تعاريف تتعلّق بنقاطٍ تحصل الدّالّة فيها على أكبر قيمةٍ لها أو على أصغر قيمةٍ لها. نسمّي هذه النّقاط: **النّقاط القُصوى للدّالّة** .

(6) نقطة عُظمى محلّيّة داخليّة

> معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في جوار النّقطة x_0 .
> نقول، إنّ **الدّالّة $f(x)$** تحصل على **قيمةٍ عُظمى محليّة** في النّقطة x_0 إذا وُجِدَ جوارٌ للنّقطة x_0 فيه لكلّ x ينتمي لهذا الجوار يتحقّق: $f(x_0) \ge f(x)$.

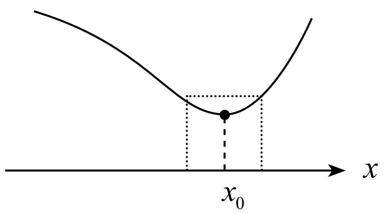
في الرّسم في الجهة اليسرى وصفٌ للخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ التي تحصل على قيمةٍ عُظمى في النّقطة x_0 .
نقول، إنّ النّقطة $(x_0, f(x_0))$ هي نقطة قيمةٍ عُظمى محليّة.
نقول، أحيانًا باختصار، إنّ x_0 هي نقطة عُظمى محليّة للدّالّة $f(x)$.



(7) نقطة قيمةٍ صُغرى محلّيّة داخليّة

> معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في جوار النّقطة x_0 .
> نقول، إنّ **الدّالّة $f(x)$** تحصل على **قيمةٍ صُغرى محليّة** في النّقطة x_0 إذا وُجِدَ جوارٌ للنّقطة x_0 فيه لكلّ x ينتمي لهذا الجوار يتحقّق: $f(x_0) \le f(x)$.

في الرّسم في الجهة اليسرى وصفٌ للخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ التي تحصل على قيمةٍ صُغرى في النّقطة x_0 .
نقول، إنّ النّقطة $(x_0, f(x_0))$ هي نقطة قيمةٍ صُغرى محليّة.
نقول، أحيانًا باختصار، إنّ x_0 هي نقطة صُغرى محليّة للدّالّة $f(x)$.

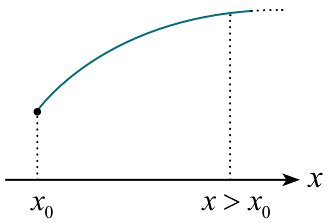


سنتناول الآن عدّة تعريفاتٍ تتعلّق بمصطلح النّقاط القصوى في الطّرف (تقع هذه النّقاط في طرفَي قطعةٍ تنتمي لمجال تعريف الدّالّة).

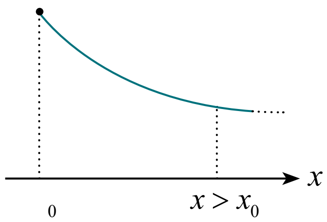
(8) نقطة طرفٍ يُسرى

معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في القطعة: $x_0 \le x < a$ أو في الشّعاع: $x \ge x_0$، (النّقطة) x_0 هي **نقطة طرف يُسرى** في القطعة أو في الشّعاع).

- إذا وُجِدَ جوارٌ **أيمن** للنّقطة x_0 فيه لكلّ x ينتمي لهذا الجوار يتحقّق: $f(x_0) \le f(x)$، فإنّ الدّالّة $f(x)$ تحصل في هذه النّقطة على **قيمةٍ صُغرى محليّة**.
- إذا وُجِدَ جوارٌ **أيمن** للنّقطة x_0 فيه لكلّ x ينتمي لهذا الجوار يتحقّق: $f(x_0) \ge f(x)$، فإنّ الدّالّة $f(x)$ تحصل في هذه النّقطة على **قيمةٍ عُظمى محليّة**.



بالنّسبة لنقطة نهايةٍ صُغرى: بصورةٍ بيانيّة، عندما نبتعد عن نقطة الطّرف اليسرى (أي، نتحرّك على الخطّ البيانيّ باتّجاه اليمين)، نلاحظ أنّ قيم الدّالّة تكبر. وكذلك، بما أنّ قيمة الدّالّة في نقطة الطّرف هي القيمة الأصغر في جوار نقطة الطّرف، فإنّ نقطة الطّرف هي نقطة قيمةٍ صُغرى محليّة.

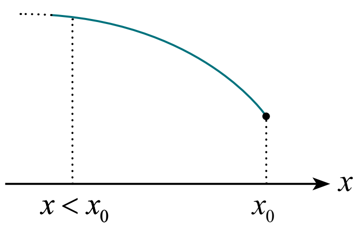


بالنّسبة لنقطة قيمةٍ عُظمى: بصورةٍ بيانيّة، عندما نبتعد عن نقطة الطّرف اليسرى (أي، نتحرّك على الخطّ البيانيّ باتّجاه اليمين)، قيم الدّالّة تصغر. وكذلك، بما أنّ قيمة الدّالّة في نقطة الطّرف هي القيمة الأكبر في جوار نقطة الطّرف، فإنّ نقطة الطّرف هي نقطة قيمةٍ عُظمى محليّة.

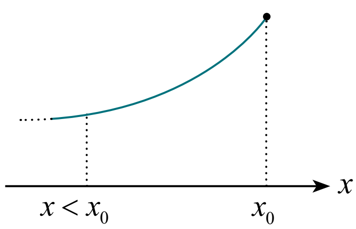
(9) نقطة طرفٍ يُمنى

معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في القطعة: $a < x \le x_0$ أو في الشّعاع: $x \le x_0$,
(النّقطة) x_0 هي **نقطة طرف يُمنى** في القطعة أو في الشّعاع).

- إذا وُجِدَ جوارٌ **أيسر** للنّقطة x_0 فيه لكلّ x ينتمي لهذا الجوار يتحقّق: $f(x_0) \le f(x)$، فإنّ الدّالّة $f(x)$ تحصل في هذه النّقطة على **قيمةٍ صُغرى محليّة**.
- إذا وُجِدَ جوارٌ **أيسر** للنّقطة x_0 فيه لكلّ x ينتمي لهذا الجوار يتحقّق: $f(x_0) \ge f(x)$، فإنّ الدّالّة $f(x)$ تحصل في هذه النّقطة على **قيمةٍ عُظمى محليّة**.



بالنّسبة لنقطة قيمةٍ صُغرى: بصورةٍ بيانيّة، عندما نقترب من نقطة الطّرف اليُمنى (أي، نتحرّك على الخطّ البيانيّ باتّجاه اليمين)، قيم الدّالّة تصغر. وكذلك، بما أنّ قيمة الدّالّة في نقطة الطّرف هي القيمة الأصغر في جوار نقطة الطّرف، فإنّ نقطة الطّرف هي نقطة قيمةٍ صُغرى محليّة.



بالنّسبة لنقطة قيمةٍ عُظمى: بصورةٍ بيانيّة، عندما نقترب من نقطة الطّرف اليُمنى (أي، نتحرّك على الخطّ البيانيّ باتّجاه اليمين)، قيم الدّالّة تكبر. وكذلك، بما أن قيمة الدّالّة في نقطة الطّرف هي القيمة الأكبر في جوار نقطة الطّرف، فإنّ نقطة الطّرف هذه هي نقطة قيمةٍ عُظمى محليّة.

(10) نقطة قيمةٍ عُظمى مُطلقة

معطاةٌ الدّالّة غير الثابتة $f(x)$ والمعرّفة في المجال D ومعطاةٌ النّقطة x_0 الواقعة في مجال تعريف الدّالّة.
نقول، إنّ **الدّالّة $f(x)$ تحصل على قيمةٍ عُظمى مطلقة** في النّقطة x_0 إذا لكلّ نقطةٍ x في المجال D تتحقّق المتباينة: $f(x_0) \ge f(x)$.

اِنتبهوا: يمكن أن يكون للدّالّة $f(x)$ عدّة نقاط قيمةٍ عُظمى مطلقة ويمكن أن لا تكون لها أيّة نقطة كهذه.

(11) نقطة قيمةٍ صُغرى مطلقة

معطاةٌ الدّالّة غير الثابتة $f(x)$ والمعرّفة في المجال D ومعطاةٌ النّقطة x_0 الواقعة في مجال تعريف الدّالّة.
نقول، إنّ **الدّالّة $f(x)$ تحصل على قيمةٍ صُغرى مطلقة** في النّقطة x_0 إذا لكلّ نقطةٍ x في المجال D تتحقّق المتباينة: $f(x_0) \le f(x)$.

اِنتبهوا: يمكن أن يكون للدّالّة $f(x)$ عدّة نقاط قيمةٍ صُغرى مطلقة ويمكن أن لا تكون لها أيّة نقطة كهذه.

قبل أن نتناول مثالًا بيانيًا لإجمال بعض المصطلحات التي عُرِضَت حتّى الآن، نعرض مصطلحًا آخر: صفة اتّصال الدّالّة. لا يمكننا في هذه المرحلة عرض تعريفٍ دقيقٍ لهذا المصطلح (وعمليًّا، حتّى بعد أن نُوسّع معلوماتنا في حساب التّفاضل لن نستطيع عرض التّعريف الدّقيق لهذا المصطلح). ومع هذا، فإنّ الشّروحات والأوصاف التي سنتناولها لن تكتمل دون "المسّ" بهذا المصطلح.

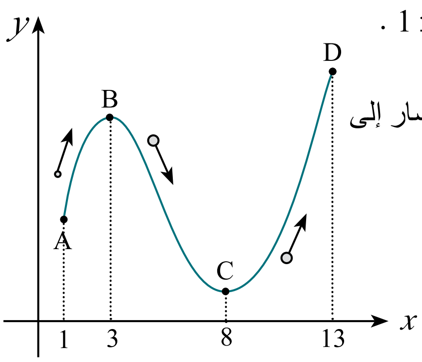
(12) شرحٌ حَدسيٌّ لمصطلح اتّصال الدّالّة

معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في المجال D ، ومعطاةٌ القطعة $a < x < b$ التي تنتمي لمجال تعريف الدّالّة.
نقول إنّ الدّالّة $f(x)$ مُتّصلة في القطعة $a < x < b$ إذا استطعنا رسم الخطّ البيانيّ للدّالّة بجرّة قلمٍ واحدة (أي، دون رفع القلم عن الصّفحة).

من الواضح طبعًا أنّ هذا الشّرح حدسيٌّ لأنّ مصطلح: "جرّة قلمٍ واحدة" ليس مصطلحًا رياضيًّا. ومع هذا، يُعطي هذا المصطلح إحساسًا واضحًا جدًا وملموسًا عن ماهيّة الدّالّة المتّصلة.

نُجمل الآن التّعاريف والمصطلحات التي تناولناها حتّى الآن عن طريق التّمعّن في الخطّ البيانيّ لدالّةٍ، وسنتطرّق من خلاله للمصطلحات التي ذكرناها حتّى الآن.

مثال محلول: إجمال المصطلحات



معطى في الجهة اليسرى الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ المعرّفة في المجال $1 \le x \le 13$.
أُشير على الخطّ البيانيّ للدّالّة إلى أربع نقاطٍ: A ، B ، C وَ D . كما نلاحظ، فإنّ الخطّ البيانيّ للدّالّة يصف خطًّا مُتّصلًا. "نتجوّل" على الخطّ البيانيّ، بحيث نتقدّم من اليسار إلى اليمين. النّقطة A هي **نقطة طرفٍ يُسرى** ومن بعدها تتصاعد الدّالّة لذا فهي نقطة **قيمةٍ صُغرى محلّيّة**.
من النّقطة A وحتّى النّقطة B الدّالّة **تتصاعد** كما قلنا ("نتجوّل" بصُعودٍ).
أي أنّ الدّالّة تصاعديّة في المجال $1 \le x < 3$.
في النّقطة B نصل إلى القمّة، أي، النّقطة B هي نقطة قيمةٍ **عُظمى محلّيّة**.
من النّقطة B وحتّى النّقطة C الدّالّة **تنازليّة** ("نتجوّل" بنُزولٍ). أي أنّ الدّالّة تنازليّة في المجال $3 < x < 8$.
في النّقطة C نصل إلى "الهاوية"، أي، النّقطة C هي نقطة قيمةٍ **صُغرى محلّيّة**.

يتبع في الصّفحة التّالية >>>

من النّقطة C وحتّى النّقطة D الدّالّة **تصاعديّة** مرّةً أخرى. الدّالّة تصاعديّة في المجال $8 < x \le 13$.

النّقطة D هي **نقطة طرفٍ يُمنى** والدّالّة قبلها تصاعديّة ولذا فهي نقطة قيمةٍ **عُظمى محليّة**.

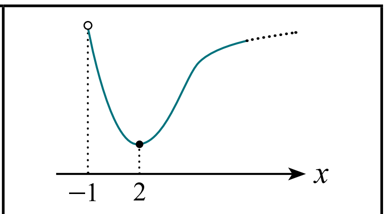
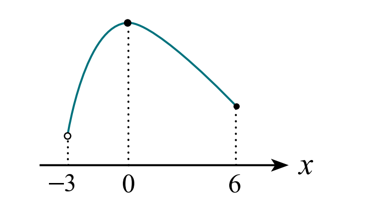
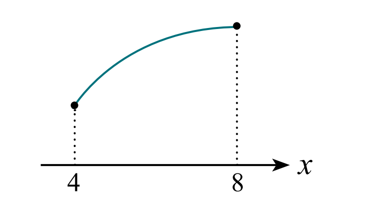
من بين نقطتَي القيمة الصُّغرى المحلّيّتَيْن، النّقطة C هي النّقطة الأكثر انخفاضًا ولذا فهي أيضًا النّقطة **الصُّغرى المطلقة**.

من بين نقطتَي القيمة العُظمى المحلّيّتَيْن، النّقطة D هي النّقطة الأكثر عُلوًّا لذا فهي أيضًا النّقطة **العُظمى المطلقة**.

أمثلة بيانيّة أخرى لوجود نقاطٍ قصوى محلّيّة ومُطلقة

في الأمثلة الآتية، سنرى حالاتٍ مختلفة لوجود أو عدم وجود نقاط قصوى مطلقة.

نُذكّركم، إشارة نقطةٍ بيضاء في طرف مجالٍ تدلّ على أنّ هذه النّقطة **لا** تنتمي لمجال تعريف الدّالّة.

		
مجال التّعريف: $x > -1$ ، قيمة صُغرى محليّة ومطلقة في $x = 2$ ، لا يوجد قيمة عُظمى محلّيّة ولا يوجد قيمة عظمى مطلقة.	مجال التّعريف: $-3 < x \le 6$ ، قيمة عُظمى محليّة ومطلقة في $x = 0$ ، قيمة صُغرى محلّيّة $x = 6$ ، لا توجد قيمة صُغرى محلّيّة مطلقة.	مجال التّعريف: $4 \le x \le 8$ ، قيمة صُغرى محليّة ومطلقة في $x = 4$ ، قيمة عُظمى محلّيّة ومطلقة في $x = 8$

أمثلة محلولة: رسم خطٍّ بيانيٍّ لدالّة إستنادًا على معطيات

(1) معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في المجال $-3 \le x \le 5$. الدّالّة مُتّصلة.

(أ) معطى أنّ النّقطتَيْن الصّفريَّتَيْن الوحيدتَيْن للدّالّة هما: $x_1 = -1$ ، $x_2 = 2$

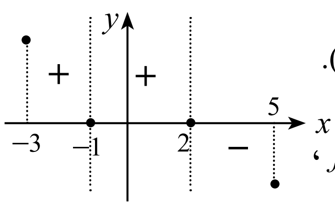
ومعطى أنّ: $f(-2) > 0$ ، $f(0) > 0$ ، $f(5) < 0$.

أكتبوا المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والتي فيها الدّالّة سالبة.

(ب) أُرسموا رسمًا بيانيًّا ممكنًا للخطّ البيانيّ للدّالّة.

(ج) بحسب الرّسم الذي رسمتموه في البند (ب)، حدّدوا هل تحصل الدّالّة على نهايةٍ صُغرى أم عُظمى في النّقطتَيْن $x = -3$ وَ $x = 5$. هل يوجد للدّالّة نقاط قصوى مطلقة ؟

الحلّ:



(أ) الدّالّة المتّصلة **تُغيّر إشارتها فقط** في انتقالها عبر نقطتها الصّفريّة.

في الحالة التي أمامنا، تُغيّر الدّالة إشارتها فقط في النّقطة $x = 2$ (أُنظروا الرّسم).

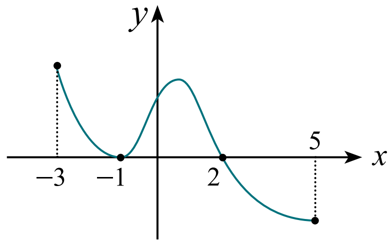
بما أنّ النّقطتَيْن الصّفريَّتَيْن الوحيدتَيْن هما: $x_1 = -1$ ، $x_2 = 2$ ، فإنّ:

- $x = -2$ ينتمي إلى المجال $-3 \le x < -1$ ، وبالنّتيجة، إذا $f(-2) > 0$ ، فلكلّ: $-3 \le x_0 < -1$ يتحقّق: $f(x_0) > 0$.
- $x = 0$ ينتمي إلى المجال $-1 < x < 2$ ، وبالنّتيجة، إذا $f(0) > 0$ ، فلكلّ: $-1 < x_0 < 2$ يتحقّق: $f(x_0) > 0$.
- $x = 5$ ينتمي إلى المجال $2 < x \le 5$ ، وبالنّتيجة، إذا $f(5) < 0$ ، فإنّ: $2 < x_0 \le 5$ يتحقّق: $f(x_0) < 0$.

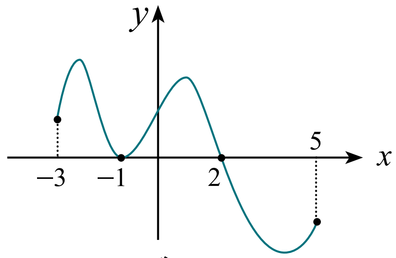
جواب: الدّالّة موجبة في: $-3 \le x < -1$, $-1 < x < 2$ ، الدّالّة سالبة في المجال: $2 < x \le 5$.

يتبع في الصّفحة التّالية >>>

(ب) نصل بين النّقاط التي أُشير إليها بخطٍّ متّصل. نعرض إمكانيّتَين مختلفتَيْن:
(يوجد بالطّبع **عددٌ لانهائيٌّ** من الإمكانيّات الأخرى).



إمكانيّة 1



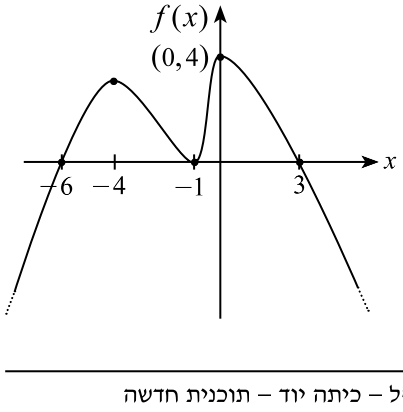
إمكانيّة 2

(ج) بالنّسبة **للإمكانيّة رقم 1** :
في النّقطة $x=-3$ توجد قيمة عُظمى محلّيّة هي أيضًا قيمة عُظمى مطلقة.
في النّقطة $x=5$ توجد قيمة صُغرى محلّيّة هي أيضًا قيمة صُغرى مطلقة.
بالنّسبة **للإمكانيّة رقم 2** :
في النّقطة $x=-3$ توجد قيمة صُغرى محلّيّة .
في النّقطة $x=5$ توجد قيمة عُظمى محلّيّة.
القيمة العظمى المطلقة تحصل في نقطة تقع في المجال: $-3<x<-1$.
القيمة الصّغرى المطلقة تحصل في نقطة تقع في المجال: $2<x<5$.

(2) معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المتّصلة لكلّ x .
(أ) أُرسموا رسمًا تقريبيًّا ممكنًا للخطّ البيانيّ للدّالّة إذا عُلِمَ أنّ:
(i) إحداثيّات نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ مع المحور y هي $(0,4)$ ،
وهذه النّقطة هي أيضًا نقطة القيمة العظمى المطلقة للدّالّة.
(ii) للدّالّة ثلاث نقاطٍ صفريّة.
(iii) الدّالّة موجبة في المجالَيْن: $-1<x<3$, $-6<x<-1$.
(iv) الدّالّة تصاعديّة في المجالَيْن: $-1<x<0$, $x<-4$.
(ب) ما هي الإحداثيّات x للنّقاط القصوى (قيمة صغرى وعظمى) المحلّيّة للدّالّة وما هو نوع هذه النّقاط القصوى ؟

الحلّ:

(أ) نعيّن نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ مع المحور y $(0,4)$ التي هي أيضًا نقطة القيمة العظمى المطلقة للدّالّة، ونُعيّن 3 النّقاط الصّفريّة : $(3,0)$, $(-1,0)$, $(-6,0)$
التي يمكن معرفة إحداثيّاتها من مجالات موجبيّة وسالبيّة الدّالّة.
نستعين بالمجالات التي فيها الدّالّة موجبة وأيضًا بمجالات تصاعد الدّالّة.
ونحصل على الخطّ البيانيّ التّالي:



(ب) للدّالّة قيمة عُظمى محلّيّة في $x=-4$ وفي $x=0$ ،
ونقطة قيمة صُغرى محلّيّة في $x=-1$.

تمارين للعمل الذّاتيّ

(1) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=1-6x$. إحسبوا قيم التّعابير التّالية:

(أ) $f(0)$ (ب) $f(1)$ (ج) $f(-2)$ (د) $f(0.3)$

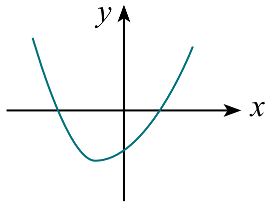
(هـ) $f(\mathrm{m})$ (و) $f(-\mathrm{a})$ (ز) $f(-1)+f(0.5)$ (ح) $f(\mathrm{k})-f(2)$

(2) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=x^2-2x+7$.

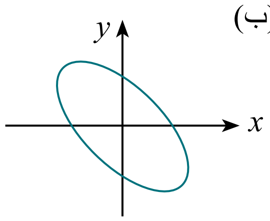
لأيّ قيم x قيمة الدّالّة $f(x)$ تساوي 22 ؟

(3) تمعّنوا في الرّسوم التّالية وحدّدوا أيّها يصف دالّةً وأيّها لا يصف دالّة.

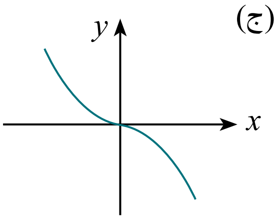
(أ)



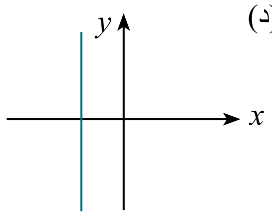
(ب)



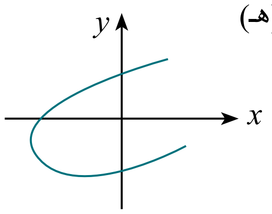
(ج)



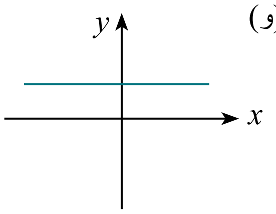
(د)



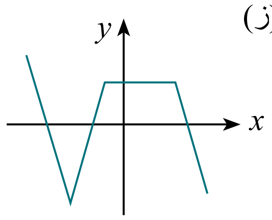
(هـ)



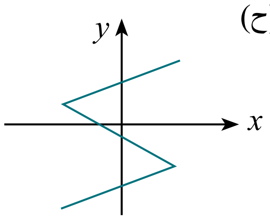
(و)



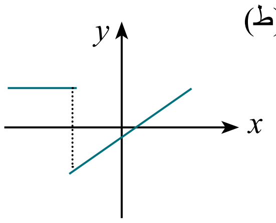
(ز)



(ح)



(ط)



(4) أمامكم الخطّ البيانيّ للدّالّة ( ) في المجال: $-10\le x\le 10$.

كلّ مربّع يعادل **وِحدةً واحدة**.

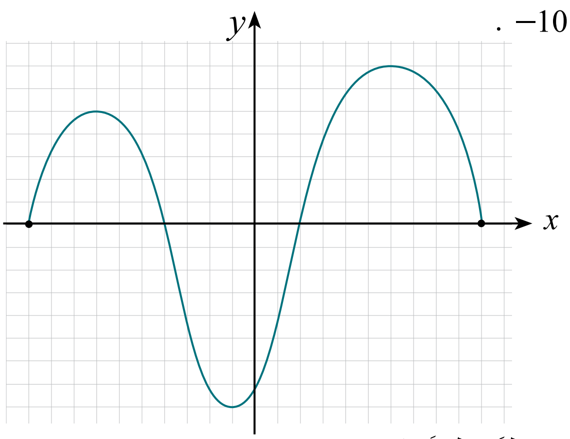
أجيبوا عن البنود التّالية:

(أ) جدوا إحداثيّات تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحور x .

(ب) بأيّ المجالات الدّالّة موجبة وبأيّها الدّالّة سالبة ؟

(ج) ما هي إحداثيّات نقاط القيمة الصّغرى والقيمة العظمى للدّالّة ؟

(د) هل تحصل الدّالّة على قيمة عظمى أو صغرى في كلّ واحدة من نقطتَي طرفَيها ؟ إذا أجبتم بنعم، أكتبوا إحداثيّات النّقطتَيْن القصوَيَيْن في نقطتَي الطّرف.



يتبع في الصّفحة التّالية >>>

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

(هـ) ما هي مجالات تصاعد الدّالّة ؟ ما هي مجالات تنازل الدّالّة ؟

(و) جدوا قيم x التي تُحقّق:

(i) $f(x)=-8$ $\quad$ (ii) $f(x)=7$ $\quad$ (iii) $f(x)=-5$

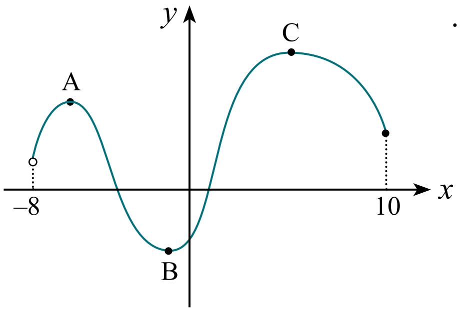
(ز) حدّدوا **كم** يوجد لكلّ واحدة من المعادلات التّالية:

(i) $f(x)=-1$ $\quad$ (ii) $f(x)=5$ $\quad$ (iii) $f(x)=1.5$

(5) أمامكم رسمٌ للخطّ البيانيّ للدّالّة $y=f(x)$ في المجال: $-8<x\leq 10$.
الرّسم **ليس** بحسب مقياس رسم.
النّقاط A ، B وَ C هي النّقاط القصوى الدّاخليّة للدّالّة في المجال المعطى. معطى أنّ الدّالّة $y=f(x)$ تصاعديّة في المجالَيْن: $-8<x<-6$ ، $-1<x<5$.

(أ) جدوا الإحداثيّات x للنّقاط A ، B وَ C .

(ب) ما هي مجالات تنازل الدّالّة ؟



بالنّسبة لكلّ الخطوط البيانيّة التي تظهر في التّمارين **(6)** – **(9)** :

(أ) جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدّالّة.

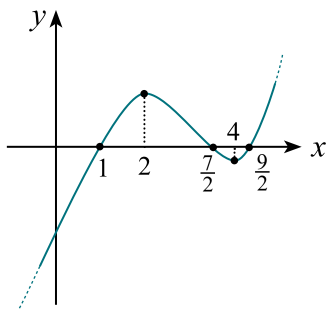
(ب) جدوا الإحداثيّات x للنّقاط القصوى المحلّيّة للدّالّة.

(ج) جدوا الإحداثيّات x للنّقاط القصوى المطلقة للدّالّة (إذا وُجِدَت كهذه).

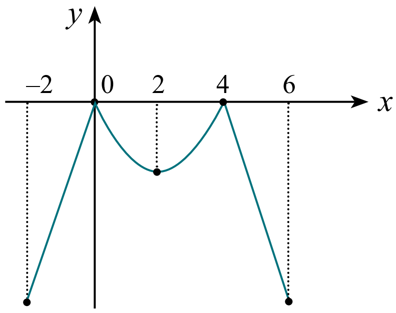
(د) جدوا المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والتي فيها سالبة.

أجيبوا بأجوبة عدديّة أو عبّروا عن إجاباتكم بواسطة البارامترات التي تظهر في الأسئلة.

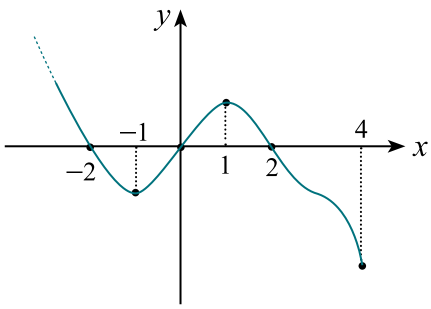
(6)



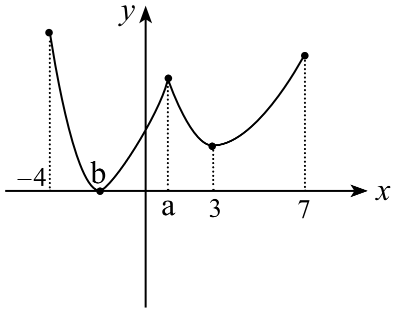
(7)



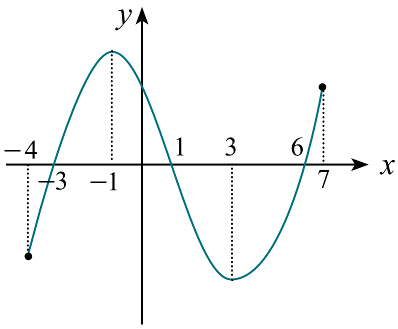
(8)



(9)



(10) أمامكم الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = f(x)$.



أجيبوا عن البنود التّالية:

(أ) ما هو مجال تعريف الدّالّة ؟

(ب) أكتبوا مجالات تصاعد وتنازل الدّالّة.

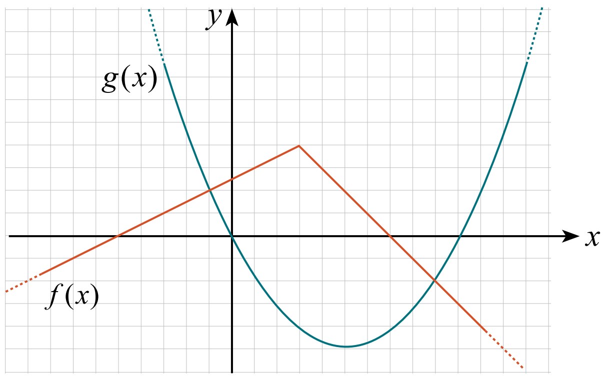
(ج) أكتبوا الإحداثيّات x لنقاط القيمة الصّغرى للدّالّة.

(د) أكتبوا الإحداثيّات x لنقاط القيمة العظمى للدّالّة.

(هـ) ما هي الإحداثيّات x التي تُحقّق المعادلة: $f(x) = 0$.

(و) معطى أنّ المستقيم $y = \text{k}$ يقطع الخطّ البيانيّ للدّالّة **في نقطةٍ واحدة فقط**.
كم قيمة ممكنة لـ k يوجد ؟

(11) أمامكم الخطّان البيانيّان للدّالّتَيْن: $y = f(x)$ ، $y = g(x)$.



كلّ مربّعٍ يمثّل **وحدة واحدة** (أُنظروا الرّسم).

(أ) جدوا إحداثيّات النّقاط الصّفريّة لكلّ واحدة من الدّالّتَيْن.

(ب) ما هي إحداثيّات نقطة تقاطع كلّ واحدةٍ من الدّالّتَيْن مع المحور y ؟

(ج) بأيّ مجالٍ الدّالّة $f(x)$ موجبة ؟

(د) بأيّ مجالات الدّالّة $g(x)$ موجبة ؟

(هـ) بأيّ مجالٍ كِلتا الدّالّتَيْن موجبتَيْن ؟

(و) لأيّ قيم a يتحقّق: $f(\text{a}) = g(\text{a})$ ؟
ما هو المعنى البيانيّ للمساواة الأخيرة ؟

(ز) أكتبوا مجالات تصاعد وتنازل الدّالّة.

(ح) أكتبوا إحداثيّات النّقاط القصوى لكلّ واحدة من الدّالّتَيْن. أكتبوا أيضًا نوع كلّ قيمةٍ قصوى.

(12) معطاةٌ الدّوالّ: $f(x) = x^2 - 4x + 4$ ، $g(x) = x + 10$ ، $h(x) = 2x$.

(أ) أكتبوا إحداثيّات تقاطع كلّ واحدٍ من الخطوط البيانيّة لكلّ واحدةٍ من هذه الدّوالّ مع المحورَيْن.

(ب) بأيّ النّقاط يتحقّق: $f(x) = g(x)$ ؟

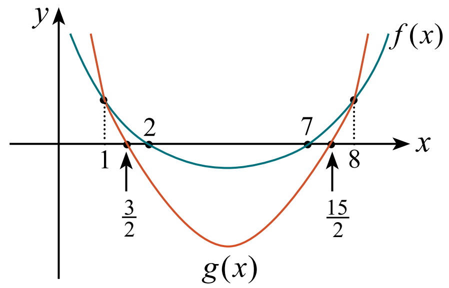
(ج) بأيّ النّقاط يتحقّق: $h(x) = g(x)$ ؟

(د) يمكن الاستعانة بتطبيق DESMOS (أنظروا شروحاتٍ في نهاية الكتاب في المُلحق ابتداءً من الصّفحة 306)، وفحص إجاباتكم للبنود (أ) - (ج).

(هـ) نُعرّف دالّة جديدة: $p(x) = f(x) - g(x)$. إحسبوا: $f(5)$ ، $g(5)$ ، $p(5)$.

(و) إستعينوا بجواب البند (ب) وجدوا النّقاط الصّفريّة للدّالّة $p(x)$.

(13) يظهر في الرّسم في الجهة اليسرى رسمٌ للخطَّيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$.



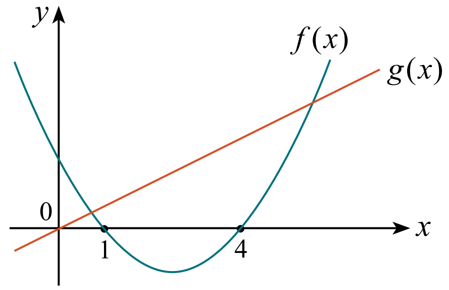
(أ) أُكتبوا المجالات التي فيها الدّالّة $f(x)$ موجبة والتي فيها سالبة.

(ب) أُكتبوا المجالات التي فيها الدّالّة $g(x)$ موجبة والتي فيها سالبة.

(ج) لأيّ قيم x يتحقّق $f(x)=g(x)$ ؟

(د) لأيّ قيم x يتحقّق $f(x)>g(x)$ ؟

(14) يظهر في الرّسم في الجهة اليسرى رسمٌ للخطَّيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$.



(أ) أُكتبوا المجالات التي فيها الدّالّة $f(x)$ موجبة والتي فيها سالبة .

(ب) أُكتبوا المجالات التي فيها الدّالّة $g(x)$ موجبة والتي فيها سالبة.

(ج) هل توجد قيمة لـ x في المجال $x>4$ يتحقّق فيها $f(x)=g(x)$ ،

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) $f(0)=1$ (ب) $f(1)=-5$ (ج) $f(-2)=13$

(د) $f(0.3)=-0.8$ (هـ) $f(\text{m})=1-6\text{m}$ (و) $f(-\text{a})=1+6\text{a}$

(ز) $f(-1)+f(0.5)=5$ (ح) $f(\text{k})-f(2)=12-6\text{k}$

(2) $x_1=5\ ,\ x_2=-3$

(3) دالّة: (أ)، (ج)، (و)، (ز). ليست دالّة: (ب)، (د)، (هـ)، (ح)، (ط).

(4) (أ) $(-10,0)\ ,\ (-4,0)\ ,\ (2,0)\ ,\ (10,0)$

(ب) موجبة: $2<x<10\ ,\ -10<x<-4$ ، سالبة: $-4<x<2$

(ج) $\max(-7,5)\ ,\ \min(-1,-8)\ ,\ \max(6,7)$

(د) $\min(-10,0)\ ,\ \min(10,0)$

(هـ) $\uparrow: -10\le x<-7\ ,\ -1<x<6\ \ ,\ \ \downarrow: -7<x<-1\ ,\ 6<x\le 10$

(و) $(i)\ x=-1$ $(ii)\ x=6$ $(iii)\ x\approx-2.8\ ,\ x\approx 0.8$

(ز) (i) حلّان. (ii) 3 حلول. (iii) 4 حلول.

(5) (أ) $x_C=5\ ,\ x_B=-1\ ,\ x_A=-6$

(ب) $-6<x<-1$ ، $5<x\le 10$

(6) (أ) $\uparrow: x<2\ ,\ x>4\ \ ,\ \ \downarrow: 2<x<4$

(ب) $x_{max}=2\ ,\ x_{min}=4$ (ج) لا يوجد.

(د) موجبة: $x>\frac{9}{2}\ ,\ 1<x<\frac{7}{2}$ ، سالبة: $\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}\ ,\ x<1$

(7) (أ) $\uparrow$: $-2\le x<0\,,\,2<x<4$, $\downarrow$: $0<x<2\,,\,4<x\le 6$

(ب) $x_{\min}=-2\,,\,x_{\max}=0\,,\,x_{\min}=2\,,\,x_{\max}=4\,,\,x_{\min}=6$

(ج) $x_{\min}=-2\,,\,6$ ، $x_{\max}=0\,,\,4$.

(د) موجبة: لا يوجد. سالبة: $-2\le x<0\;,\;0<x<4\;,\;4<x\le 6$

(8) (أ) $\uparrow$: $-1<x<1$, $\downarrow$: $x<-1\,,\,1<x\le 4$

(ب) $x_{\min}=-1\,,\,x_{\max}=1\,,\,x_{\min}=4$ (ج) $x_{\min}=4$

(د) موجبة: $x<-2\;,\;0<x<2$ سالبة: $-2<x<0\;,\;2<x\le 4$

(9) (أ) $\uparrow$: $b<x<a\,,\,3<x\le 7$, $\downarrow$: $-4\le x<b\,,\,a<x<3$

(ب) $x_{\max}=-4\,,\,x_{\min}=b\,,\,x_{\max}=a\,,\,x_{\min}=3\,,\,x_{\max}=7$

(ج) $x_{\max}=-4\,,\,x_{\min}=b$

(د) موجبة: $-4\le x<b\;,\;b<x\le 7$ سالبة: لا يوجد.

(10) (أ) $-4\le x\le 7$ (ب) $\uparrow$: $-4\le x<-1\,,\,3<x\le 7$, $\downarrow$: $-1<x<3$

(ج) $x_{\min}=3\,,\,-4$ (د) $x_{\max}=7\,,\,-1$ (هـ) $x=6\,,\,1\,,\,-3$

(و) موجبة: $-3<x<1\;,\;6<x\le 7$ سالبة: $-4\le x<-3\;,\;1<x<6$

(ز) قيمتان.

(11) (أ) $f(x):(7,0)\,,\,(-5,0)\;,\;g(x):(10,0)\,,\,(0,0)$

(ب) $f(x):(0,2.5)\;,\;g(x):(0,0)$ (ج) $-5<x<7$

(د) $x<0\,,\,x>10$ (هـ) $-5<x<0$

(و) $a_1=-1\,,\,a_2=9$ ، a هو الإحداثيّ x لنقطة تقاطع الخطّين البيانيّين.

(ز) $f(x)$: $\uparrow$: $x<3$, $\downarrow$: $x>3$

$g(x)$: $\uparrow$: $x>5$, $\downarrow$: $x<5$

(ح) $f(x):\max(3,4)\;,\;g(x):\min(5,-5)$

(12) (أ) $f(x):(2,0)\,,\,(0,4)\;,\;g(x):(-10,0)\,,\,(0,10)\;,\;h(x):(0,0)$

(ب) $(-1,9)\,,\,(6,16)$ (ج) $(10,20)$

(هـ) $p(5)=-6\;,\;g(5)=15\;,\;f(5)=9$ (و) $(-1,0)\,,\,(6,0)$

(13) (أ) موجبة: $x<2\,,\,x>7$ سالبة: $2<x<7$

(ب) موجبة: $x<\frac{3}{2}\,,\,x>\frac{15}{2}$ سالبة: $\frac{3}{2}<x<\frac{15}{2}$

(ج) $x_1=8\,,\,x_2=1$ (د) $1<x<8$

(14) (أ) موجبة: $x<1\,,\,x>4$ سالبة: $1<x<4$

(ب) موجبة: $x>0$ سالبة: $x<0$

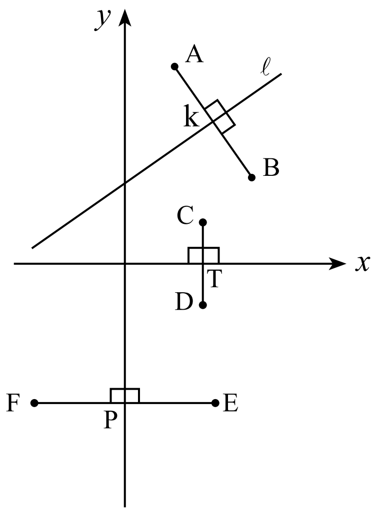
(ج) نعم.

ج. التّماثل، الدّالّة الزّوجيّة والدّالّة الفرديّة

(1) التّماثل

تماثل بالنّسبة لخطٍّ مستقيم:

نقطتان تُسمّيان متماثلتَيْن بالنّسبة لمستقيمٍ مُعيّن إذا كان المستقيم مُعامدًا للقطعة التي تصل بين النّقطتَيْن ويمرّ في نقطة وسط القطعة التي تصل بين النّقطتَيْن.



يتحقّق في الرّسم:

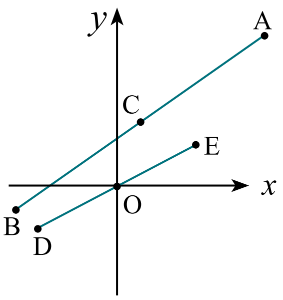
(أ) النّقطتان A و B هما نقطتان متماثلتان بالنّسبة للمستقيم ℓ ،
إذا تحقّق $AB \perp \ell$, $AK = BK$.
(في هذه الحالة، المستقيم ℓ يُسمّى **عمودًا متوسّطًا** للقطعة AB).

(ب) النّقطتان C و D هما نقطتان متماثلتان بالنّسبة للمحور x ،
إذا كان CD مُعامدًا للمحور x وكان $CT = DT$.
(المحور x في هذه الحالة، يُسمّى **عمودًا متوسّطًا** للقطعة CD).

(ج) النّقطتان E و F هما نقطتان متماثلتان بالنّسبة للمحور y ،
إذا كان FE مُعامدًا للمحور y وكان $EP = FP$.
(المحور y في هذه الحالة، يُسمّى **عمودًا متوسّطًا** للقطعة FE).

تماثل بالنّسبة لنقطة:

نقطتان معطتان تُسمّيان نقطتَيْن مُتماثلتَين بالنّسبة لنقطة معيّنة إذا كانت النّقطة المعيّنة هي نقطة وسط القطعة التي تصل بين النّقطتَيْن المعطتَيْن.



يتحقّق في الرّسم:

(أ) النّقطتان A و B هما نقطتان متماثلتان بالنّسبة للنّقطة C ،
إذا كانت النّقطة C نقطة وسط القطعة AB (C تقع على BA ، $AC = BC$).

(ب) النّقطتان D و E هما نقطتان متماثلتان بالنّسبة للنّقطة الأصليّة، O ،
إذا كانت النّقطة O (النّقطة الأصليّة) هي نقطة وسط القطعة DE .
(O تقع على DE ، $DO = EO$).

(2.1) الدّالّة الزّوجيّة

معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في مجالٍ متماثلٍ بالنّسبة للمستقيم $x = 0$ (المحور y).

نقول، إنّ الدّالّة $f(x)$ هي **دالّة زوجيّة** إذا لكلّ x ينتمي إلى مجال تعريفها تحققت المساواة التّالية:
$f(-x) = f(x)$.

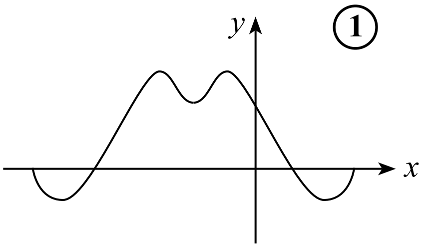
- الخطّ البيانيّ للدّالّة الزّوجيّة **مُتماثلٌ بالنّسبة للمحور y** .
- بالنّسبة للخطّ البيانيّ لدالّةٍ **زوجيّة**، يمكن القول **بشكلٍ عام:** إذا كانت النّقطة (x_0, y_0) تقع على خطّها البيانيّ، فأيضًا النّقطة $(-x_0, y_0)$ تقع على خطّها البيانيّ، وذلك لِتَحَقُّق المساواة: $f(-x_0) = f(x_0) = y_0$.
- إذا كان $x = 0$ ينتمي لمجال تعريف الدّالّة الزّوجيّة، التي ليست دالّةً ثابتة حول النّقطة التي فيها $x = 0$ ، فإنّ $x = 0$ تكون نقطةً قصوى للدّالّة الزّوجيّة.

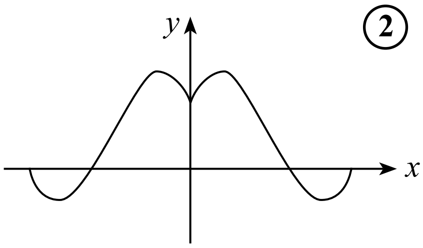
(2.2) الوصف البيانيّ للدّالّة الزّوجيّة

سنتناول فيما يلي مثالَيْن بيانيَّيْن لجدول قيم ولتعبيرٍ جبريٍّ لدالّةٍ زوجيّة.

مثالان

(1) أيُّ الخطَّيْن البيانيَّيْن 1 أو 2 يصف دالّةً **زوجيّة** ؟



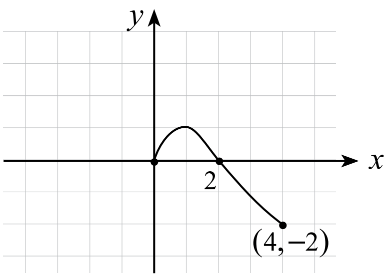


الحلّ:

الخطّ البيانيّ 1 ليس متماثلًا بالنّسبة للمحور y ، ولذا، الخطّ البيانيّ 1 لا يصف دالّةً زوجيّة.

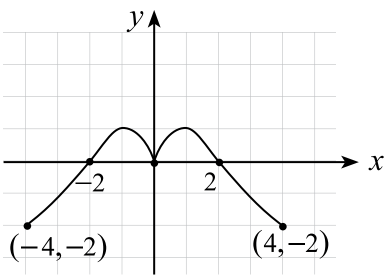
الخطّ البيانيّ 2 متماثلٌ بالنّسبة للمحور y ولذا، الخطّ البيانيّ 2 يصف دالّةً زوجيّة.

(2) أكملوا الخطّ البيانيّ الذي أمامكم ليصف دالّةً زوجيّة.



الحلّ:

بما أنّ الخطّ البيانيّ للدّالّة الزّوجيّة متماثلٌ بالنّسبة للمحور y ، نحصل على:



اِنتبهوا: بما أنّ الدّالّة زوجيّة، تَمَّ إكمال الخطّ البيانيّ للدّالّة بمساعدة انعكاس الخطّ البيانيّ الأيمن بالنّسبة للمحور y . في الدّالّة الزّوجيّة الخطّ البيانيّ الأيسر هو صورة مِرآة للخطّ البيانيّ الأيمن وعلى العكس، أي أنّ المحور y هو أيضًا محور انعكاس الخطّ البيانيّ للدّالّة.

(3) أكملوا الجدول الذي أمامكم إذا عُلِمَ أنّ الدّالّة $f(x)$ هي دالّة زوجيّة.

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
$f(x)$	−2	−5		6	4		

الحلّ:

بما أنّ الدّالّة $f(x)$ هي دالّة زوجيّة، فيتحقّق: $f(-x)=f(x)$.

النّقطة المماثلة للنّقطة $(3,-2)$ هي النّقطة $(-3,-2)$ ،

النّقطة المماثلة للنّقطة $(2,-5)$ هي النّقطة $(-2,-5)$ ،

النّقطة المماثلة للنّقطة $(-1,4)$ هي النّقطة $(1,4)$.

ونحصل على الجدول:

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
$f(x)$	−2	−5	4	6	4	−5	−2

(4) نبرهن أنّ الدّالّة $f(x)=x^4-3x^2+1$ هي **دالّة زوجيّة.**

مجال تعريف الدّالّة $f(x)$ هو كلّ x ولذا فهي متماثلة بالنّسبة لـ $x=0$.

وكذلك يتحقّق:

$$f(-x)=(-x)^4-3\cdot(-x)^2+1$$
$$f(-x)=x^4-3x^2+1=f(x)$$

بما أنّه يتحقّق $f(-x)=f(x)$ لذا فإنّ الدّالّة هي **دالّة زوجيّة.**

<u>وصف الخطّ البيانيّ للدّالّة:</u>

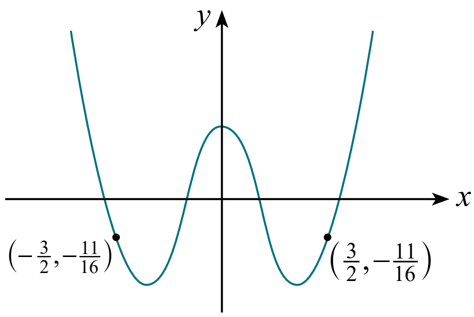
الخطّ البيانيّ للدّالّة متماثلٌ بالنّسبة للمحور y :

إذا طوَينا الخطّ البيانيّ في المجال $x\geq 0$ حول المحور y

كمحور تماثل، فسيتّحد مع الخطّ البيانيّ للدّالّة في المجال $x\leq 0$.

على سبيل المثال، النّقطة $\left(\frac{3}{2},-\frac{11}{16}\right)$ الواقعة على الخطّ البيانيّ للدّالّة

في الرّبع الرّابع، تتّحد مع النّقطة $\left(-\frac{3}{2},-\frac{11}{16}\right)$ في الرّبع الثّالث.



(3.1) الدّالّة الفرديّة

معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في المجال المُتماثل بالنّسبة لـ $x=0$.

نقول، إنّ الدّالّة $f(x)$ هي **دالّة فرديّة** إذا لكلّ x ينتمي لمجال تعريفها تتحقّق المساواة:

$f(-x)=-f(x)$.

- الخطّ البيانيّ للدّالّة الفرديّة **مُتماثلٌ بالنّسبة لنقطة أصل المحاور.**
- يمكننا أيضًا الرّؤية أنّ الجزء الأيسر (على يسار المحور y) هو انعكاسٌ للجزء الأيمن (على يمين المحور y) بالنّسبة للمحور y ، ومن ثمّ انعكاسٌ بالنّسبة للمحور x .
- بالنّسبة للخطّ البيانيّ للدّالّة **الفرديّة**، يمكننا القول **بشكلٍ عامٍّ:**

  إذا وقعت النّقطة (x_0,y_0) على خطّها البيانيّ، فإنّ النّقطة $(-x_0,-y_0)$ تقع أيضًا على خطّها البيانيّ،
  وذلك لِتحقُّق المساواة: $f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0$.

اِنتبهوا: توجد دوالّ ليست زوجيّة وليست فرديّة.

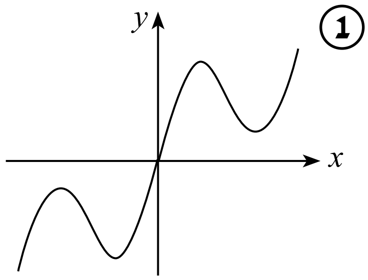
גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

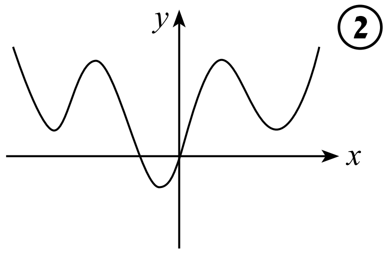
(3.2) الوصف البيانيّ للدّالّة الفرديّة

سنتناول الآن مثالَيْن لوصفٍ بيانيّ، لجدول قيمٍ وتعبيرٍ جبريٍّ لدالّةٍ فرديّة.

مثالان

(1) أيُّ الخطَّيْن البيانيَّيْن (1) أو (2) يصف دالّةً **فرديّةً** ؟





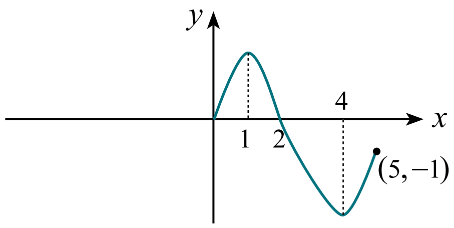
الحلّ:

الخطّ البيانيّ (1) مُتماثلٌ بالنّسبة لنقطة أصل المحاور.

الخطّ البيانيّ (2) ليس متماثلًا بالنّسبة لنقطة أصل المحاور .

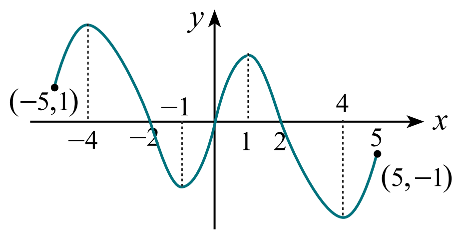
لذا، الخطّ البيانيّ (1) يصف دالّة فرديّة.

(2) أكملوا الخطّ البيانيّ الذي أمامكم كي يصف دالّةً فرديّة.



الحلّ:

بما أنّ الخطّ البيانيّ للدّالّة الفرديّة متماثلٌ بالنّسبة لنقطة أصل المحورَيْن، نحصل على الرسم التّالي:



(3) أكملوا الجدول الذي أمامكم إذا عُلِمَ أنّ $f(x)$ هي دالّة فرديّة.

x	4	3	1	0	-1	-3	-4
$f(x)$	2		4			-3	

الحلّ:

بما أنّ الدّالّة $f(x)$ هي دالّة فرديّة، تتحقّق المساواة: $f(-x)=-f(x)$.

النّقطة المماثلة للنّقطة $(4,2)$ هي النّقطة $(-4,-2)$,

النّقطة المماثلة للنّقطة $(1,4)$ هي النّقطة $(-1,-4)$

والنّقطة المماثلة للنّقطة $(-3,-3)$ هي النّقطة $(3,3)$.

وكذلك تتحقّق المساواة: $f(-x)=-f(x)$.

إذا عوّضنا $x=0$ سنحصل على: $f(-0)=-f(0)$ أي $f(0)=-f(0)$.

أي، يجب أن يتحقّق $f(0)=0$.

ونحصل على:

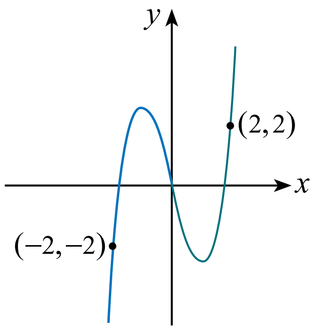
x	4	3	1	0	-1	-3	-4
$f(x)$	2	3	4	0	-4	-3	-2

(4) نبرهن أنّ الدّالّة $f(x)=x^3-3x$ هي **دالّة فرديّة**.
مجال تعريف الدّالّة $f(x)$ هو كلّ x ولذا، فهو متماثلٌ بالنّسبة لِـ $x=0$.

$$f(-x)=(-x)^3-3\cdot(-x)$$
$$f(-x)=-x^3+3x=-\left(x^3-3x\right)=-f(x)$$

بما أنّه يتحقّق $f(-x)=-f(x)$ فإنّ الدّالّة هي **دالّة فرديّة**.

<u>وصف الخطّ البيانيّ للدّالّة:</u>



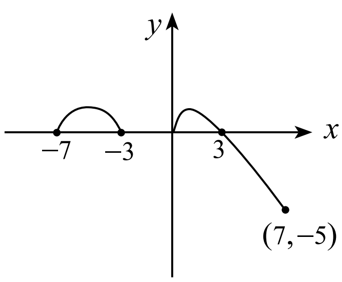
الخطّ البيانيّ للدّالّة متماثلٌ بالنّسبة لنقطة أصل المحاور: إذا طوَينا الخطّ البيانيّ للدّالّة الذي يقع في المجال $x\geq 0$ حول المحور y ومن ثمّ حول المحور x، فسيتّحد بالضّبط مع الخطّ البيانيّ الذي يقع في المجال $x\leq 0$.
على سبيل المثال، النّقطة $(2,2)$ التي تقع على الخطّ البيانيّ في الرّبع الأوّل، تتّحد مع النّقطة $(-2,-2)$ الواقعة في الرّبع الثّالث.

(5) هل الجدول الذي أمامكم يمثّل دالّةً زوجيّةً، دالّةً فرديّةً أم دالّة ليست فرديّة وليست زوجيّة ؟

x	5	3	2	-2	-3	-5
$f(x)$	-7	1	-4	-4	-1	-7

<u>الحلّ:</u>
يتحقّق: $f(5)=f(-5)\ ,\ f(2)=f(-2)$
أي، بالنّسبة لِـ: $x=2,5$ يتحقّق: $f(x)=f(-x)$,
لكن، يتحقّق أيضًا: $f(3)\neq f(-3)$.
ولذا الدّالّة $f(x)$ ليست زوجيّة وليست فرديّة.

(6) أمامكم وصفٌ لجزءٍ من الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.



(أ) هل يمكن أن تكون الدّالّة $f(x)$ دالّة زوجيّة ؟
(ب) هل يمكن أن تكون الدّالّة $f(x)$ دالّة فرديّة ؟
(ج) ما هو الاستنتاج من البندَيْن (أ) وَ (ب) ؟

<u>الحلّ:</u>
(أ) الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ليس متماثلًا بالنّسبة للمحور y،
<u>مثال:</u> $f(7)\neq f(-7)$ ، لذا، $f(x)$ ليست دالّة زوجيّة.
(ب) الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ليس متماثلًا بالنّسبة لنقطة أصل المحاور
<u>مثال:</u> $f(7)\neq -f(-7)$ ، لذا، $f(x)$ ليست دالّة فرديّة.
(ج) الاستنتاج من البندَيْن (أ) وَ (ب) هو أنّ الدّالّة **ليست زوجيّة وليست فرديّة**.

(7) نبرهن أنّ الدّالّة $f(x)=x^3+3x^2-4$ **ليست زوجيّة وليست فرديّة**.

طريقة 1 :

$$f(1)=1^3+3\cdot 1^2-4=1+3-4=0$$

$$f(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2-4=-1+3-4=-2$$

أي: $f(-1)\neq f(1)$ وأيضًا $f(-1)\neq -f(1)$.

وبما أنّه يكفي مثالًا واحدًا يتحقّق فيه أنّ $f(-x)\neq f(x)$ وأيضًا $f(-x)\neq -f(x)$ ،

نكون قد برهنّا أنّ الدّالّة $f(x)$ ليست دالّة زوجيّة ولا دالّة فرديّة.

طريقة 2 :

$$f(-x)=(-x)^3+3\cdot(-x)^2-4$$

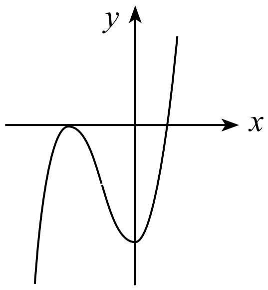
$$f(-x)=-x^3+3x^2-4$$

تتحقّق كِلا المتباينتَيْن: $f(-x)\neq -f(x)$ وأيضًا $f(-x)\neq f(x)$

لذا فالدّالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة.

معطى في الجهة اليسرى الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

الخطّ البيانيّ **ليس** متماثلًا بالنّسبة للمحور y وأيضًا **ليس** متماثلًا بالنّسبة لنقطة أصل المحاور.



إثراء : صفات الدّالّة الزّوجيّة / الفرديّة

كلّ دالّتَيْن يمكن جمعهما، طرحهما، ضربهما أو قسمتهما.

لنفترض أنّه معطاةٌ الدّالّتان الزّوجيّتان (المُخالفتان لدالّة الصّفر): $f(x)$ وَ $g(x)$,

والدّالّتان الفرديّتان (المُخالفتان لدالّة الصّفر): $a(x)$ وَ $b(x)$.

عندها يتحقّق:

أ. **مجموع / طرح دالّتَين زوجيّتَيْن / فرديّتَيْن**

(1) $y=f(x)\pm g(x)$ هو دالّة زوجيّة.

(مجموع أو طرح دالّتَيْن زوجيّتَيْن هو دالّة زوجيّة**)**.

(2) $y=a(x)\pm b(x)$ هو دالّة فرديّة.

(مجموع أو طرح دالّتَيْن فرديّتَيْن هو دالّة فرديّة**)**.

(3) $y=f(x)\pm a(x)$ ليست دالّة زوجيّة وليست دالّة فرديّة **(**مجموع أو طرح دالّة زوجيّة (مُخالفة لدالّة الصّفر) ودالّة فرديّة (مُخالفة لدالّة الصّفر) هو ليس دالّة زوجيّة وليس دالّة فرديّة**)**.

ينظّم الجدول التّالي نتائج عمليّتَي **جمع / طرح دالّتَيْن** (كما ذُكِر أعلاه). هكذا على سبيل المثال، بحسب الجدول: دالّة زوجيّة زائد (أو ناقص) دالّة زوجيّة هو دالّة زوجيّة. دالّة زوجيّة ناقص (أو زائد) دالّة فرديّة هو دالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة، وهكذا إلخ.

جمع أو طرح	زوجيّة	فرديّة
زوجيّة	زوجيّة	ليست زوجيّة وليست فرديّة
فرديّة	ليست زوجيّة وليست فرديّة	فرديّة

إنتبهوا: هذا الجدول صحيحٌ لكلّ الدّوالّ باستثناء الحالة التي فيها إحدى الدّوالّ هي دالّة الصّفر (مثلًا: $f(x)=0$)، تمتلك "شخصيّة مزدوجة" هي أيضًا دالّة زوجيّة وأيضًا دالّة فرديّة في آنٍ واحد !

يتبع في الصّفحة التّالية >>>

تكملة الإثراء : صفات الدّالّة الزّوجيّة / الفرديّة

ب. ضرب / قسمة دالّتيْن زوجيّتيْن / فرديّتيْن

(1) $y = f(x)\cdot g(x)$ ، $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ وَ $y=\frac{g(x)}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$ هما دالّتان زوجيّتان.
(حاصل ضرب أو خارج قسمة دالّتيْن زوجيّتيْن هو دالّة زوجيّة).

(2) $y = a(x)\cdot b(x)$ ، $y=\frac{a(x)}{b(x)}$ $(b(x)\neq 0)$ وَ $y=\frac{b(x)}{a(x)}$ $(a(x)\neq 0)$ هما دالّتان زوجيّتان
(حاصل ضرب أو خارج قسمة دالّتيْن فرديّتيْن هو دالّة زوجيّة).

(3) $y = f(x)\cdot a(x)$ ، $y=\frac{f(x)}{a(x)}$ $(a(x)\neq 0)$ وَ $y=\frac{a(x)}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$ هما دالّتان فرديّتان.
(حاصل ضرب أو خارج قسمة دالّة زوجيّة في / على دالّة فرديّة هو دالّة فرديّة.

الجدول في الجهة اليسرى يساعدنا في الاستنتاج ما إذا كانت دالّة معيّنة هي دالّة زوجيّة أم دالّة فرديّة.

ضرب أو قسمة	زوجيّة	فرديّة
زوجيّة	زوجيّة	فرديّة
فرديّة	فرديّة	زوجيّة

مثال: بحسب الجدول، حاصل ضرب أو خارج قسمة دالّتيْن فرديّتيْن هو دالّة زوجيّة.

نبرهن على سبيل المثال، اثنتيْن من بين الصّفات التي ذُكِرَت:

(1) نبرهن أنّ مجموع دالّتيْن **زوجيّتيْن** $f(x)$ $g(x)$ ، لهما نفس مجال التّعريف المتماثل حول المحور x ، هو دالّة زوجيّة.

برهان:

يتحقّق: $f(x)=f(-x)$ ، $g(x)=g(-x)$ (صفة الدّالّة الزّوجيّة).

نُشير $h(x)=f(x)+g(x)$

نحصل على $h(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=h(x)$

أي يتحقّق $h(-x)=h(x)$ ولذا $h(x)$ هي دالّة زوجيّة. (**وهو المطلوب**)

(2) نبرهن أنّ حاصل ضرب **دالّتيْن فرديّتيْن** $b(x)$ ، $a(x)$ ، لهما نفس مجال التّعريف المتماثل حول المحور x ، هو دالّة زوجيّة.

برهان:

يتحقّق $b(-x)=-b(x)$ ، $a(-x)=-a(x)$ (صفة الدّالّة الفرديّة).

نُشير $h(x)=a(x)\cdot b(x)$

نحصل على $h(-x)=a(-x)\cdot b(-x)=-a(x)\cdot[-b(x)]=a(x)\cdot b(x)=h(x)$

أي، يتحقّق $h(-x)=h(x)$ ولذا $h(x)$ هي دالّة زوجيّة. (**وهو المطلوب.**)

تمارين للعمل الذّاتيّ

(1) معطاةٌ الدّالّة $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$.

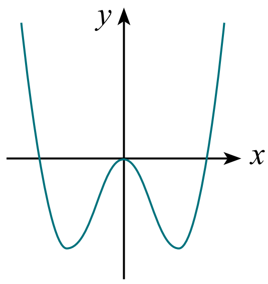
(أ) أكملوا جدول القيم التّالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$									

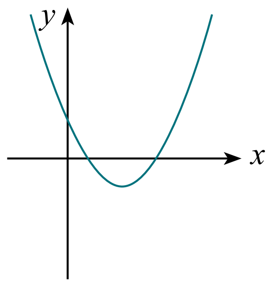
(ب) هل الدّالّة $f(x)$ هي دالّة زوجيّة، دالّة فرديّة أم دالّة لا زوجيّة ولا فرديّة ؟

(2) تمعّنوا في الرّسوم **(أ)** – **(و)** وحدّدوا أيّها يمثّل دالّة زوجيّة، أيّها يمثّل دالّة فرديّة، وأيّها يمثّل دالّة لا زوجيّة ولا فرديّة.

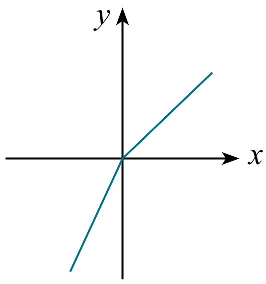
(أ)



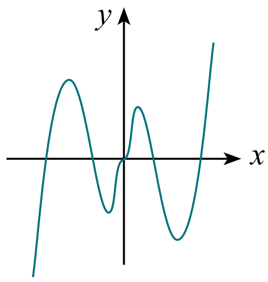
(ب)



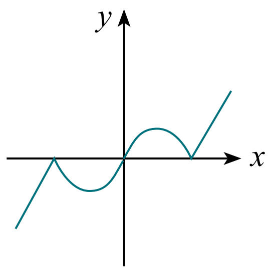
(ج)



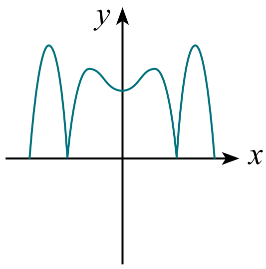
(د)



(هـ)



(و)

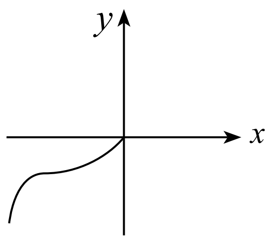


(3) إنسخوا الرّسوم التّالية في دفاتركم ونفّذوا المَهمّتَيْن الآتيتَيْن:

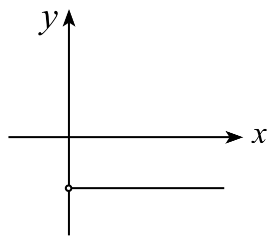
① أكملوا الرّسم بحيث تحصلون مرّةً على رسمٍ بيانيٍّ يمثّل دالّة **زوجيّة**.

② أكملوا الرّسم مرّةً أخرى بحيث تحصلون على رسمٍ بيانيّ لدالّةٍ **فرديّة**.

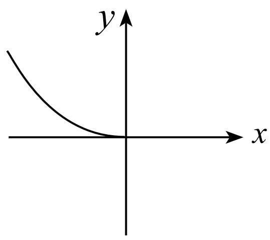
(أ)



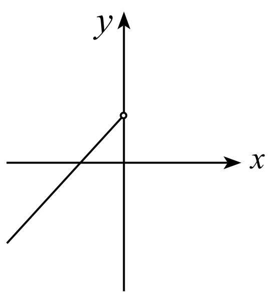
(ب)



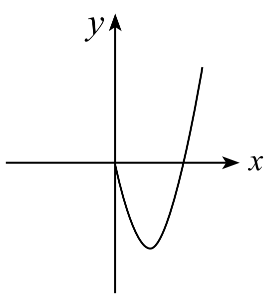
(ج)



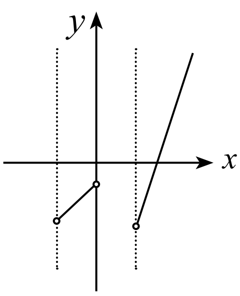
(د)



(هـ)



(و)



גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

(4) يمثّل الجدول التّالي الدّالّة $f(x)$.

x	7	5	2	−2	−5	−7
$f(x)$	−2		1		6	

(أ) أكملوا الجدول إذا علمتُم أنّ الدّالّة $f(x)$ هي دالّة زوجيّة.

(ب) أكملوا الجدول إذا علمتُم أنّ الدّالّة $f(x)$ هي دالّة فرديّة.

(5) بيّنوا أنّ كلّ واحدة من الدّوالّ في البنود **(أ)** – **(د)** هي دالّة **زوجيّة**.

(أ) $f(x)=x^2$ (ب) $f(x)=x^4-3x^2+6$

(ج) $f(x)=(x^2-1)^2$ ★ (د) $f(x)=(x-1)^3-(x+1)^3$

(6) بيّنوا أنّ كلّ واحدة من الدّوالّ في البنود **(أ)** – **(د)** هي دالّة **فرديّة**.

(أ) $f(x)=x^3$ (ج) $f(x)=x^5+3x$

(د) $f(x)=-x^5-2x^3+x$ (هـ) $f(x)=(x^3-x)^3$

(7) بيّنوا أنّ كلّ واحدة من الدّوالّ في البندَيْن **(أ)** – **(ب)** هي دالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة.

إرشاد: أعطوا مثالًا مُضادًّا يبيّن أنّ الدّالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة.

(أ) $f(x)=x^2+3x$ (ب) $f(x)=(x-3)^2$

(8) صنّفوا الدّوالّ التّالية إلى دوالّ زوجيّة / دوالّ فرديّة / دوالّ ليست زوجيّة وليست فرديّة.

(أ) $f(x)=(x-1)^3+(x+1)^3$ (ب) $f(x)=(x^3-x)^2$ (ج) $f(x)=-x^3-6$

(د) $f(x)=2x^2-7$ (هـ) $f(x)=x^2-(x-2)^2$ (و) $f(x)=2x^3-5x$

(9) $f(x)$ هي دالّة متّصلة معرّفة في المجال $-8\le x\le 6$. معطى أنّ:

- $f(-4)=f(0)=f(3)=0$.
- الدّالّة موجبة في المجال: $-8\le x<-4$.
- الدّالّة سالبة في المجال: $-4<x<0$.
- للدّالّة نقطة قيمةٍ عُظمى مطلقة في النّقطة: $(-6,9)$.
- للدّالّة نقطة قيمةٍ صُغرى مطلقة في النّقطة: $(6,-6)$.

(أ) إشرحوا لماذا الدّالّة $f(x)$ ليست دالّة زوجيّة وليست دالّة فرديّة.

(ب) إستنادًا إلى المعطيات، أرسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا ممكنًا للخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$. هل الرّسم وحيد ؟

(10) معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في المجال $x \geq -8$. معلومٌ أنّ الدّالّة متّصلة.

(أ) معطى أنّ النّقطتَيْن الصّفريَّتَيْن الوحيدتَيْن للدّالّة هما: $x_1 = -5$ ، $x_2 = 1$.
ومعلومٌ أيضًا أنّ: $f(-8) < 0$ ، $f(-2) > 0$ ، $f(3) < 0$.
أُرسموا رسمًا تقريبيًّا ممكنًا للخطّ البيانيّ للدّالّة، واشرحوا لماذا $f(x)$ هي دالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة.

(ب) أُكتبوا مجالات موجبيّة وسالبيّة الدّالّة $f(x)$ بحسب الرّسم التّقريبيّ الذي رسمتموه.

(ج) بحسب الرّسم التّقريبيّ الذي رسمتموه، حدّدوا هل تحصل الدّالّة على قيمةٍ عُظمى أم صُغرى في $x = -8$.

(د) هل يوجد للدّالّة التي رسمتموها نقاطٌ قصوى مطلقة أم لا ؟

(11) معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة لكلّ x . معلومٌ أنّ الدّالّة متّصلة.

(أ) معطى أنّ النّقطتَيْن الصّفريَّتَيْن الوحيدتَيْن للدّالّة هما: $x_1 = 2$ ، $x_2 = 5$.
ومعلومٌ أيضًا أنّ: $f(12) > 0$ ، $f(3) < 0$.
أُرسموا رسمًا تقريبيًّا ممكنًا للخطّ البيانيّ للدّالّة، واشرحوا لماذا $f(x)$ هي دالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة.

(ب) أُكتبوا مجالات موجبيّة وسالبيّة الدّالّة $f(x)$ بحسب الرّسم التّقريبيّ الذي رسمتموه.

(ج) بحسب الرّسم التّقريبيّ الذي رسمتموه، حدّدوا هل الدّالّة تصاعديّة أم تنازليّة في النّقطتَيْن: $x = 2$ وَ $x = 12$.

(د) هل يوجد للدّالّة التي رسمتموها نقاطٌ قصوى مطلقة ؟

(12) معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة في القطعة $-5 \leq x \leq 9$. معلومٌ أنّ الدّالّة متّصلة.
مجالا **تصاعد** الدّالّة في القطعة هما: $4 < x < 7$, $-5 \leq x < -2$.
معطى أنّ فيما تبقّى من القطعة **الدّالّة تنازليّة**.

(أ) أُكتبوا مجالات تصاعد الدّالّة.

(ب) أُكتبوا الإحداثيّات x للنّقاط القصوى للدّالّة وحدّدوا نوع القيمة القصوى في كلٍّ منها.

(ج) أُرسموا رسمًا تقريبيًّا ممكنًا للخطّ البيانيّ للدّالّة، واشرحوا لماذا $f(x)$ هي دالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة.

(د) بحسب الرّسم التّقريبيّ الذي رسمتموه، حدّدوا كم نقطةً صفريّةً يوجد للدّالّة في القطعة المعطاة.

(13) معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة لكلّ x . معلومٌ أنّ الدّالّة متّصلة.
مجالا **تنازل** الدّالّة هما: $5 < x < 9$ ، $13 < x < 18$.
معطى أنّه فيما تبقّى من الشّعاع **الدّالّة تصاعديّة**.

(أ) أُكتبوا مجالات تصاعد الدّالّة.

(ب) أُكتبوا الإحداثيّات x للنّقاط القصوى للدّالّة وحدّدوا نوع القيمة القصوى في كلٍّ منها.

(ج) أُرسموا رسمًا تقريبيًّا ممكنًا للخطّ البيانيّ للدّالّة، واشرحوا لماذا $f(x)$ هي دالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة.

(د) بحسب الرّسم التّقريبيّ الذي رسمتموه، حدّدوا كم نقطةً صفريّةً يوجد للدّالّة.

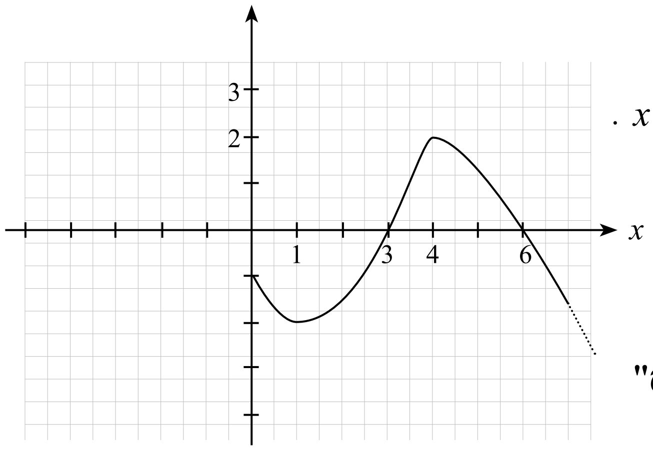
(هـ) بحسب الرّسم التّقريبيّ الذي رسمتموه، حدّدوا هل يوجد للدّالّة قيمة صُغرى مطلقة.

(14) معطاةٌ الدّالّة $f(x)$ المعرّفة لكلّ x . معطى أنّ الدّالّة متّصلة. تحصل الدّالّة على نهاية صُغرى في النّقطة $6 =$.

(أ) أُرسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا ممكنًا للدّالّة إذا عُلِمَ أنّ الدّالّة زوجيّة ونقطتها الصّفريّة الوحيدة تقع في النّقطة التي فيها $x = 0$. بحسب الرّسم التّقريبيّ الذي رسمتموه حدّدوا كم نقطةً قصوى يوجد للدّالّة في القطعة المعطاة.

(ب) أُرسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا ممكنًا للدّالّة إذا أُعطِيَ أنّ النّقطتَيْن الصّفريّتَيْن الوحيدتَيْن للدّالّة هما النّقطتان: $x = -7$ ، $x = 1$. إشرحوا لماذا $f(x)$ هي دالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة وبحسب الرّسم التّقريبيّ الذي رسمتموه حدّدوا كم نقطة قصوى يوجد للدّالّة.

ملاحظة: لا توجد علاقة بين البند (أ) والبند (ب).



(15) الدّالّة $f(x)$ معرّفة لكلّ x ، مُتّصلة وزوجيّة.
الرّسم البيانيّ أمامكم يصف خطّها البيانيّ في المجال $x \geq 0$.
في النّقطة التي فيها $x = 1$ للدّالّة نقطة قيمة صُغرى،
وفي النّقطة التي فيها $x = 4$ للدّالّة نقطة قيمة عُظمى.

(أ) أكملوا في دفاتركم الخطّ البيانيّ للدّالّة بالنّسبة لِـ $x < 0$.

في البنود (ب) - (ز) سجّلوا **"صحيح"** / **"غير صحيح"** واشرحوا جوابكم.

(ب) الدّالّة موجبة في المجالَيْن: $3 < x < 6$, $-6 < x < -3$.

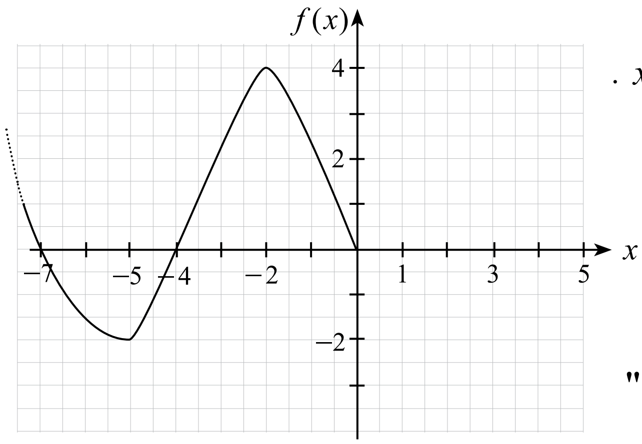
(ج) في النّقطة التي فيها $x = -1$ للدّالّة نقطة قيمة عُظمى.

(د) $(-4,-2.5)$ هي نقطة تقع على الخطّ البيانيّ للدّالّة.

(هـ) للدّالّة نقطتا قيمة عُظمى.

(و) الدّالّة تنازليّة في المجالات: $x > 4$, $-1 < x < 1$, $x < -4$.

(ز) المستقيم $y = 2$ يقطع الخطّ البيانيّ للدّالّة في 4 نقاط.



(16) الدّالّة $f(x)$ معرّفة لكلّ x ، مُتّصلة وفرديّة.
الرّسم البيانيّ أمامكم يصف خطّها البيانيّ في المجال $x \leq 0$.
في النّقطة التي فيها $x = -2$ للدّالّة نقطة قيمة عُظمى
وفي النّقطة التي فيها $x = -5$ للدّالّة نقطة قيمة صُغرى.

(أ) أكملوا في دفاتركم الخطّ البيانيّ للدّالّة بالنّسبة لِـ $x > 0$.

في البنود (ب) - (ز) سجّلوا **"صحيح"** / **"غير صحيح"** واشرحوا جوابكم.

(ب) الدّالّة سالبة في المجالات: $x > 7$, $0 < x < 4$, $-7 < x < -4$.

(ج) في النّقطة التي فيها $x = 2$ للدّالّة نقطة قيمة عُظمى.

(د) $(2,-4)$ هي نقطة تقع على الخطّ البيانيّ للدّالّة.

(هـ) للدّالّة 4 نقاط قصوى.

(و) الدّالّة تصاعديّة في المجالَيْن: $2 < x < 5$, $-5 < x < -2$.

(ز) المستقيم الذي معادلته $y = 1$ يقطع الخطّ البيانيّ للدّالّة في 4 نقاط.

أجوبة نهائيّة

(1) (أ)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-24	-10	0	6	8	6	0	-10	-24

(ب) دالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة.

(2) (أ) زوجيّة. (ب) ليست زوجيّة وليست فرديّة.

(ج) ليست زوجيّة وليست فرديّة. (د) فرديّة.

(هـ) فرديّة. (و) زوجيّة.

(4) (أ)

x	7	5	2	-2	-5	-7
$f(x)$	-2	6	1	1	6	-2

(ب)

x	7	5	2	-2	-5	-7
$f(x)$	-2	-6	1	-1	6	2

(5) يتحقّق في كلّ البنود $f(-x)=f(x)$ والدّالّة معرّفة لكلّ x (مجال متماثل بالنّسبة لـ $x=0$).

(6) يتحقّق في كلّ البنود $f(-x)=-f(x)$ والدّالّة معرّفة لكلّ x (مجال متماثل بالنّسبة لـ $x=0$).

(7) (أ) مثال: $f(1)=4\ ,\ f(-1)=-2$

(ب) مثال: $f(1)=4\ ,\ f(-1)=16$

(8) زوجيّة: (ب)، (د). فرديّة: (أ)، (و). ليست زوجيّة وليست فرديّة: (ج)، (هـ).

(10) (ب) موجبة: $-5<x<1$ ، سالبة: $x>1\ ,\ -8\le x<-5$

(12) (أ) $7<x\le 9\ ,\ -2<x<4$ (ب) $x_{\max}=-2\,,7\ \ ,\ \ x_{\min}=-5\,,4\,,9$

(13) (أ) $x>18\ ,\ 9<x<13\ ,\ x<5$ (ب) $x_{\max}=5\,,13\ \ ,\ \ x_{\min}=9\,,18$

(15) (ب) صحيح. (ج) غير صحيح. (د) غير صحيح.

(هـ) غير صحيح. (و) غير صحيح. (ز) غير صحيح.

(16) (ب) صحيح. (ج) غير صحيح. (د) صحيح.

(هـ) صحيح. (و) صحيح. (ز) غير صحيح.

الفصل 2: عائلات دوال

هذا الفصل هو بمثابة قاعدةٍ أساسيّة للموضوعَيْن: الهندسة التّحليليّة وحساب التّفاضل.

أ. الدّالّة الخطّيّة: مُراجعة

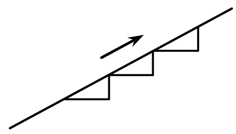
سنُجري فيما يلي مُراجعة على مواضيع كنّا قد تعلّمناها في المرحلة الإعداديّة بموضوع الدّالّة الخطّيّة.
التّمرُّن والتّطبيق في هذا الموضوع سيظهر في نِطاق الهندسة التّحليليّة وحساب التّفاضل.

معادلة صريحة للخطّ المستقيم ومعنى مصطلح الميل

الدّالّة $f(x)=\mathrm{m}x+\mathrm{b}$ هي دالّة من الدّرجة الأولى.
وصفها البيانيّ هو خطٌّ مستقيم ولذا تُسمّى أيضًا الدّالّة الخطّيّة.

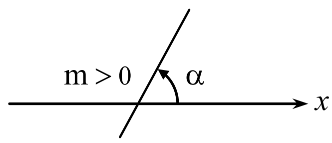
المعادلة الصّريحة للخطّ المستقيم هي من الصّورة $y=\mathrm{m}x+\mathrm{b}$.
البارامتر m يُسمّى **ميل المستقيم** .
البارامتر b يُسمّى **قاطع المستقيم** أو **الحدّ الحرّ للمعادلة** وهو يُحدّد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور y، لأنّه إذا عوّضنا $x=0$ في المعادلة $y=\mathrm{m}x+\mathrm{b}$ سنحصل على $y=\mathrm{b}$ أي، يمرّ المستقيم عبر النّقطة $(0,\mathrm{b})$.

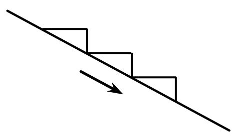
إشارة m تُحدّد هل المستقيم تصاعديّ أم تنازليّ.



الميل: $\mathrm{m}>0$
مستقيم ميله موجب (مستقيم تصاعديّ)

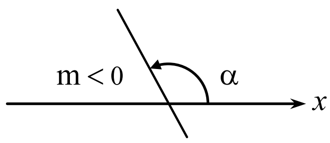
عندما يكون الميل **موجبًا** $(\mathrm{m}>0)$، يُكوّن المستقيم **زاويةً حادّة** مع الاتّجاه الموجب للمحور x
(أُنظروا الرّسم)





الميل: $\mathrm{m}<0$
مستقيم ميله سالب (مستقيم تنازليّ)

عندما يكون الميل **سالبًا** $(\mathrm{m}<0)$، يكوّن المستقيم **زاويةً منفرجةً** مع الاتّجاه الموجب للمحور x
(أُنظروا الرّسم).



تلائم كلّ ميلٍ معطًى m زاوية حادّة واحدة ووحيدة α ويلائم كلّ زاوية معطاة $\alpha\neq 90°$ ميلٌ واحدٌ ووحيدٌ m .
إذا كان $\mathrm{m}=0$ تنتج المعادلة $y=\mathrm{b}$ التي تُمثّل دالّة ثابتة خطُّها البيانيّ هو **خطٌّ مستقيمٌ موازٍ للمحور x** .

גרסה מיוחדת - לתלמידים 18/10/2023

ما هو معنى ميل الخطّ المستقيم ؟

مَهمّة بحث محوسبة: مستقيمات مع ميولٍ مختلفة

معطاةٌ الدّوالّ الخطّيّة التّالية: $y = 3x + 1$ $y = -2x - 3$ $y = x + 4$

$y = -4x$ $y = 2x - 1$ $y = -0.5x + 2$

إِستعينوا بالبرمجة البيانيّة DESMOS (تعليمات لتطبيقها يمكنكم إيجادها في المُلحق في نهاية الكتاب في الصّفحة 306):

اختاروا ثلاث دوال من بين الدّوال المعطاة بحيث تكون **ميولها موجبة**، وارسموا خطوطها البيانيّة في هيئة محاور.

(أ) ما المشترك وما المختلف بين الخطوط البيانيّة التي رسمتموها ؟

(ب) ما العلاقة بين حِدّة انحدار المستقيم وبين ميله (m) عندما يكون الميل موجبًا ؟

امحوا لوحة الرّسم وانتقلوا إلى البنود التّالية:

(ج) اختاروا ثلاث دوال من بين الدّوال المعطاة بحيث تكون **ميولها سالبة**، وارسموا خطوطها البيانيّة في هيئة محاور.

(د) ما المشترك وما المختلف بين الخطوط البيانيّة التي رسمتموها ؟

(هـ) ما العلاقة بين حِدّة انحدار المستقيم وبين ميله (m) عندما يكون الميل سالبًا ؟

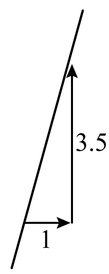
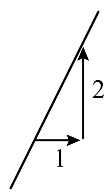
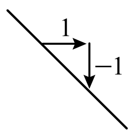
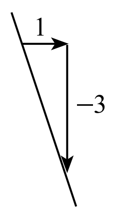
(و) غيّروا الميل في الدّوالّ الثّلاث كما يحلو لكم وافحصوا كيف يؤثّر التّغيير على كلّ مستقيم.

(ز) أكتبوا بكلماتكم ما هو معنى الميل m في الدّالّة الخطّيّة بالنّسبة للمستقيم الذي يصفها ؟

الميل يمثّل التّغيير في قيمة الدّالّة الخطّيّة $f(x) = mx + b$ (أو التّغيير في المتغيّر y في معادلة الخطّ المستقيم) الذي ينتج من زيادة قيمة x بوحدةٍ واحدة.

المقدار m يُحدّد ارتفاع "الدّرجة"، أي كم نرتفع أو ننخفض إثر زيادة وحدةٍ واحدة بقيمة x .

أي، بالنّسبة لِـ $m > 0$ كلّما ازداد الميل m كان انحدار المستقيم أكبر، وبالنّسبة لِـ $m < 0$ كلّما صَغُرَ الميل m كان انحدار المستقيم أكبر.

مستقيم ميله $m = 3.5$	مستقيم ميله $m = 2$	مستقيم ميله $m = -1$	مستقيم ميله $m = -3$
			

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

مستقيمات متوازية

مَهمّة بحث مُحوسبة: مستقيمات لها نفس الميل

معطاةٌ الدّوالّ التّالية: $y=-2x-1$ $\quad y=-0.5x+3$ $\quad y=-2x+2$

إستعينوا بالتّطبيق البيانيّ DESMOS وارسموا خطوطها البيانيّة في هيئة محاور.

(تعليمات لتطبيقها يمكنكم إيجادها في المُلحق في نهاية الكتاب في الصّفحة 306).

(أ) ما المشترك وما المختلف بين الخطوط البيانيّة التي رسمتموها ؟

(ب) اثنتان من الدّوالّ الثّلاث المعطاة موصوفتان بواسطة مستقيمَيْن متوازيَيْن. أيّهما، وما المشترك بينهما ؟

(ج) أُكتبوا قاعدة تناظر لدالّة أخرى بحيث يكون الخطّ البيانيّ الذي يصفها موازيًا للمستقيم الثّالث، وارسموها.

(د) اختاروا مستقيمَيْن متوازيَيْن وغيّروا في الدّالّتَيْن اللّتَيْن تمثّلهما معطًى واحدًا بحيث يتّحدا. ماذا غيّرتم ؟

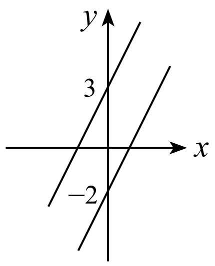
(هـ) سجّلوا معادلتَيْن تصفان مستقيمَيْن مختلفَيْن ميلهما يساوي 0 ، وارسموهما في هيئة محاور.

(و) ما المشترك بين كلّ المستقيمات التي ميلها 0 .

(ز) خمِّنوا، كيف ستكون صورة مستقيمٍ موازٍ للمحور y .

صفة المستقيمات المتوازية: للمستقيمات المتوازية **نفس الميل m** .

من هنا، المستقيمان: $y=m_1x+b_1$ ، $y=m_2x+b_2$ ($b_1\neq b_2$) يتوازيان إذا تحقّق $m_1=m_2$.



مثال:

معطى في الرّسم في الجهة اليسرى مستقيمان معادلتاهما: $y=2x+3$ وَ $y=2x-2$

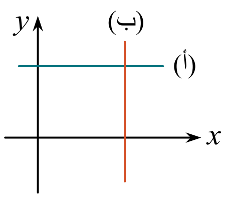
$m_1=m_2=2$ ، $b_1\neq b_2$

أي أنّ ميلَي المستقيمَيْن في الرّسم متساويان ويساويان 2 .

لذا فهما مستقيمان متوازيان.

عندما يتحقّق أيضًا $b_1=b_2$ يكون المستقيمان متّحدَيْن.

مستقيمات موازية للمحورَيْن:



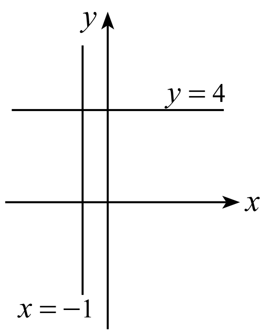
(أ) معادلة **المستقيم الموازي للمحور x**: $y=\text{const}$ ($\text{const}=$ عدد ثابت).

ميل مستقيمٍ كهذا هو 0 (أُنظروا المستقيم (أ) في الرّسم).

(ب) معادلة **المستقيم الموازي للمحور y**: $x=\text{const}$.

ميل مستقيمٍ كهذا ليس معرّفًا (أنظروا المستقيم (ب) في الرّسم).

مستقيمٌ كهذا **لا يصف** دالّة.



مثال:

معطى في الرّسم مستقيمان معادلتاهما هما: $y=4$ وَ $x=-1$.

(ج) حالات خاصّة:

المحور x هو المستقيم الذي معادلته $y=0$.

(أي، في مثل هذه الحالة يتّحد المستقيم مع المحور x).

المحور y هو المستقيم الذي معادلته هي $x=0$.

(أي، في مثل هذه الحالة يتّحد المستقيم مع المحور y).

هذا المستقيم، **لا يصف** دالّة.

نقاط التّقاطع بين مستقيمٍ والمحورَيْن وبين مستقيمَيْن

كي نجد إحداثيّات نقاط التّقاطع بين خطَّيْن بيانيَّيْن لدالّتَيْن أيًّا كانتا وتحديدًا، كي نجد إحداثيّات نقطة التّقاطع بين مستقيمَيْن، يتوجّب علينا حلّ هيئة معادلتَيْن (كلّ معادلة تُمثّل دالّة).

حالة خاصّة وشائعة جدًّا هي إيجاد نقاط التّقاطع بين خطٍّ بيانيٍّ لدالّةٍ مع المحورَيْن.

- كي نجد إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحور x نعوّض في معادلة الدّالّة $y=0$ ونجد الإحداثيّات x لهذه النّقاط.
  (في حالة الدّالّة الخطّيّة، التي وصفُها البيانيّ هو خطٌّ مستقيم، توجد على الأكثر نقطة تقاطع واحدة مع المحور x).
- كي نجد إحداثيّات نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحور y نعوّض في معادلة الدّالّة $x=0$ ونجد الإحداثيّ y لهذه النّقطة.

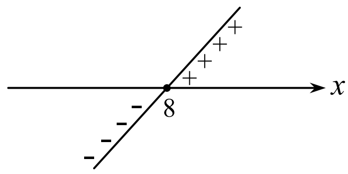
المجال الموجب والمجال السّالب للمستقيم

نحدّد المجالَيْن الموجب والسّالب للمستقيم بحسب نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x (إذا وُجِدَت كهذه).

<u>مثال:</u>

لنفترض أنّ المستقيم يقطع المحور x في النّقطة التي فيها $x=8$.

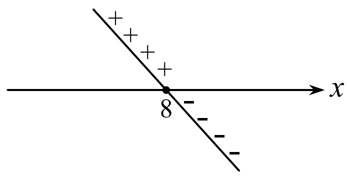
إذا كان المستقيم **تصاعديًّا**، فسيبدو الخطّ البيانيّ هكذا:



وعندها يكون المجال الموجب للمستقيم هو: $x>8$

ومجاله السّالب هو: $x<8$.

إذا كان المستقيم **تنازليًّا**، فسيبدو الخطّ البيانيّ هكذا:



وعندها يكون المجال الموجب للمستقيم هو: $x<8$

ومجاله السّالب هو: $x>8$.

* * *

<u>تمارين للعمل الذّاتيّ</u>

(1) سجّلوا **"صحيح"** / **"غير صحيح"** .

إذا سجّلتم **"صحيح"** - اِشرحوا لماذا، إذا سجّلتم **"غير صحيح"** - أعطوا مثالًا مُضادًّا.

(أ) المعادلة $3x-5y+12=0$ تصف دالّة خطّيّة.

(ب) المعادلة $-y=2x+5$ تمثّل دالّة تصاعديّة.

(ج) الخطّ البيانيّ للدّالّة $2y=-5$ هو مستقيمٌ موازٍ للمحور x .

(د) ميل المستقيم الذي معادلته $2x+y=6$ هو 2 .

(هـ) المستقيمان اللذان معادلتاهما $3x-2y+6=0$ وَ $y=1.5x-4$ هما متوازيان.

(2) معطاةٌ الدّالّة $y=-x+5$.

(أ) أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة واشرحوا لماذا هو مستقيم.

(ب) جدوا المجال الذي فيه الدّالّة موجبة والمجال الذي فيه الدّالّة سالبة.

(ج) ما هي معادلة المستقيم الموازي للمستقيم المعطى والذي يمرّ عبر نقطة أصل المحاور ؟

(3) جدوا نقطة تقاطع المستقيمَيْن اللذَيْن معادلتاهما: $y=2x-6$ وَ $y=-x+3$.

(4) سجّلوا بالنّسبة للمستقيم الذي معادلته هي $y=\frac{2}{3}x+6$ المجال الموجب والمجال السّالب.

(5) معطى المستقيم الذي معادلته $3x-2y=12$.

(أ) جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع المستقيم مع المحورَيْن.

(ب) أُرسموا المستقيم.

(ج) جدوا المجال الذي فيه المستقيم موجب والمجال الذي فيه المستقيم سالب.

(6) معطاةٌ الدّالّة $\frac{3}{2}x-4y=24$.

(أ) هل الخطّ البيانيّ للدّالّة هو مستقيم ؟

(ب) سجّلوا الدّالّة بالصّورة الصّريحة.

(ج) جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع المستقيم مع المحورَيْن.

(7) معطى الدّالّتان: $y=\frac{1}{2}x-4$, $y=-2x+1$.

(أ) هل الخطّان البيانيّان للدّالّتيْن هما مستقيمان ؟ أُرسموهما في هيئة محاور واحدة.

(ب) ما هو ميل كلّ واحدٍ من هذين المستقيمَيْن ؟

(ج) جدوا إحداثيّات نقطة تقاطع هذين المستقيمَيْن.

(8) سجّلوا **"صحيح"** / **"غير صحيح"** واشرحوا جوابكم.

(أ) المستقيمان اللذان معادلتاهما $4x+2y=10$, $6x+3y=18$ هما متوازيان.

(ب) المستقيمان اللذان معادلتاهما $2x-3y=-15$, $4x-6y+30=0$ هما مُتّحدان.

(ج) المستقيمان اللذان معادلتاهما $2x-3y=5$, $2x+3y=5$ هما متوازيان.

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) صحيح. (ب) غير صحيح. (ج) صحيح. (د) غير صحيح. (هـ) صحيح.

(2) (ب) المجال الموجب: $x<5$ ، المجال السّالب: $x>5$ (ج) $y=-x$

(3) $(3,0)$

(4) مجال الموجبيّة: $x>-9$ ، مجال السّالبيّة: $x<-9$.

(5) (أ) $(4,0)$, $(0,-6)$ (ج) المستقيم موجب في المجال: $x>4$ ، المستقيم سالب في المجال: $x<4$

(6) (أ) نعم. (ب) $y=\frac{3}{8}x-6$ (ج) $(0,-6)$, $(16,0)$

(7) (أ) نعم. (ب) $m_1=\frac{1}{2}$, $m_2=-2$ (ج) $(2,-3)$

(8) (أ) صحيح. (ب) صحيح. (ج) غير صحيح.

ب. الدّالّة التّربيعيّة: مُراجعة

سنُجري مراجعة على موضوع الدّالّة التّربيعيّة التي كنّا قد درسناها في المرحلة الإعداديّة.
التّمرّن والتّطبيق في هذا الموضوع والدّمج بين الدّالّة الخطّيّة والدّالّة التّربيعيّة ستظهر في نطاق موضوعَي الهندسة التّحليليّة وحساب التّفاضل.

الدّالّة $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ هي دالّة من الدّرجة الثّانية، وتُسمّى **الدّالّة التّربيعيّة** (x من الدّرجة الثّانية أو x تربيع) ، ووصفها البيانيّ يُسمّى **القطع المكافئ.**

صفات الدّالّة التّربيعيّة $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

(1) شكل الخطّ البيانيّ للدّالّة:

- إذا كان $a > 0$ ، نحصل على قطعٍ مكافئٍ له نقطة قيمةٍ **صُغرى** من الصّورة:  .
  مثال: $y = 3x^2 - 5x - 8$
- إذا كان $a < 0$ ، نحصل على قطعٍ مكافئٍ له نقطة **قيمةٍ عُظمى** من الصّورة:: 
  مثال: $y = -2x^2 + 8x + 5$

(2) أ. **عدد نقاط تقاطع القطع المكافئ مع المحور x:**

الإحداثيّ y لكلّ النّقاط التي تقع على المحور x هو **صفر**.
لذا، كي نجد إحداثيّات نقاط تقاطع القطع المكافئ $y = ax^2 + bx + c$ مع المحور x،
نعوّض $y = 0$ ونحصل على المعادلة التّربيعيّة: $ax^2 + bx + c = 0$.

حلّ المعادلة التّربيعيّة يتمّ بواسطة **قانون الجذور:** $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

جذور المعادلة التّربيعيّة (إذا وُجِدَت) هي الإحداثيّات x **لنقاط تقاطع القطع المكافئ مع المحور x** . أي، عدد الحلول (الحقيقيّة) في المعادلة التّربيعيّة مساوٍ لعدد نقاط تقاطع القطع المكافئ مع المحور x . يتعلّق عدد الحلول بقيمة التّعبير الموجود تحت الجذر في قانون الجذور:
$b^2 - 4ac$ يُسمّى هذا التّعبير **ديسكرمننتا** ونرمز له بالحرف Δ .
أي: $\Delta = b^2 - 4ac$.
بما أنّه يظهر في قانون الجذور التّعبير $\sqrt{\Delta}$ ، فإنّ **عدد الجذور الحقيقيّة** للمعادلة التّربيعيّة يتعلّق بقيمة الديسكرمننتا Δ وذلك على النّحو التّالي:

- إذا كان $\Delta > 0$ عندها يكون للمعادلة التّربيعيّة **جذران حقيقيّان مختلفان** والقطع المكافئ الملائم يقطع المحور x **في نقطتَيْن** مختلفتَيْن. **مثال:**

- إذا كان $\Delta = 0$ عندها يكون للمعادلة التّربيعيّة **جذرٌ حقيقيٌّ واحد** (يمكن القول إنّ الجذريْن **متّحدان**). والقطع المكافئ المناسب يلتقي مع المحور x في نقطة **واحدة** فقط، ونقول، إنّ القطع المكافئ يمسّ المحور x في هذه النّقطة. **مثال:**

- إذا كان $\Delta < 0$ عندها، **لا يكون** للمعادلة التّربيعيّة **جذورٌ حقيقيّة** وقطعها المكافئ المناسب **لا** يقطع المحور x بتاتًا. **مثال:**

ب. نقطة تقاطع القطع المكافئ مع المحور y :
نعوّض $x=0$ ونحصل على $y=c$.
أي أنّ إحداثيّات نقطة تقاطع القطع المكافئ مع المحور y هي $(0,c)$.

(3) المجالات التي فيها الدّالّة التّربيعيّة موجبة والتي فيها سالبة:
في النّقاط التي يقع فيها القطع المكافئ فوق المحور x نقول، إنّ الدّالّة التّربيعيّة (المناسبة للقطع المكافئ هذا) موجبة.
في النّقاط التي يقع فيها القطع المكافئ تحت المحور x نقول، إنّ الدّالّة التّربيعيّة (المناسبة للقطع المكافئ هذا) سالبة.
كي نجد المجالات التي فيها الدّالّة التّربيعيّة موجبة أو سالبة، نجد بدايةً نقاط تقاطعها مع المحور x (إذا وُجِدَت كهذه)، نرسم رسمًا تقريبيًّا للقطع المكافئ ونتحقّق بأيّ مجالٍ يكون قطعها المكافئ فوق المحور x وبأيّها يكون تحته.

(4) محور تماثل القطع المكافئ، مجال التّصاعد ومجال التّنازل :
القطع المكافئ متماثل بالنّسبة للمستقيم $x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=x_{\text{راس}}$.
هذا المستقيم الموازي للمحور y يُسمّى أيضًا محور تماثل القطع المكافئ.
معنى التّماثل: إذا "طوَينا" جزء القطع المكافئ المتواجد على يمين خطّ التّماثل، على طول خطّ التّماثل، فسيتّحد مع جزء القطع المكافئ المتواجد على يسار خطّ التّماثل.
كي نجد الإحداثيّ y لنقطة رأس القطع المكافئ، نعوّض الإحداثيّ x لنقطة الرّأس في الدّالّة التّربيعيّة ونحصل على الإحداثيّ y.

أ. القطع المكافئ **الذي رأسه قيمة صغرى**: مجال التّنازل: $x<x_{\text{راس}}$ ومجال التّصاعد $x>x_{\text{راس}}$.

ب. القطع المكافئ **الذي رأسه قيمة عظمى**: مجال التّنازل: $x>x_{\text{راس}}$ ومجال التّصاعد $x<x_{\text{راس}}$.

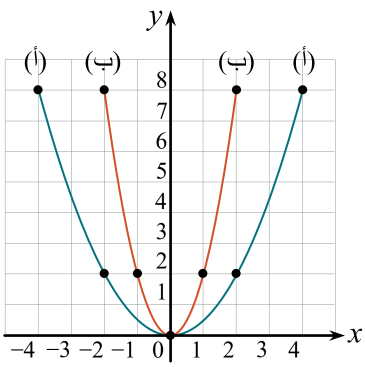
أمثلة محلولة

(1) أرسموا الخطّين البيانيّين للدّالّتَين: $y=\frac{1}{2}x^2$ ، $y=2x^2$.
كلّ واحدٍ من هذَين الخطّين هو قطعٌ مكافئ.

الحلّ:
في هذين القطعَيْن المكافئَين يقع الرّأس في النّقطة $(0,0)$ لأنّ $x_{\text{راس}}=-\frac{b}{2a}=0$.
بمساعدة بناء جدول قيم لكلّ دالّة، نحصل على نقاطٍ تقع على القطع المكافئ المناسب.

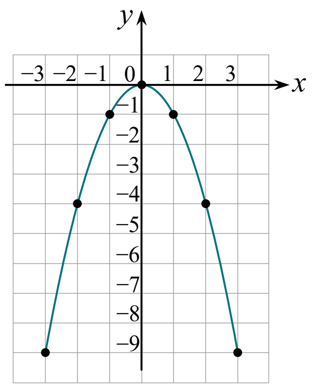
x	-4	-2	0	2	4
(أ) $y=\frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

x	-2	-1	0	1	2
(ب) $y=2x^2$	8	2	0	2	8



القطع المكافئ الضّيّق (ب) هو الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=2x^2$.
القطع المكافئ الواسع (أ) هو الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=\frac{1}{2}x^2$.

(2) أرسموا الآن الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=-x^2$.



الحلّ:

أيضًا في هذا المثال، يقع الرّأس في النّقطة $(0,0)$.

بواسطة بناء جدول قيم، نحصل على نقاطٍ أخرى تقع على القطع المكافئ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

رأس القطع المكافئ $y=-x^2$ هو النّقطة الأعلى للقطع المكافئ.

في هذه النّقطة، قيمة الإحداثيّ y للدّالّة هي الأكبر من بين كلّ قيم الإحداثيّات y الممكنة لجميع نقاط الدّالّة

لذا، في هذا المثال، النّقطة $(0,0)$ هي نقطة القيمة العظمى للدّالّة $y=-x^2$.

(3) معطاةٌ دالّة معادلتها $y=2x^2-5x+2$ (خطّها البيانيّ هو قطعٌ مكافئ).

(أ) ما هي إحداثيّات نقطة رأس القطع المكافئ ؟

(ب) ما هي إحداثيّات النّقطتَيْن الصّفريّتَيْن للدّالّة ؟

وما هي إحداثيّات نقطة تقاطع القطع المكافئ مع المحور y ؟

(ج) إستعينوا بالبندَيْن (أ) وَ (ب) وارسموا رسمًا تقريبيًّا للخطّ البيانيّ للدّالّة.

(د) ما هي معادلة خطّ تماثل القطع المكافئ ؟

(هـ) جدوا مجال تصاعد ومجال تنازل الدّالّة.

(و) جدوا المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والتي فيها سالبة.

الحلّ:

(أ)

$$x_{\text{راس}}=\frac{-b}{2a}=-\frac{-5}{2\cdot 2}=1.25$$

$$y_{\text{راس}}=2\cdot 1.25^2-5\cdot 1.25+2=-1.125$$

إحداثيّات رأس القطع المكافئ هي $(1.25,-1.125)$.

(ب)

$$y=0 \;\Rightarrow\; 2x^2-5x+2=0$$

حلّا المعادلة التّربيعيّة هما (إفحصوا !):

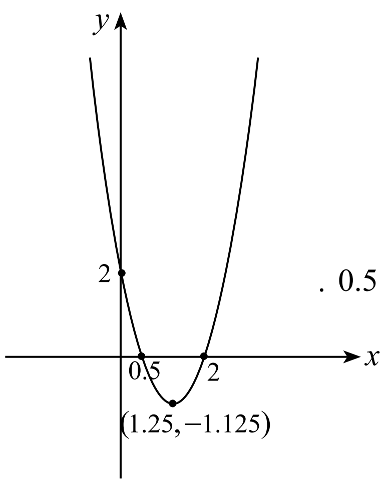
$$x_2=0.5 \quad , \quad x_1=2$$

النّقطتان الصّفريّتان للدّالّة هما: $(0.5,0)$, $(2,0)$

إحداثيّات نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحور y :

$$x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (0,2)$$

(ج) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.



(د) معادلة خطّ التّماثل: $x=x_{\text{راس}}$ أي: $x=1.25$.

(هـ) نستعين برسم البند (ج) :

مجال التّصاعد: $x>1.25$ ، ومجال التّنازل: $x<1.25$.

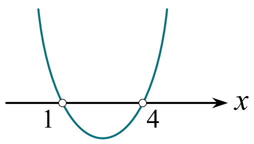
(و) نستعين مرّةً أخرى برسم البند (ج):

مجالا موجبيّة الدّالّة: $x>2$ ، $x<0.5$ ، ومجال سالبيّة الدّالّة: $0.5<x<2$.

أمثلة إضافيّة محلولة

(1) جدوا المجالات الموجبة والمجالات السّالبة للدّالّة $y = x^2 - 5x + 4$.

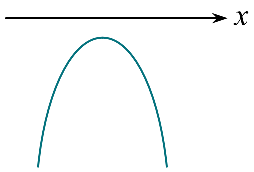
<u>الحلّ:</u> نحلّ المعادلة $x^2 - 5x + 4 = 0$ ونحصل على: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.
مُعامل x^2 موجب $(a = 1 > 0)$ ولذا، للقطع المكافئ **نقطة قيمةٍ صغرى**.
نرسم رسمًا تقريبيًّا للقطع المكافئ:



نلاحظ من خلال الرّسم أنّ الدّالّة موجبة في المجالَيْن: $x < 1$ أو $x > 4$,
وأنّ الدّالّة سالبة في المجال: $1 < x < 4$.

(2) جدوا المجالات التي فيها الدّالّة $y = -x^2 - 2x - 4$ موجبة والتي فيها سالبة.

<u>الحلّ:</u> للمعادلة $-x^2 - 2x - 4 = 0$ **لا توجد حلولٌ حقيقيّة**
(يتحقّق: $(\Delta = (-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-4) < 0)$ لذا، لا توجد نقاطٌ مشتركة بين القطع المكافئ والمحور x .
مُعامل x^2 سالب $(a = -1 < 0)$ لذا للقطع المكافئ **نقطة قيمةٍ عظمى**.
نرسم رسمًا تقريبيًّا للقطع المكافئ:

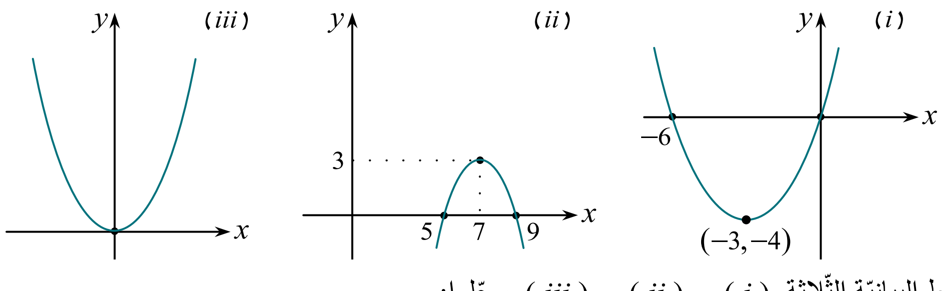


نلاحظ من خلال الرّسم أنّ الدّالّة سالبة لكلّ x (ولا توجد مجالات الدّالّة فيها موجبة).

* * *

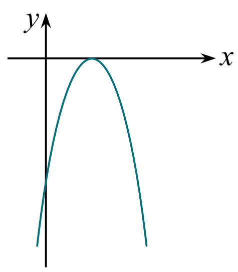
<u>تمارين للعمل الذّاتيّ</u>

(1) معطى ثلاثة قطوع مكافئة:



بالنّسبة لكلّ واحدٍ من الخطوط البيانيّة الثّلاثة (i) , (ii) , (iii) سجّلوا:
(أ) ما هي أكبر قيمة أو أصغر قيمة للدّالّة ؟
(ب) متى الدّالّة تصاعديّة ومتى الدّالّة تنازليّة ؟
(ج) ما هي المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والمجالات التي فيها الدّالّة سالبة ؟

(2) يظهر في الرّسم أمامكم الخطّ البيانيّ
للدّالّة $y = -x^2 + 6x - 9$.



(أ) جدوا إحداثيّات نقطتَي تقاطع الدّالّة مع المحورَيْن.
(ب) لأيّ قيم x الدّالّة المعطاة سالبة ؟
(ج) ما هي أكبر قيمة تحصُل عليها الدّالّة،
وبأيّ نقطةٍ تحصُل هذه القيمة ؟
(د) لأيّ قيم x الدّالّة تنازليّة ؟

بالنّسبة لكلّ واحدة من الدّوالّ **(3)** – **(10)** جدوا المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والمجالات التي فيها الدّالّة سالبة.
(ننصح بالاستعانة بالرّسم).

(3) $y = x^2 - 2x - 15$ **(4)** $y = -x^2 + 9x - 14$

(5) $y = -x^2 - 5x - 4$ **(6)** $y = -4x^2 + 28x - 49$

(7) $y = 2x^2 + 5x$ **(8)** $y = 4x^2 + 4x + 1$

(9) $y = -2x^2 + 4\frac{1}{2}$ **(10)** $y = -x^2 - 7$

(11) معطى قطعٌ مكافئ معادلته $y = x^2 - 6x + 5$.

(أ) جدوا إحداثيّات نقطتَي تقاطع القطع المكافئ مع المحور x .
(ب) جدوا المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والمجالات التي فيها الدّالّة سالبة.
(ج) جدوا معادلة محور تماثل القطع المكافئ.
(د) ما هي أصغر قيمة للدّالّة ؟
(هـ) أُرسموا القطع المكافئ المناسب للدّالّة.

(12) معطى قطعٌ مكافئ معادلته $y = -x^2 + x + 6$.

(أ) جدوا إحداثيّات نقطتَي تقاطع القطع المكافئ مع المحور x .
(ب) جدوا المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والمجالات التي فيها الدّالّة سالبة.
(ج) لأيّ قيم x الدّالّة تصاعديّة، ولأيّها الدّالّة تنازليّة ؟
(د) ما هي أكبر قيمة للدّالّة ؟
(هـ) أُرسموا القطع المكافئ المناسب للدّالّة.

(13) معطى القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2 + 6x + 9$.

(أ) جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع القطع المكافئ مع المحور x .
(ب) جدوا المجالات التي فيها الدّالّة موجبة والمجالات التي فيها الدّالّة سالبة.
(ج) لأيّ قيم x الدّالّة تصاعديّة، ولأيّها الدّالّة تنازليّة ؟
(د) ما هي أصغر قيمة للدّالّة ؟
(هـ) أُرسموا القطع المكافئ المناسب للدّالّة.

(14) معطى القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2 + 3x - 4$.

(أ) جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع القطع المكافئ مع المحورين.
(ب) لأيّ قيم x الدّالّة المعطاة موجبة ؟
(ج) سجّلوا قيمتَيْن لِـ x تكون الدّالّة المعطاة فيهما موجبة.
(د) أُرسموا القطع المكافئ المناسب للدّالّة.

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

أجوبة نهائيّة

(1) الأجوبة مرتّبة في الجدول التّالي:

بند		(i)	(ii)	(iii)
(أ)	قيمة قصوى:	Min: -4	Max: 3	Min: 0
(ب)	مجال التّصاعد:	$x>-3$	$x<7$	$x>0$
	مجال التّنازل:	$x<-3$	$x>7$	$x<0$
(ت)	الدّالّة موجبة في:	$x>0$ أو $x<-6$	$5<x<9$	$x\neq 0$
	الدّالّة سالبة في:	$-6<x<0$	$x>9$ أو $x<5$	لا يوجد

(2) (أ) $(0,-9)$ ، $(3,0)$ (ب) $x\neq 3$
(ج) أكبر قيمة هي 0 وتحصل في النّقطة: $(3,0)$.
(د) لكلّ $x>3$.

(3) **الدّالّة موجبة**: $x>5$ أو $x<-3$ **الدّالّة سالبة**: $-3<x<5$

(4) **الدّالّة موجبة**: $2<x<7$ **الدّالّة سالبة**: $x>7$ أو $x<2$

(5) **الدّالّة موجبة**: $-4<x<-1$ **الدّالّة سالبة**: $x>-1$ أو $x<-4$

(6) الدّالّة **سالبة** لكلّ $x\neq\frac{7}{2}$.

(7) **الدّالّة موجبة**: $x>0$ أو $x<-\frac{5}{2}$ **الدّالّة سالبة**: $-\frac{5}{2}<x<0$

(8) الدّالّة **موجبة** لكلّ $x\neq-\frac{1}{2}$.

(9) **الدّالّة موجبة**: $-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$ **الدّالّة سالبة**: $x>\frac{3}{2}$ أو $x<-\frac{3}{2}$

(10) الدّالّة **سالبة** لكلّ قيمة لِـ x .

(11) (أ) $(1,0)$ ، $(5,0)$
(ب) **الدّالّة موجبة**: $x>5$ أو $x<1$ ، **الدّالّة سالبة**: $1<x<5$
(ج) $x=3$ (د) $y_{\min}=-4$ (هـ) افحصوا مع المعلّم في الصّفّ.

(12) (أ) $(-2,0)$ ، $(3,0)$
(ب) **الدّالّة موجبة**: $-2<x<3$ ، **الدّالّة سالبة**: $x<-2$ أو $x>3$
(ج) مجال **التّصاعد**: $x<0.5$ ، مجال **التّنازل**: $x>0.5$
(د) $y_{\max}=6.25$ (هـ) افحصوا مع المعلّم في الصّفّ (أو بمساعدة تطبيق DESMOS).

(13) (أ) $(-3,0)$ (ب) **الدّالّة موجبة**: $x\neq-3$ ، **لا يوجد** مجال سالب.
(ج) مجال **التّصاعد**: $x>-3$ ، مجال **التّنازل**: $x<-3$
(د) $y_{\min}=0$ (هـ) افحصوا مع المعلّم في الصّفّ (أو بمساعدة تطبيق DESMOS).

(14) (أ) $(0,-4)$ ، $(1,0)$ ، $(-4,0)$
(ب) $x>1$ أو $x<-4$
(ج) مثال: $x=2$ ، $x=-5$
(د) افحصوا مع المعلّم في الصّفّ (أو بمساعدة تطبيق DESMOS).

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

ج. دالّة القوّة: $f(x)=x^n$

التّمرّن والتّطبيق في هذا الموضوع سيظهر في نطاق حساب التّفاضل.

تذكير ومراجعة لقوانين القوى، يمكنكم إيجادها في الصّفحات 266 - 268 في الملحق أ.

الخطوط البيانيّة لدالّة القوّة $f(x)=x^n$ بالنّسبة لِـ n طبيعيّ

نصف الخطوط البيانيّة لدوال من الصّورة $f(x)=x^n$ بالنّسبة لكلّ n طبيعيّ.

تُسمّى هذه الدّوالّ **دوال قوى**.

عند $n=1$ نحصل على: $y=x$ ، عند $n=2$ نحصل على $y=x^2$ وهكذا: $y=x^3$ ، $y=x^4$ وإلخ.

نميّز بين مجموعتَيْن في عائلة دوال القوى: دوال ذوات أُسسٍ زوجيّة ودوال ذوات أُسسٍ فرديّة.

دوال قوى ذوات قوّة زوجيّة

مهمّة بحث مُحوسبة: خطوط بيانيّة لدوال قوى زوجيّة

استعينوا بالتّطبيق البياني DESMOS لتنفيذ المهمّات التّالية:

(تعليمات لتطبيقها يمكنكم إيجادها في الملحق في نهاية الكتاب ابتداءً من الصّفحة 306)

(أ) أرسموا في نفس هيئة المحاور، 3 دوال قوى **مختلفة** من الصّورة $f(x)=x^n$ ، **أسُّها n** هو عددٌ طبيعيٌّ **زوجيٌّ** كما يحلو لكم.

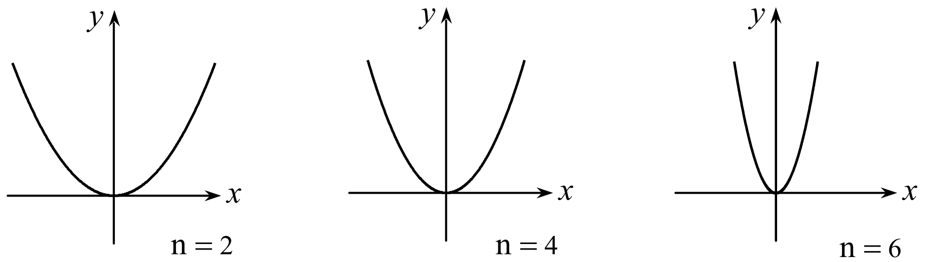
(ب) أيّ المميّزات التّالية تبقى ثابتة / مشتركة للخطوط البيانيّة الثّلاثة التي رسمتموها:

(1) مجال التّعريف (2) المجالات التي فيها الدّالّة موجبة / سالبة

(3) مجالات التّصاعد / التّنازل. (4) التّماثل

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

- كي نرسم الخطّ البيانيّ للدّالّة، يمكننا الاستعانة أيضًا بجدول قيم.
  على سبيل المثال $y=x^2$ (أنظروا الجدول في الجهة اليسرى):
- فيما يلي الرّسم البيانيّ لعدّة دوال قوى ذوات أُسسٍ زوجيّة.



n = 6, $y=x^6$ n = 4, $y=x^4$ n = 2, $y=x^2$

هذه الدّوال معرّفة لكلّ x ، ومن خلال النّظر إلى خطوطها البيانيّة يمكننا الملاحظة أنّ كلّ واحدة منها موجبة لكلّ $x\neq 0$ ($x=0$ هي النّقطة الصّفريّة الوحيدة للدّالّة).

كلّ واحدة من هذه الدّوال تصاعديّة لكلّ $x>0$ وتنازليّة لكلّ $x<0$.

بالإضافة، لدالّة القوّة التي أُسُّها n طبيعيّ وزوجيّ، توجد نقطة نهاية صُغرى في النّقطة $(0,0)$ وهي أيضًا نهاية صغرى مطلقة للدّالّة.

خطّها البيانيّ متماثل بالنّسبة للمحور y ، **ويمسّ** المحور x .

- دوال القوى التي أُسُّها n طبيعيّ وزوجيّ هي دوال **زوجيّة**.

برهان: $$f(x)=x^n \Rightarrow f(-x)=(-x)^n \underset{\text{لـ n زوجيّ}}{=} x^n=f(x)$$

أي يتحقّق $f(-x)=f(x)$ ولذا، فجميع دوال القوى من الصّورة $f(x)=x^n$ ، بحيث n طبيعيّ **وزوجيّ**، هي دوال **زوجيّة**. صفة دوال القوى هذه بحيث n طبيعيّ وزوجيّ هي مصدر الاسم: **"دالّة زوجيّة"**.

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

دوال قوى أُسُسُها فرديّة

مهمّة مُحوسبة: خطوط بيانيّة لدوال قوى فرديّة

استعينوا بالتّطبيق البيانيّ DESMOS لتنفيذ المهمّات التّالية:

(تعليمات لتطبيقها، يمكنكم إيجادها في الملحق في نهاية الكتاب ابتداءً من الصّفحة 306)

(أ) أرسموا في نفس هيئة المحاور، 3 دوال قوى **مختلفة** من الصّورة $f(x)=x^{n}$ ، **أسُّها** $\mathbf{n}$ هو عددٌ طبيعيٌّ **فرديّ** كما يحلو لكم.

(ب) أيّ المميّزات التّالية تبقى ثابتة / مشتركة للخطوط البيانيّة الثّلاثة التي رسمتموها

(1) مجال التّعريف (2) المجالات التي فيها الدّالّة موجبة / سالبة

(3) مجالات التّصاعد / التّنازل. (4) التّماثل

- كي نرسم الخطّ البيانيّ للدّالّة يمكننا الاستعانة أيضًا بجدول قيم.
على سبيل المثال $y=x^3$ (أنظروا الجدول في الجهة اليسرى):

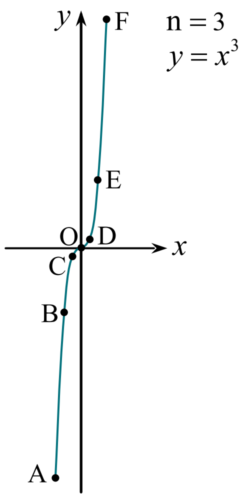
x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

نستنتج من الرّسم أنّ الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=x^3$ يمرّ في النّقاط:

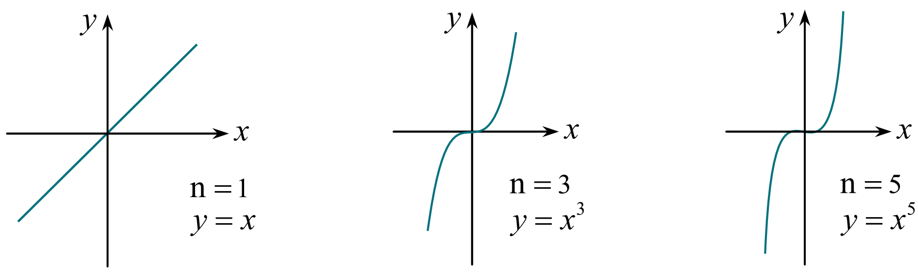
$A(-3,-27)$, $B(-2,-8)$, $C(-1,-1)$

$O(0,0)$, $D(1,1)$, $E(2,8)$, $F(3,27)$.

(أنظروا الجدول في الجهة اليسرى).



فيما يلي الرّسم البيانيّ لعدّة دوال قوى ذوات أُسُسٍ فرديّة.



جميع هذه الدّوال معرّفة لكلّ x ، ومن خلال النّظر في الخطوط البيانيّة، يمكننا الملاحظة أنّ كلّ واحد من هذه الدّوال موجبة لكلّ $x>0$ وسالبة لكلّ $x<0$ ($x=0$ هي النّقطة الصّفريّة الوحيدة للدّالّة).
بالإضافة، جميع هذه الدّوال تصاعديّة لكلّ x .
لا توجد لها نقاط قصوى وخطّها البيانيّ متماثلٌ بالنّسبة لنقطة أصل المحاور، **ويقطع** المحور x في نقطة أصل المحاور.

- دوال القوى لكلّ n طبيعيّ وفرديّ هي دوال **فرديّة**.

برهان: $f(x)=x^{n} \Rightarrow f(-x)=(-x)^{n} \underset{\text{لكلّ n فرديّ}}{=} -x^{n}=-f(x)$

أي، يتحقّق $f(-x)=-f(x)$ ولذا، فكلّ دوال القوى من الصّورة $f(x)=x^{n}$ ، بحيث n طبيعيّ وزوجيّ هي دوال **فرديّة**.
صفة دوال القوى هذه، بحيث n طبيعيّ وزوجيّ، هي مصدر الاسم: **"دالّة فرديّة"**.

بشكلٍ عامٍّ، كلّ دالّة من الصّورة: $f(x) = x^{\mathrm{n}}$ (n طبيعيّ) تُسمّى **دالّة قوّة**
ومجال تعريفها هو $\mathbb{R}$.
الدّوالّ التي هي **مجموع دوال قوى**، ذوات الصّورة:

$$f(x) = \mathrm{a_n} \cdot x^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}} \cdot x^{\mathrm{n-1}} + \cdots + \mathrm{a_2} \cdot x^2 + \mathrm{a_1} \cdot x + \mathrm{a_0}$$

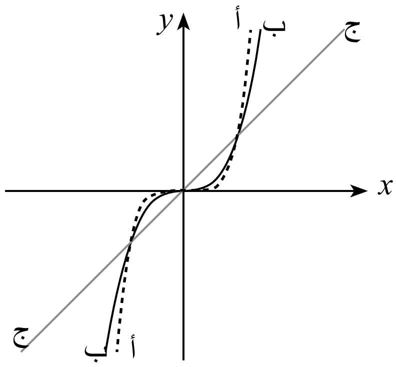
(بحيث على الأقلّ أحد البارامترات $\mathrm{a_0} , \mathrm{a_1} , \ldots , \mathrm{a_n}$ لا يساوي صفرًا، كلّ البارامترات هي أعدادٌ حقيقيّة،
n هو عددٌ طبيعيٌّ والأسُس هي أعدادٌ صحيحة غير سالبة)، تُسمّى **بولينومات**
ومجال تعريفها هو أيضًا $\mathbb{R}$.

أمثلة لـ بولينومات:

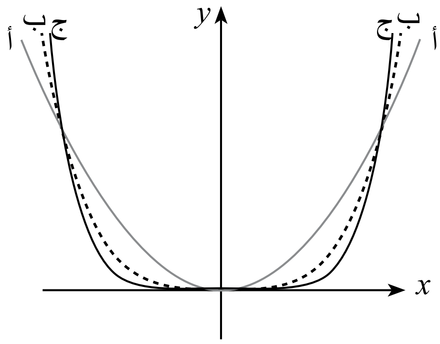
$$f(x) = -5x^4 + x^3 - 2x + 8 \;,\; g(x) = -3x^2 + 17 \;,\; h(x) = x^9 - x^8 + x - 1$$

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ



(1) معطاةٌ الدّوالّ: $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^5$.
لائموا الدّوالّ $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$
للخطّوط البيانيّة أ ، **ب** ، **ج** المعطاة في الرّسم.



(2) معطاةٌ الدّوالّ: $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^5$.
لائموا الدّوالّ $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$
للخطّوط البيانيّة أ ، **ب** ، **ج** المعطاة في الرّسم.

(3) (أ) النقطة $(-3,81)$ تقع على الخطّ البيانيّ لدالّة القوّة $f(x)$.
هل الدّالّة $f(x)$ هي دالّة زوجيّة، فرديّة أم أنّها ليست زوجيّة وليست فرديّة ؟
(ب) معطى أنّ $f(3) = \mathrm{a}$. ما هي قيمة a ؟

(4) (أ) النقطة $(-4,-64)$ تقع على الخطّ البيانيّ لدالّة القوّة $g(x)$.
هل الدّالّة $g(x)$ هي دالّة زوجيّة، فرديّة أم أنّها ليست زوجيّة وليست فرديّة ؟
(ب) النقطة $(4,\mathrm{b})$ تقع على الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$. ما هي قيمة b ؟

أجوبة نهائيّة

(1) $f(x) \leftarrow$ **ج**، $g(x) \leftarrow$ **ب**، $h(x) \leftarrow$ أ . **(2)** $f(x) \leftarrow$ أ، $g(x) \leftarrow$ **ب**، $h(x) \leftarrow$ **ج** .
(3) (أ) دالّة زوجيّة. (ب) $\mathrm{a} = 81$
(4) (أ) دالّة فرديّة. (ب) $\mathrm{b} = 64$

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

د. دالّة الجذر التّربيعيّ: $f(x)=\sqrt{x}$

سنتناول في هذا البند دوالّ تحتوي على جذرٍ تربيعيٍّ لتعبيرٍ جبريٍّ.
سيظهر التّمرّن والتّطبيق لهذا الموضوع في نطاق حساب التّفاضل.

مثال:

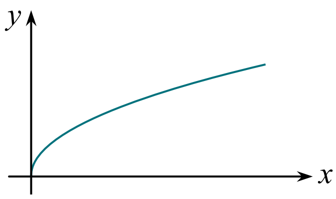
أرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)=\sqrt{x}$.

الحلّ:

مجال تعريف الدّالّة هو $x\geq 0$.
يمكننا الحصول على الخطّ البيانيّ بمساعدة جدول قيم.

مثال:

x	$f(x)$	
0	0	$\Rightarrow (0,0)$
1	1	$\Rightarrow (1,1)$
4	2	$\Rightarrow (4,2)$
9	3	$\Rightarrow (9,3)$
16	4	$\Rightarrow (16,4)$



استنادًا إلى الخطّ البيانيّ، يمكننا الملاحظة أنّ الدّالّة $f(x)=\sqrt{x}$ هي دالّة **تصاعديّة**.
نقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحورَيْن هي نقطة أصل المحاور $(0,0)$ ،
ولذا فإنّ الدّالّة معرّفة لكلّ $x\geq 0$ وموجبة لكلّ $x>0$.

نقطة أصل المحاور هي أيضًا نقطة النّهاية الصّغرى المطلقة للدّالّة.

> مجال تعريف دالّةٍ من الصّورة $y=\sqrt{f(x)}$ ،
> ينتج من حلّ المتباينة $f(x)\geq 0$.

مثال

معطاةٌ الدّالّة $f(x)=\sqrt{x-5}$. جد مجال تعريف الدّالّة.

الحلّ:

مجال تعريف التّعبير $\sqrt{x-5}$ ينتج من حلّ المتباينة: $x-5\geq 0$.

نحصل على:

$$x-5\geq 0\ /\ \ +5$$

$$x\geq 5$$

أي أنّ مجال تعريف الدّالّة هو كلّ الأعداد الأكبر أو تساوي 5 .
الأعداد في هذا المجال هي قيم x التي تحصل الدّالّة فيها على قيمٍ غير سالبة تحت الجذر.
هذا يعني أنّه إذا عوّضنا في الدّالّة قيم x أصغر من 5 سنحصل على تعبيرٍ لا معنى له (جذرُ عددٍ سالب) . لذا، مجال تعريف الدّالّة هو $x\geq 5$.

الفصل 3:

تحوّلات في الدّوالّ: إزاحات، توسيع، تضييق، إِنعكاسات بالنّسبة للمحورَيْن وقيمة مطلقة

التّحوّلات في الدّالّة هي عمليّاتٌ تُنَفّذ على دالّة فتنقلها إلى دالّة أخرى.

يمكن للدّالّة الأصليّة أن تكون من كلّ نوع: دالّة خطّيّة، دالّة تربيعيّة، دالّة قوّة، دالّة جذر وإلخ. للدّالّة الجديدة النّاتجة عن التّحوّل تعبيرٌ جبريٌّ مختلفٌ وخطٌّ بيانيٌّ مختلف.

بماذا تساعدنا التّحوّلات ؟

بحث صفاتٍ وخصائص في الدّالّة الجديدة تُعلّمنا عن الدّالّة الأصليّة وعلى العكس: بحث صفاتٍ وخصائص في الدّالّة الأصليّة تُعلّمنا عن الدّالّة الجديدة.

أي أنّ التّحوّلات في الدّوالّ تُمكّننا من معرفة صفات الدّالّة الجديدة دون إجراء بحثٍ جديدٍ لصفاتها من جديد وإنّما من خلال معرفة صفات الدّالّة الأصليّة.

وهنا تكمن أهميّة معرفة التّحوّلات والإلمام بها في الدّوالّ.

<u>مثال:</u> إذا كانت إحداثيّات النّقطتَيْن الصّفريّتَين في الدّالّة هما $(1,0)$ وَ $(5,0)$

والخطّ البيانيّ للدّالّة الجديدة ينتج من إزاحة الخطّ البيانيّ للدّالّة الأصليّة 3 وحداتٍ إلى اليسار،

فإنّ إحداثيّات النّقطتَيْن الصّفريّتَين في الدّالّة الجديدة هما $(-2,0)$ وَ $(2,0)$.

سنبحث التّحوّلات التّالية:

أ. إزاحة عموديّة

ب. إزاحة أفقيّة

ج. توسيع عموديّ / تضييق عموديّ

د. انعكاس بالنّسبة للمحور x

هـ. انعكاس بالنّسبة للمحور y

و. قيمة مطلقة

سيُميَّز كلُّ تحوّلٍ بواسطة:

- تعبيره الجبريّ
- المعنى البيانيّ
- **لامتغيّرات التّحوّل**، هي صفات الدّالّة الأصليّة التي لا تتغيّر في الدّالّة الجديدة.

أ. إزاحة عموديّة $y = f(x) + \mathrm{k}$

توضيح مُحوسب: إزاحة عموديّة

أدخلوا إلى الرّابط: https://www.geogebra.org/classic/enxfmtmr

أمامكم الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x) = x^2$ باللّون الأخضر

والخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x) = f(x) + \mathrm{k}$ باللّون الأحمر.

غيّروا قيمة البارامتر k بواسطة جرّ المؤشّر على طول الشّريط الذي يُحدّد قيمة k

(أ) إفحصوا لأيّ قيم k الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$ يكون إزاحة للخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ إلى الأعلى، ولأيّ قيم k يكون إزاحة إلى الأسفل ؟

(ب) افحصوا ماذا يحصل إذا كان $\mathrm{k} = 0$ ؟

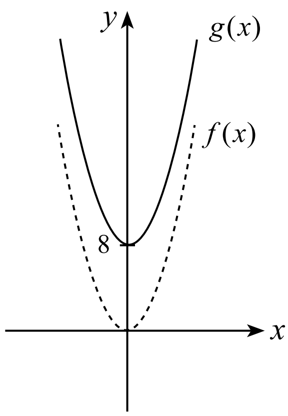
(ج) إفحصوا ماذا يتغيّر في إحداثيّات النّقطة القصوى ونوعها بعد تنفيذ الإزاحة العموديّة ؟

(د) هل محور تماثل الدّالّة $g(x)$ يختلف عن محور تماثل الدّالّة $f(x)$ ؟

(هـ) هل مجالات التّصاعد والتّنازل للدّالّة $g(x)$ تختلف عن مجالات التّصاعد والتّنازل للدّالّة $f(x)$ ؟

مثال

إزاحة عموديّة للقطعِ المكافئ



معطاة الدّالّة $f(x) = x^2$

معطاة الدّالّة $g(x) = f(x) + 8$

التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$: $g(x) = x^2 + 8$

المعنى البيانيّ:

الخطّ البيانيّ الجديد هو إزاحة عموديّة للخطّ البيانيّ الأصليّ (المُخطّط)، بـِ 8 وحدات إلى الأعلى.

لامتغيّرات:

– الخطّ البيانيّ الأصليّ $f(x)$ هو قطع مكافئ له قيمةٌ صُغرى.
الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$ هو أيضًا قطعٌ مكافئ له قيمةٌ صُغرى.

– للدّالّة الأصليّة $f(x)$ رأس قيمةٍ صغرى في $x = 0$ ، وأيضًا للدّالّة $g(x)$ رأس قيمةٍ صغرى في $x = 0$ (محور التّماثل لا يتغيّر).

الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = f(x) + \mathrm{k}$ ينتج بواسطة إزاحة عموديّة (إلى الأعلى / الأسفل) بـِ k وحدات للخطّ البيانيّ للدّالّة $y = f(x)$.

المعنى البيانيّ

لكلّ $\mathrm{k} > 0$ الإزاحة العموديّة إلى الأعلى

لكلّ $\mathrm{k} < 0$ الإزاحة العموديّة إلى الأسفل.

لامتغيّرات الإزاحة العموديّة:

– الإزاحة العموديّة تُحافظ على الشّكل البيانيّ للدّالّة الأصليّة.
إذا أزَلنا هيئة المحاور من الرّسم، وتمعنّا في الرّسمَيْن البيانيَّيْن، للدّالّة الأصليّة وللدّالّة الجديدة، فلن نستطيع التّمييز بينهما .

– الإحداثيّ x لنقاط القيمة العظمى والصّغرى لا يتغيّر.

– النّقاط القصوى تزيح إلى الأعلى/الأسفل بمقدارٍ ثابت.

– مجالات التّصاعد والتّنازل لا تتغيّر.

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

ب. إزاحة أُفقيّة $y = f(x-p)$

توضيح مُحوسب: إزاحة أفقيّة

أدخلوا إلى الرّابط: https://www.geogebra.org/classic/wyztsrzb

أمامكم الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x) = x^2$ مُلوّن باللّون الأخضر
والخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x) = f(x-p)$ ملوّن باللّون الأحمر.
غيّروا قيمة البارامتر p بواسطة جرّ المؤشّر على طول الشّريط الذي يُحدّد قيمة p .

(أ) افحصوا لأيّ اتّجاهٍ أُزيح الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$ بالنّسبة للخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ عندما تكون قيم p موجبة، وعندما تكون قيم p سالبة .
انتبهوا: تظهر قيمة p فوق الشّريط.

(ب) افحصوا ماذا يحدث إذا كان $p = 0$.

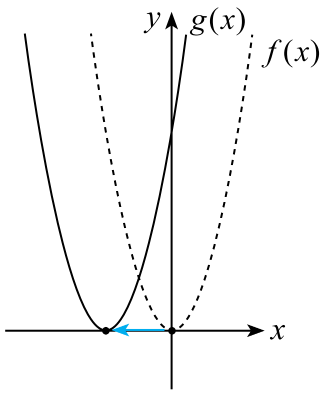
(ج) إفحصوا ماذا يتغيّر في إحداثيّات النّقطة القصوى ونوعها بعد تنفيذ الإزاحة الأفقيّة .

(د) هل وكيف يتغيّر محور تماثل القطع المكافئ للدّالّة $g(x)$ مقارنةً مع محور تماثل القطع المكافئ للدّالّة $f(x)$ ؟

(هـ) هل مجالات تصاعد وتنازل الدّالّة $g(x)$ تختلف عن مجالات تصاعد وتنازل الدّالّة $f(x)$ ؟

أمثلة

(1) معطاة الدّالّة $f(x) = x^2$
ومعطاة الدّالّة $g(x) = f(x+3)$
التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$: $g(x) = (x+3)^2$



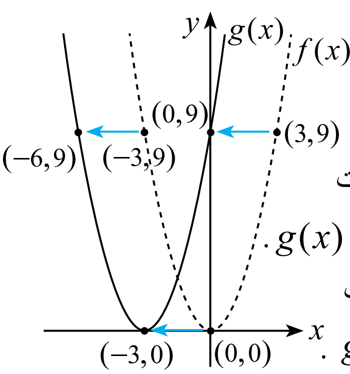
المعنى البيانيّ:
القطع المكافئ الأصليّ (الخطّ البيانيّ المُخطّط) أُزيح 3 وحدات إلى اليسار.
محور تماثل الدّالّة $f(x)$ (الذي معادلته $x = 0$)، أُزيح أيضًا إلى اليسار 3 وحدات، ومعادلته الآن في الدّالّة $g(x)$ هي $x = -3$.

لامتغيّرات:
– الدّالّة الأصليّة يصفها قطعٌ مكافئ له نقطة قيمةٍ صغرى.
وأيضًا الدّالّة الجديدة يصفها قطعٌ مكافئ له نقطة قيمة صغرى.
– قيمة الدّالّة في نقطة قيمتها الصّغرى بقيت كما كانت في الدّالّة الأصليّة $y_{\min} = 0$.
– يمكننا رؤية الإزاحة الأفقيّة إذا استعنّا بجدولي قيم للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$ (أنظروا الجدولَيْن في الجهة اليسرى):

x	$g(x)$
-6	9
-5	4
-4	1
-3	0
-2	1
-1	4
0	9

x	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

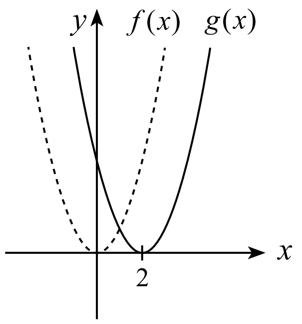
أُنظروا الإزاحات الأفقيّة في الرّسم والخطّ البيانيّ النّاتج (على يمين الجدول):
فمثلًا بالنّسبة للقيمة 9 في الدّالّتَيْن، نلاحظ أنّ النّقطة $(-3,9)$ الواقعة على الدّالّة $f(x)$ زاحت إلى اليسار إلى النّقطة $(-6,9)$ الواقعة على الدّالّة $g(x)$.
والنّقطة $(3,9)$ الواقعة على الدّالّة $f(x)$ زاحت يسارًا إلى النّقطة $(0,9)$ الواقعة على الدّالّة $g(x)$.



(2) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=x^2$

ومعطاةٌ الدّالّة $g(x)=f(x-2)$

التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$: $g(x)=(x-2)^2$



المعنى البيانيّ:

القطع المكافئ الأصليّ أُزيح وحدتَيْن إلى اليمين.

محور تماثل الدّالّة $f(x)$ (الذي معادلته $x=0$) أُزيح أيضًا إلى اليمين وحدتَيْن ومعادلته الآن في الدّالّة $g(x)$ هي: $x=2$.

لامتغيّرات:

– يصف الدّالّة الأصليّة قطعٌ مكافئ له نقطة قيمة صغرى، وأيضًا يصف الدّالّة الجديدة قطعٌ مكافئ له نقطة قيمة صغرى.

– قيمة الدّالّة في نقطة قيمتها الصّغرى بقيت ثابتة كما كانت في الدّالّة الأصليّة $y_{\min}=0$

الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=f(x-p)$ ينتج عن طريق **إزاحة أفقيّة** (إلى اليمين / إلى اليسار) p وحدات للخطّ البيانيّ للدّالّة $y=f(x)$.

المعنى البيانيّ

إذا كان $\mathbf{p>0}$ تكون الإزاحة الأفقيّة إلى **اليمين** وإذا كان $\mathbf{p<0}$ تكون الإزاحة الأفقيّة إلى **اليسار**.

لامتغيّرات الإزاحة الأفقيّة:

– تحافظ الإزاحة الأفقيّة على الشّكل البيانيّ للدّالّة الأصليّة.
إذا أزلنا هيئة المحاور من الرّسم ونظرنا إلى الخطّيْن البيانيّيْن للدّالّتَيْن الأصليّة والجديدة، فلن نتمكّن من التّمييز بينهما.

– نقطتا القيمة العظمى والقيمة الصّغرى للدّالّة الأصليّة أُزيحتا أفقيًّا على نفس النّحو الذي أُزيح به كلّ الخطّ البيانيّ، أي أنّهما تحافظان على قيمة y فيهما.

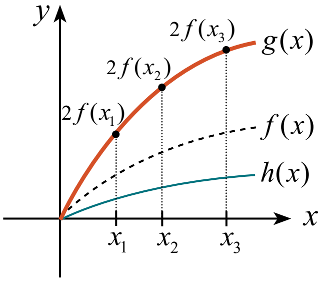
ج. توسيع عموديّ / تضييق عموديّ $y = \mathrm{a}\, f(x)$ $\mathrm{a} > 0$ $(\mathrm{a} \neq 1)$

مثال

معطاة الدّالّة $f(x) = \sqrt{x}$

ومعطى الدّالّتان: $g(x) = 2 \cdot f(x)$, $h(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$

التّعبيران الجبريّان للدّالّتَين $g(x)$, $h(x)$: $g(x) = 2\sqrt{x}$, $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$



المعنى البيانيّ

الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$ نتج من **توسيعٍ عموديّ** للخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ (الخطّ البيانيّ المُخطّط في الرّسم)، والخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$ نتج من **تضييق عمودي** للخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

لامتغيّرات:

- الإحداثيّ x للنّقطة القصوى ونوعها يبقيا ثابتَيْن كما كانا $x_{min} = 0$.
- مجال تصاعد الدّالّة ($x \geq 0$) بقي كما كان.
- المجال الموجب بقي كما كان وأيضاً إحداثيّات النّقطة الصّفريّة.

الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = \mathrm{a}\, f(x)$ $(\mathrm{a} > 0)$ ينتج بواسطة **توسيع عموديّ / تضييق عموديّ بالعامل a** للخطّ البيانيّ للدّالّة $y = f(x)$.

المعنى البيانيّ

إذا كان $\mathrm{a} > 1$ (السِّعةُ أكبر من 1) نحصل على **توسيع عموديّ**،

إذا كان $0 < \mathrm{a} < 1$ (السِّعةُ أصغر من 1) نحصل على **تضييق عموديّ**.

إذا كان $\mathrm{a} > 1$ قيم الدّالّة الجديدة تكبر، بقيمها المطلقة، بوتيرة أسرع من الدّالّة الأصليّة وهذا توسيع عموديّ. إذا كان $0 < \mathrm{a} < 1$ قيم الدّالّة تكبر، بقيمها المطلقة، بوتيرةٍ أبطأ وهذا تضييقٌ عموديّة.

لا متغيّرات:

- قيم x للنّقاط القصوى تبقى ثابتة.
- أيضًا نوع النّقاط القصوى يبقى ثابتًا – النّقاط العُظمى تبقى نقاط عُظمى والنّقاط الصّغرى تبقى نقاط صُغرى.
- مجالات تصاعد وتنازل الدّالّة الجديدة تبقى كما كانت في الدّالّة الأصليّة.
- المجالات الموجبة والمجالات السّالبة للدّالّة الجديدة تبقى كما كانت في الدّالّة الأصليّة.
- إحداثيّات النّقاط الصّفريّة تبقى أيضًا كما كانت في الدّالّة الأصليّة (نقاط التّقاطع مع المحور x)

د. انعكاس بالنّسبة للمحور x: $y=-f(x)$
وانعكاس بالنّسبة للمحور y : $y=f(-x)$

د.1 انعكاس بالنّسبة للمحور x

مثال

معطاة الدّالّة $f(x)=x^4$

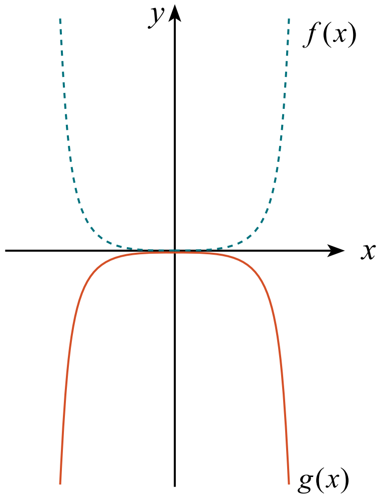
ومعطاة الدّالّة $g(x)=-f(x)$

التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$: $g(x)=-x^4$

المعنى البيانيّ:

في الرّسم في الجهة اليسرى الخطّ المتقطّع يمثل الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$

والخطّ المتّصل يصف الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$.



الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=-f(x)$ ينتج عن انعكاس بالنّسبة للمحور x للخطّ البيانيّ للدّالّة $y=f(x)$.

المعنى البيانيّ

المحور x هو بمثابة مرآة للخطّ البيانيّ للدّالّة الأصليّة.

كلّ نقطة $(x, f(x))$ تُنسَخ إلى النّقطة $(x, \ f(x))$.

لامتغيّرات:

– يحافظ هذا التّحوّل على إحداثيّات نقاط التّقاطع مع المحور x .
– يحافظ هذا التّحوّل على الإحداثيّات x للنّقاط القصوى، لكن يُغيّر نوعها أي، كلّ نقطة عُظمى تصبح صُغرى وعلى العكس.
– الإحداثيّات y للنّقاط القصوى تعكس إشارتها أي: $y_{\text{جديد}}=-y_{\text{أصليّ}}$.
– مجالات تصاعد الدّالّة تُصبح مجالات تنازل الدّالّة وعلى العكس.
– المجالات الموجبة للدّالّة تُصبح المجالات السّالبة وعلى العكس.
– إذا رسمنا الخطّين البيانيّين للدّالّتين في هيئة محاور واحدة، وطوينا الصّفحة على طول المحور x ، فسيتّحد الخطّان.

د.2 انعكاس بالنّسبة للمحور y

توضيح مُحوسب: انعكاس بالنّسبة للمحور y

أُدخلوا إلى الرّابط: https://www.geogebra.org/classic/gktwacub

أمامكم خطٌّ بيانيٌّ لدالّة تربيعية صورتها : $f(x)=\mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}$ ، مُلوّنٌ باللّون الأخضر وخطٌّ بيانيٌّ للدّالّة $g(x)=f(-x)$ مُلوّنٌ باللّون الأحمر.

الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$ هو **انعكاس** للخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ **بالنّسبة للمحور y**.

(أ) أعطوا قيمًا كما تحلو لكم للبارامترات a ، b وَ c ، بواسطة جرّ المؤشّر على طول الأشرطة المناسبة، لتحصلوا على دالّة معيّنة حسب رغبتكم.

(ب) تمعّنوا في القطعَيْن المكافئَيْن النّاتجَيْن وافحصوا ماذا تغيّر وماذا لم يتغيّر في الدّالّة $g(x)$ مقارنةً مع الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ بالنّسبة للمميّزات التّالية:

1. نقطة التّقاطع مع المحور y.
2. إحداثيّات النّقطة القصوى.
3. نوع النّقطة القصوى (قيمة صغرى / قيمة عُظمى).
4. محور تماثل القطع المكافئ.
5. مدى توسيع القطع المكافئ (هل هو أضيق / أوسع / لم يتغيّر ؟).

(ج) حُلّوا البند (أ) وَ (ب) مرّتَيْن أُخرَيَيْن مستعملين بارامترات أخرى لتحصلوا على دوال مختلفة.

(د) هل اللّامتغيّرات (الصفات التي لم تتغيّر) التي وجدتموها في الانعكاس، تحقّقت أيضًا في الدّوال الأخرى التي فحصتموها ؟

مثال

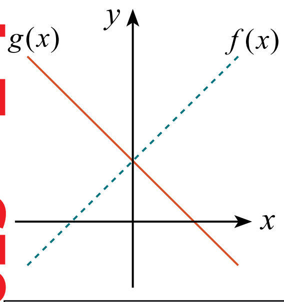
معطاة الدّالّة $f(x)=x+10$

ومعطاة الدّالّة $g(x)=f(-x)$

التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$: $g(x)=-x+10$

المعنى البيانيّ:

في الرّسم في الجهة اليسرى يصف الخطّ المتقطّع الدّالّة $f(x)$ ويصف الخطّ المتّصل الدّالّة $g(x)$.



الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=f(-x)$ ينتج من **انعكاس بالنّسبة للمحور** y للخطّ البيانيّ للدّالّة $y=f(x)$.

المعنى البيانيّ

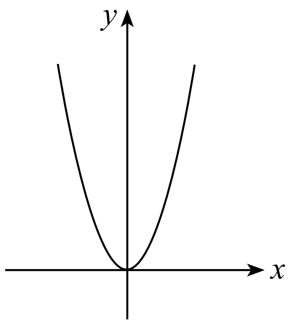
المحور y هو بمثابة مرآةٌ للخطّ البيانيّ للدّالّة الأصليّة.

كلّ نقطة $(x,f(x))$ تُنسَخُ إلى النّقطة $(-x,f(x))$.

لامتغيّرات:

– نقطة التّقاطع مع المحور y لا تتغيّر .
– الإحداثيّات y للنّقاط القصوى لا تتغيّر لكن الإحداثيّات x فيها مُضادّة للإحداثيّات x في الدّالّة الأصليّة. نقطة القيمة العظمى تبقى نقطة قيمة عظمى ونقطة القيمة الصُّغرى تبقى نقطة قيمة صغرى.

تمارين للعمل الذّاتيّ



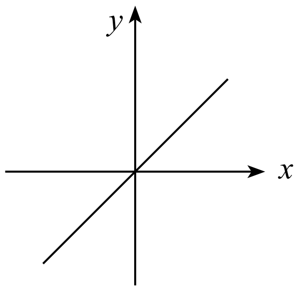
(1) معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^2$.

(أ) أُرسموا في دفاتركم في نفس هيئة المحاور الخطوط البيانيّة للدّوالّ:

(i) $y = x^2 - 1$ (ii) $y = (x-1)^2$

(iii) $y = 2x^2$ (iv) $y = -x^2$

(ب) إِشرحوا بالنّسبة لكلّ واحدة من الدّوالّ التي تظهر في البند (أ) ((i) حتّى (iv))، كيف نتج خطّها البيانيّ من الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^2$.



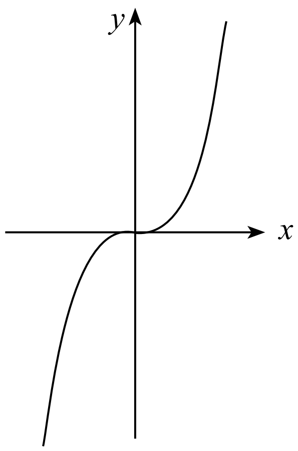
(2) معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x$.

(أ) أُرسموا في دفاتركم في نفس هيئة المحاور الخطوط البيانيّة للدّوالّ:

(i) $y = x + 3$ (ii) $y = 0.5x$

(iii) $y = 3x$ (iv) $y = -x$

(ب) إِشرحوا بالنّسبة لكلّ واحدة من الدّوالّ التي تظهر في البند (أ) ((i) حتّى (iv))، كيف نتج خطّها البيانيّ من الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x$.



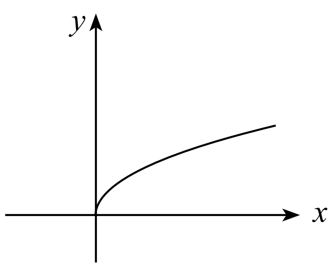
(3) معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^3$.

(أ) أُرسموا في دفاتركم في نفس هيئة المحاور الخطوط البيانيّة للدّوالّ:

(i) $y = x^3 + 2$ (ii) $y = (x+2)^3$

(iii) $y = 3x^3$ (iv) $y = -x^3$

(ب) إِشرحوا بالنّسبة لكلّ واحدة من الدّوالّ التي تظهر في البند (أ) ((i) حتّى (iv))، كيف نتج خطّها البيانيّ من الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = x^3$.



(4) معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = \sqrt{x}$.

(أ) أُرسموا في دفاتركم في نفس هيئة المحاور الخطوط البيانيّة للدّوالّ:

(i) $y = \sqrt{x} - 4$ (ii) $y = \sqrt{x-4}$

(iii) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ (iv) $y = -\sqrt{x}$

(v) $y = \sqrt{-x}$

(ب) إِشرحوا بالنّسبة لكلّ واحدة من الدّوالّ التي تظهر في البند (أ) ((i) حتّى (v))، كيف نتج خطّها البيانيّ من الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = \sqrt{x}$.

(5) معطاة الدّالّة $y = x^3$.

(أ) في كلّ واحدٍ من البنود التّالية وصفٌ لتحوّلٍ يُنفّذُ على الدّالّة المعطاة للحصول على دالّة جديدة.
أُكتبوا التّعبير الجبريّ المناسب للدّالّة الجديدة النّاتجة عن تنفيذ التّحوّل الذي يظهر في كلّ واحدٍ من البنود.

(i) إزاحة 5 وحدات إلى الأسفل. (ii) إزاحة 5 وحدات إلى الأعلى.

(iii) إزاحة 5 وحدات إلى اليمين. (iv) إزاحة 5 وحدات إلى اليسار.

(v) توسيع عموديّ بـِ 5 أضعاف. (vi) تضييق عموديّ بالعامل $\frac{1}{5}$.

(vii) انعكاس بالنّسبة للمحور x . ($viii$) انعكاس بالنّسبة للمحور y .

(ب) أُرسموا الخطوط البيانيّة للدّالّة $y = x^3$ وللدّوالّ التي حصلتم عليها في البنود: (i) ، (iv) ، (vii) ، في البند السّابق، في نفس هيئة المحاور.

(6) معطاةٌ الدّالّة $y = x^2 + 6x$.

(أ) في كلّ واحدٍ من البنود التّالية وصفٌ لتحوّلٍ يعمل على الدّالّة المعطاة للحصول على دالّة جديدة.
أُكتبوا التّعبير الجبريّ الملائم للدّالّة الجديدة النّاتجة بسبب تفعيل التّحوّل الذي يظهر في كلّ بندٍ على الدّالّة المعطاة.

(i) إزاحة وحدتَيْن إلى الأسفل. (ii) إزاحة وحدتَيْن إلى الأعلى.

(iii) إزاحة وحدتَيْن إلى اليمين. (iv) إزاحة وحدتَيْن إلى اليسار.

(v) توسيع عموديّ بضعفَيْن . (vi) تضييق عموديّ بالعامل $\frac{1}{2}$.

(vii) انعكاس بالنّسبة للمحور x . ($viii$) انعكاس بالنّسبة للمحور y .

(ب) أُرسموا الخطوط البيانيّة للدّالّة $y = x^2 + 6x$ وللدّوالّ التي حصلتم عليها في البنود: (i) ، (iv) ، (vii) ، في البند السّابق، في نفس هيئة المحاور.

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) افحصوا مع المعلّم في الصّف (أو بمساعدة برمجة DESMOS).
(ب) (i) إزاحة عموديّة وحدة واحدة إلى الأسفل. (ii) إزاحد أفقيّة وحدة واحدة إلى اليمين.
(iii) توسيع عموديّ بضعفَيْن . (iv) انعكاس بالنّسبة للمحور x .

(2) (أ) افحصوا مع المعلّم في الصّف (أو بمساعدة برمجة DESMOS).
(ب) (i) إزاحة عموديّة 3 وحدات إلى الأعلى. (ii) تضييق عموديّ بالعامل $\frac{1}{2}$.
(iii) توسيع عموديّ 3 أضعاف. (iv) انعكاس بالنّسبة للمحور x .

(3) (أ) افحصوا مع المعلّم في الصّف (أو بمساعدة برمجة DESMOS).
(ب) (i) إزاحة عموديّة بوحدتَيْن إلى الأعلى. (ii) إزاحد أفقيّة بوحدتَيْن إلى اليسار.
(iii) توسيع عموديّ بـِ 3 أضعاف. (iv) انعكاس بالنّسبة للمحور x .

(4) (أ) افحصوا مع المعلّم في الصّف (أو بمساعدة برمجة DESMOS).

(ب) (i) إزاحة عموديّة 4 وحدات إلى الأسفل. (ii) إزاحة أفقيّة 4 وحدات إلى اليمين.

(iii) تضييق عمودي بالعامل $\frac{1}{3}$. (iv) انعكاس بالنّسبة للمحور x .

(v) انعكاس بالنّسبة للمحور y .

(5) (أ) (i) $y=x^3-5$ (ii) $y=x^3+5$ (iii) $y=(x-5)^3$

(iv) $y=(x+5)^3$ (v) $y=5x^3$ (vi) $y=\frac{1}{5}x^3$

(vii) $y=-x^3$ ($viii$) $y=(-x)^3=-x^3$ (ب) افحصوا مع المعلّم في الصّف.

(6) (أ) (i) $y=x^2+6x-2$ (ii) $y=x^2+6x+2$

(iii) $y=(x-2)^2+6(x-2)=x^2+2x-8$

(iv) $y=(x+2)^2+6(x+2)=x^2+10x+16$ (v) $y=2(x^2+6x)=2x^2+12x$

(vi) $y=\frac{1}{2}(x^2+6x)=\frac{1}{2}x^2+3x$ (vii) $y=-(x^2+6x)=-x^2-6x$

($viii$) $y=(-x)^2+6(-x)=x^2-6x$ (ب) افحصوا مع المعلّم في الصّف.

***

هـ. قيمة مطلقة للدّوال

هـ1. مصطلح القيمة المطلقة

المصطلح "قيمة مطلقة" كنّا قد ذكرناه للمرّة الأولى في المرحلة الإعداديّة عندما تعلّمنا عن الأعداد الموجّهة. عرّفنا القيمة المطلقة لعددٍ معيّن، بمفهومٍ هندسيّ، على أنّه **بُعد** العدد عن نقطة الأصل، على محور الأعداد (أي، البُعد بين العدد وبين الـ 0). بما أنّ البُعد هو مقدارٌ غير سالبٍ، فإنّ القيمة المطلقة للعدد دائمًا غير سالبة.

القيمة المطلقة لِـ a يُرمَزُ لها هكذا: $|a|$.

الآن، نعرض تعريفًا جبريًّا لمصطلح القيمة المطلقة للعدد a :

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geq 0 \text{ إذا كان} \\ -a, & a<0 \text{ إذا كان} \end{cases}$$

أي:

- عندما يكون a موجبًا أو صفرًا يتحقّق $|a|=a$ ،
  هذا يعني: القيمة المطلقة للعدد هو العدد نفسه.
- عندما يكون a سالبًا يتحقّق $|a|=-a$,
  هذا يعني: القيمة المطلقة للعدد تساوي العدد المُضادّ للعدد المعطى.

  انتبهوا: $-a>0$.

صفات القيمة المطلقة

(1) بحسب تعريف القيمة المطلقة يتحقّق: $|\mathbf{0}|=0$

(2) بحسب تعريف القيمة المطلقة يتحقّق: $|\mathbf{a}|=|-\mathbf{a}|$

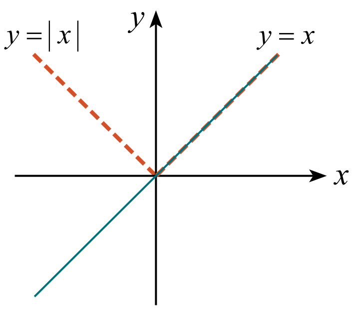
(3) $|a|\geq 0$

هـ.2 العلاقة بين الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ والخطّ البيانيّ للدّالّة $|f(x)|$

أمثلة محلولة

(1) أُرسموا الخطّيْن البيانيّيْن للدّالّتيْن $y=x$ وَ $y=|x|$ في نفس هيئة المحاور.

الحلّ:



نرسم الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=x$ الذي هو خطٌّ مستقيمٌ متّصل.

الدّالّة $y=x$ **سالبة** لكلّ $x<0$

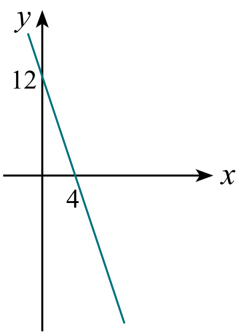
ولذا، في هذا المجال، نحصل على الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=|x|$ بواسطة انعكاس الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=x$ **حول المحور x** كمحور تماثل.

الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=|x|$ موصوفٌ في المجال $x<0$ **كخطٍّ مستقيم متقطّع**.

الدّالّة $y=x$ **موجبة** في المجال $x>0$ ولذا، في هذا المجال (في الرّبع الأوّل)، الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=|x|$ **يتّحد** مع الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=x$.

(2) أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)=|-3x+12|$.

الحلّ:



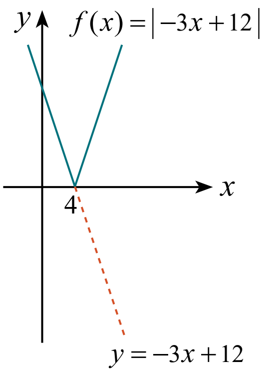
نرسم الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=-3x+12$.

نستعين بنقطة تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحور x : $(4,0)$.

في المجال $x<4$ ، الدّالّة $y=-3x+12$ **موجبة**، لذا في المجال $x<4$ ، الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=-3x+12$ والخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)=|-3x+12|$ **يتّحدان**.

في المجال $x>4$ ، الدّالّة $y=-3x+12$ **سالبة** لذا في المجال $x>4$ ، الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)=|-3x+12|$ يتّحد مع الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=-(-3x+12)=3x-12$.

أي، في المجال $x>4$ الخطّ البيانيّ $y=-3x+12$ والخطّ البيانيّ للدّالّة $y=|-3x+12|$ متماثلان بالنّسبة للمحور x.

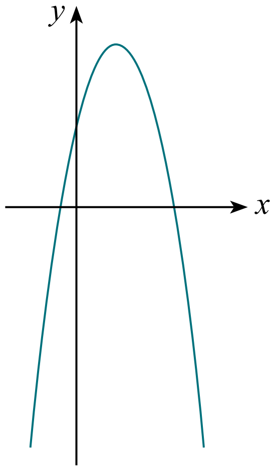


يظهر في الرّسم في الجهة اليسرى الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)=|-3x+12|$ بالخطّ المتّصل.

(3) أمامكم الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)=-x^2+3x+4$ وعليه النّقطة $A(5,-6)$.

(أ) أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)=\left|-x^2+3x+4\right|$.

(ب) ما هي النّقطة A' الواقعة على الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ والمتماثلة بالنّسبة للمحور x ، مع النّقطة A الواقعة على الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ،



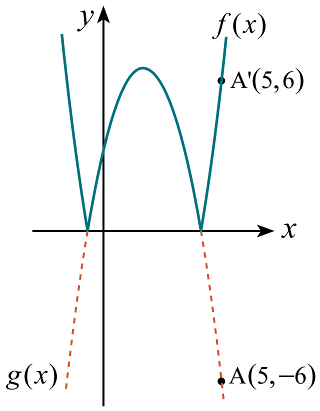
الحلّ:

في المجالَيْن اللّذَيْن فيهما $g(x)<0$ نعكس الخطّ البيانيّ بالنّسبة للمحور x ، كمحور تماثل، كي نحصل على الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

في المجال الذي فيه $g(x)\geq 0$ يتّحد الخطّان البيانيّان للدّالّتين $g(x)$ وَ $f(x)$.

(أ) يظهر الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ في الرّسم أمامكم بالخطّ الأسود المتّصل.

(ب) إحداثيّات النّقطة A' هي $A'(5,6)$.



(4) توضيح محوسب: قيمة مطلقة

(أ) أُرسموا بمساعدة التّطبيق DESMOS الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)=x^2-8x+7$.

(ب) استعينوا بالرّسم الذي حصلتم عليه وأكملوا في دفاتركم:

1. إحداثيّات النّقطتَيْن الصّفريّتَيْن للدّالّة $f(x)$ هي: ________________ .

ملاحظة إحداثيّات النّقاط ستظهر بجانبها عند الوقوف عليها بواسطة مؤشّر الفأرة.
(يمكننا معرفة إحداثيّات كلّ نقطة على الخطّ البيانيّ بواسطة الضّغط مرّة واحدة على مكانها).

2. إحداثيّات النّقطة القصوى للدّالّة $f(x)$ هي ________________
ونوعها هو ______ (قيمة عُظمى / قيمة صُغرى).

(ج) أُرسموا بمساعدة DESMOS الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)=\left|f(x)\right|$ ، وأكملوا في دفاتركم:

1. إحداثيّات النّقطتَيْن الصّفريّتَيْن للدّالّة $g(x)$ هي: ________________.

2. إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $g(x)$ هي: ________________.
ونوعها هو ______ (قيمة عُظمى / قيمة صُغرى).

(د) افحصوا ما هي لامتغيّرات تحوّل القيمة المطلقة الذي أُجرِيَ على الدّالّة $f(x)$ وأكملوا:

1. إحداثيّات النّقاط الصّفريّة ______ (لم تتغيّر / تغيّرت).

2. إحداثيّات النّقاط القصوى ______ (لم تتغيّر / تغيّرت)، إذا تغيّرت، ماذا تغيّر في إحداثيّاتها ؟

3. نوع النّقاط القصوى (قيمة عُظمى / قيمة صُغرى) ______ (لم يتغيّر / تغيّر).

(هـ) حلّوا كلّ البنود مرّةً أخرى بالنّسبة للدّالّة $f(x)=2x^4-3x^3-2x^2-x$.

انتبهوا: يوجد لهذه الدّالّة عدّة نقاط قصوى ! عليكم أن تفحصوا بالنّسبة لكلّ واحدة منها المطلوب في البندَيْن الفرعيَّيْن 2 - 3 لكلّ واحدٍ من البنود السّابقة

(و) سجّلوا أيّ صفاتٍ للدّالّة $f(x)$ لا تتغيّر وأيّها تتغيّر عند تشغيل التّحوّل $\left|f(x)\right|$.

גרסה מיוחדת - לתלמידים 18/10/2023

معطاةٌ الدّالّة $y = |f(x)|$.

بحسب تعريف القيمة المطلقة، الإحداثيّات y للنّقاط الواقعة على الخطّ البيانيّ للدّالّة تُحقّق:

$$y = \begin{cases} f(x) \quad , \quad f(x) \geq 0 \quad \text{إذا كان} \\ -f(x) \quad , \quad f(x) < 0 \quad \text{إذا كان} \end{cases}$$

المعنى البيانيّ

في المجال الذي فيه $f(x) \geq 0$ الخطّ البيانيّ للدّالّة $|f(x)|$ يتّحد مع الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ،

وفي المجال الذي فيه $f(x) < 0$ الخطّ البيانيّ للدّالّة $|f(x)|$ يتّحد مع الخطّ البيانيّ للدّالّة $-f(x)$.

بكلماتٍ أخرى:

عندما تكون $f(x)$ موجبة أو صفر، يكون الخطّ البيانيّ للدّالّة الجديدة مُطابقًا للخطّ البيانيّ للدّالّة الأصليّة.

عندما تكون $f(x)$ سالبة يكون الخطّ البيانيّ للدّالّة الجديدة انعكاسًا للخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ الأصليّة، حول المحور x .

لامتغيّرات:

– عندما تكون $f(x) \geq 0$ لا تتغيّر إحداثيّات النّقاط القصوى ولا يتغيّر نوعها أيضًا (قيمة عُظمى / قيمة صُغرى).
– عندما تكون $f(x) < 0$ الإحداثيّات x لنقاط القيمة العظمى تُصبح الإحداثيّات x لنقاط القيمة الصُّغرى وعلى العكس.
– لا تتغيّر إحداثيّات نقاط تقاطع الدّالّة مع المحور x .
– تكون الدّالّة النّاتجة غير سالبة لكلّ x في مجال تعريفها.
– النّقاط الصّفريّة للدّالّة $f(x)$ تُصبح نقاط قيمة صُغرى في الدّالّة $|f(x)|$.

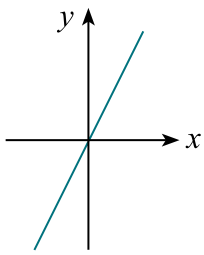
***

تمارين للعمل الذّاتيّ

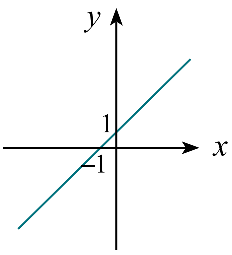
في كلّ واحدٍ من التّمارين **(1)** – **(4)** معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $y = |f(x)|$.

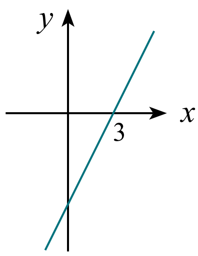
(1) $f(x) = 2x$



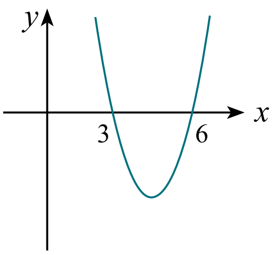
(2) $f(x) = x + 1$

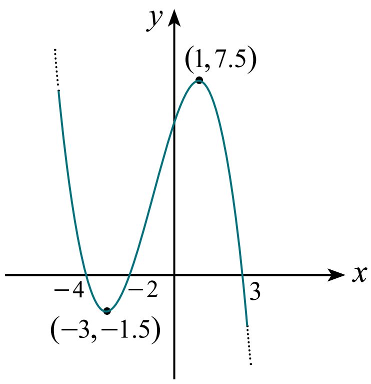


(3) $f(x) = 2x - 6$



(4) $f(x) = x^2 - 9x + 18$





(5) معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ وأشير عليه إلى النّقطتَيْن القصويّيْن وإلى نقطة التّقاطع مع المحور x .

(أ) أرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)=|f(x)|$.

(ب) سجّلوا إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $g(x)$

(ج) كم مرّةً يقطع المستقيم $y=1$ الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ؟

(د) معطى المستقيم $y=\mathrm{k}$.
جدوا بالنّسبة لقيم k المختلفة:
(i) كم مرّةً يقطع المستقيم $y=\mathrm{k}$ الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ؟
(ii) كم مرّةً يقطع المستقيم $y=\mathrm{k}$ الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$ ؟

في كلّ واحدٍ من التّمارين **(6)** – **(11)** أرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة المعطاة.

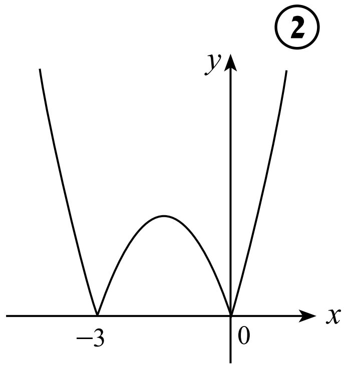
(6) $y=|x-3|$ **(7)** $y=|2x+4|$ **(8)** $y=|9-3x|$

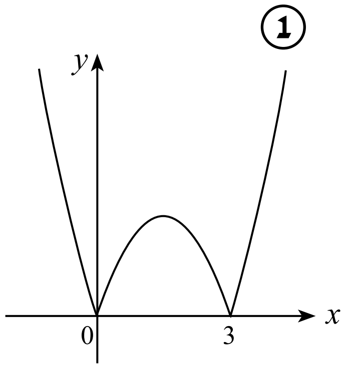
(9) $y=|x^2-5x|$ **(10)** $y=|2x^2-5x+2|$ **(11)** $y=|-x^2+4x-4|$

(12) (أ) هل الخطّان البيانيّان للدّالّتَيْن $g(x)=|3x^2-5x+2|$ وَ $f(x)=|-3x^2+5x-2|$ يتّحدان ؟

(ب) برهنوا أنّ الخطّيْن البيانيّيْن للدّالّتَيْن $y=|f(x)|$ وَ $y=|-f(x)|$ يتّحدان.

(13) أيُّ الخطّيْن البيانيّيْن: ① أو ② يناسب الدّالّة $y=|x^2-3x|$ ؟ علّلوا.





(14) أُكتبوا **"صحيح"** / **"غير صحيح"**.

إذا كتبتم **"صحيح"** ـ إِشرحوا لماذا. إذا كتبتم **"غير صحيح"** ـ أعطوا مثالًا مُضادًا.

(أ) الدّالّة $|f(x)|$ هي دائمًا دالّة زوجيّة.

★ (ب) الدّالّة $f(|x|)$ هي دائمًا دالّة زوجيّة.

(ج) كلّ قيم الدّالّة $|f(x)|$ غير سالبة.

(د) كلّ قيم الدّالّة $f(|x|)$ غير سالبة.

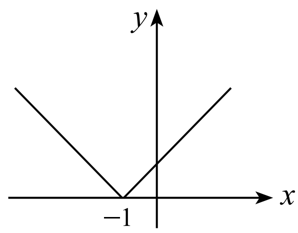
(هـ) الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=|f(x)|$ يمرّ في نقطة أصل المحاور.

(و) نقطة أصل المحاور هي نقطة تقع على الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=f(|x|)$.

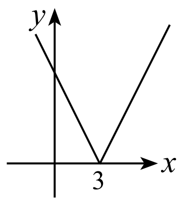
גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

أجوبة نهائيّة لِـ تمارين / بنود مختارة

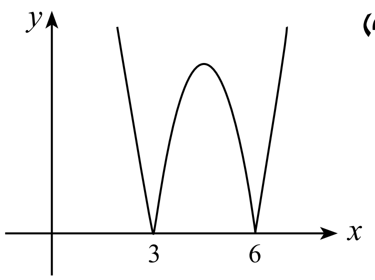
(2)



(3)



(4)



(5) (ب) $\min(3,0)$, $\max(1,7.5)$, $\min(2,0)$, $\max(-3,1.5)$, $\min(-4,0)$

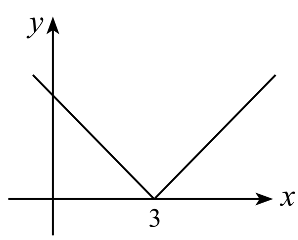
(د) (i) 3 مرّات في المجال $-1.5<k<7.5$. مرّتان في $k=7.5$ أو $k=-1.5$.

مرّة واحدة في المجال $k>7.5$ أو $k<-1.5$.

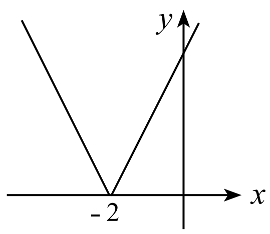
(ii) 6 مرّات في $0<k<1.5$. 5 مرّات في $k=1.5$. 4 مرّات في المجال $1.5<k<7.5$.

3 مرّات في $k=0$ أو $k=7.5$. مرّتان في المجال $k>7.5$. ولا مرّة في المجال $k<0$.

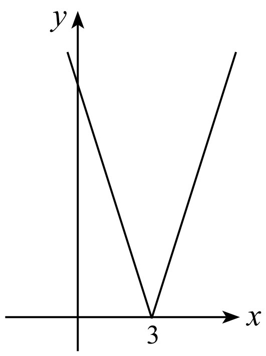
(6)



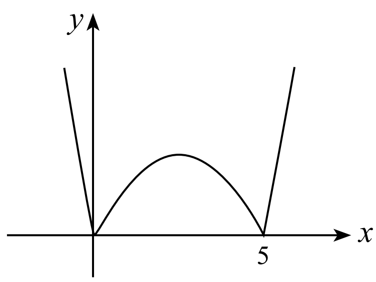
(7)



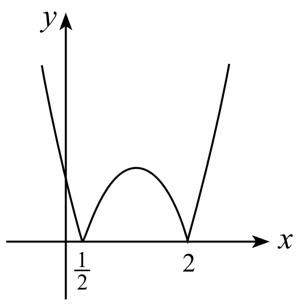
(8)



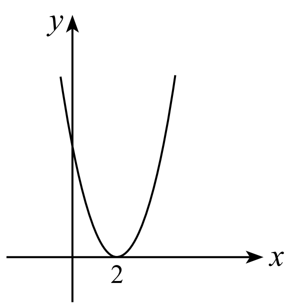
(9)



(10)



(11)



(12) (أ) الخطّان البيانيّان يتّحدان.

(13) الخطّ البيانيّ 1 .

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

و. مزيج من التّحوّلات

يمكننا تنفيذ عدّة تحوّلاتٍ على الدّوالّ.

أمثلة

(1) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2$ ومعطاة الدّالّة $g(x)=-2x^2$

يمكننا القول، إنّ الدّالّة $g(x)$ تنتج من ضرب الدّالّة $f(x)$ بـِ -2 .

أي، هذه حالة خاصّة لِـ **توسيع عموديّ** $y=\mathrm{a}f(x)$ **بحيث a عدد سالب.**

ملاحظة:

في الحالات التي فيها $y=\mathrm{a}f(x)$ وَ $\mathrm{a}<0$ نتعامل مع الدّالّة الجديدة على أنّها مزيج من تحوّلَيْن اثنَيْن تمّ تنفيذهما على الدّالّة الأصليّة:

(أ) **انعكاس بالنّسبة للمحور x :** $y_1=-f(x)$

(ب) **توسيع عموديّ / تضييق عموديّ بـِ $|\mathrm{a}|$ أضعاف على الخطّ البيانيّ للدّالّة y_1 :** $y_2=|\mathrm{a}|y_1$

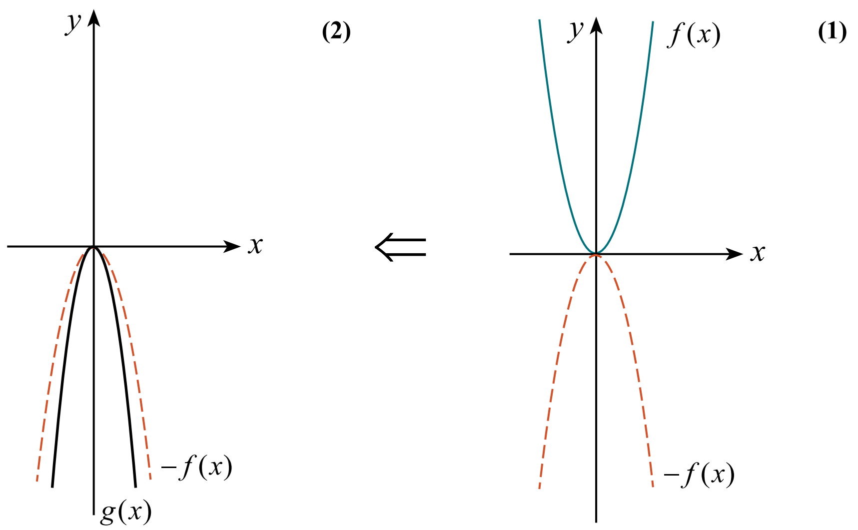
مثال: في المثال **(1)** مثلًا، الدّالّة $g(x)=-2f(x)$ تنتج من جرّاء تحوّلَيْن متتالِيَيْن

نُفَّذا على الدّالّة $f(x)$:

(أ) نُنفّذ على الدّالّة $f(x)$ **انعكاس بالنّسبة للمحور x** ، ونحصل على دالّة جديدة y_1 : $y_1=-f(x)$.

(ب) على الدّالّة y_1 التي حصلنا عليها نُنفّذ **توسيع عموديّ بِـ ضعفَيْن،**

ونحصل على الدّالّة $g(x)$: $g(x)=2\cdot y=2\cdot(-f(x))=-2f(x)$.



ملاحظة: يمكننا تغيير ترتيب تنفيذ التّحوّلات: أ. توسيع عموديّ / تضييق عموديّ.

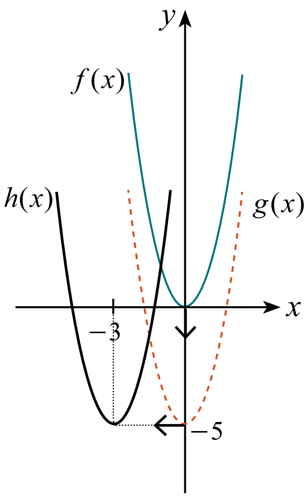
ب. انعكاس بالنّسبة للمحور x .

(2) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2$.
نُفّذَت على الدّالّة $f(x)$ الإزاحتَان التاليتَان:
(i) إزاحة عموديّة 5 وحدات إلى الأسفل.
(ii) إزاحة أُفقيّة 3 وحدات إلى اليسار.
(أ) أُكتبوا التّعبير الجبريّ الذي ينتج بعد كلّ إزاحة.
(ب) صفوا التّحولَين اللّذَيْن أُجريا على الدّالّة $f(x)$ بمساعدة رسومٍ مناسبة.

<u>الحلّ:</u>

(أ) $f(x)$ هي قطعٌ مكافئ له نقطة قيمة صُغرى.
محور تماثلها هو المستقيم الذي معادلته $x=0$ (المحور y).
نُنفّذ عليه إزاحة عموديّة 5 وحدات إلى الأسفل: $g(x)=f(x)-5=x^2-5$
على الدّالّة $g(x)$ أُجريَت إزاحة أُفقيّة 3 وحدات إلى اليسار:
$h(x)=g(x+3)=(x+3)^2-5=x^2+6x+4$

(ب) نرسم الخطّيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن النّاتجتَيْن في نفس هيئة المحاور:



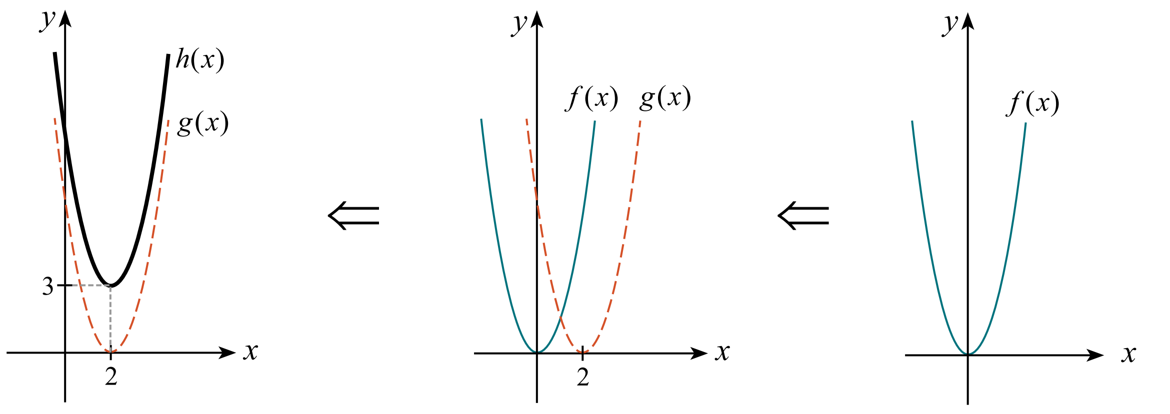
(3) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2$
نُنفّذ عليها إزاحة أُفقيّة وحدتَيْن إلى اليمين، وعلى الدّالّة النّاتجة ننفّذ إزاحة عموديّة 3 وحدات إلى الأعلى.
(أ) جدوا التّعبير الجبريّ للدّالّة الجديدة النّاتجة من تنفيذ هاتَيْن الإزاحتَيْن على الدّالّة الأصليّة.
(ب) صفوا التّحولَين اللّذَيْن نُفّذا على الدّالّة $f(x)$ بمساعدة رسومٍ مناسبة.

<u>الحلّ:</u>

(أ) <u>في المرحلة الأولى،</u> ننفّذ إزاحة أفقيّة على الخطّ البيانيّ وحدتَيْن إلى اليمين،
تنتج دالّة جديدة نرمز لها بـ $g(x)$.
التّعبير الجبريّ لهذه الدّالّة هو: $g(x)=f(x-2)=(x-2)^2=x^2-4x+4$
<u>في المرحلة الثّانية،</u> ننفّذ على الدّالّة $g(x)$ إزاحة عموديّة 3 وحدات إلى الأعلى.
جرّاء هذا، تنتج دالّة جديدة نسمّيها $h(x)$.
التّعبير الجبريّ لهذه الدّالّة هو: $h(x)=g(x)+3=x^2-4x+7$

يتبع في الصّفحة التّالية >>>

(ب)



المرحلة الثّانية	المرحلة الأولى	الدّالّة الأصليّة
إزاحة 3 وحدات إلى الأعلى	إزاحة وحدتَيْن إلى اليمين	$f(x)$
النّتيجة النّهائيّة $h(x)$	تنتج الدّالّة $g(x)$	
(الخطّ البيانيّ الأسود الغامق)	(الخطّ البيانيّ المتقطّع)	

(4) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2$

ما التّحوّلات المتتالية التي يجب تنفيذها على الدّالّة المعطاة كي نحصل على الدّالّة $g(x)=\left|2(x^2-3)\right|$ ؟

الحلّ:

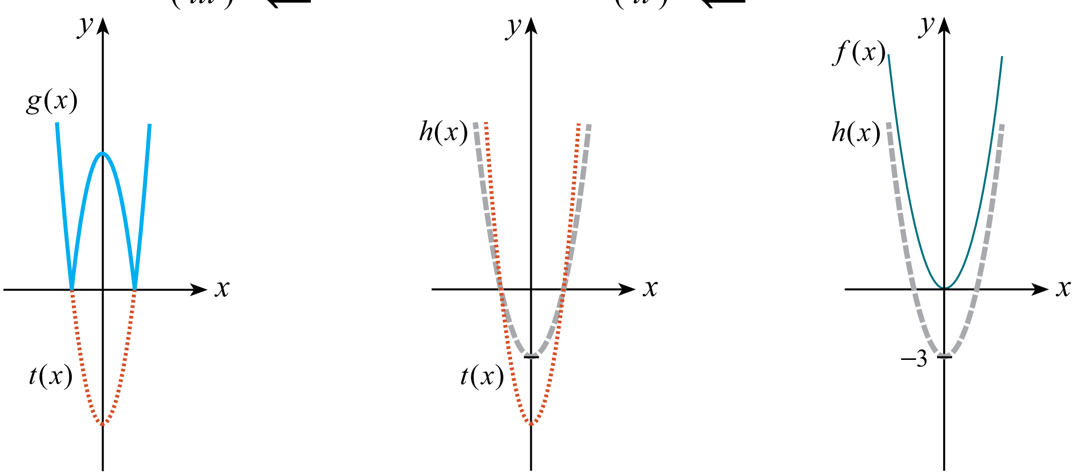
(أ) $h(x)=x^2-3=f(x)-3$ إزاحة 3 وحدات إلى الأسفل.

(ب) $t(x)=2(x^2-3)=2\cdot h(x)$ توسيع عموديّ بِـ ضعفَيْن.

(ج) $g(x)=\left|2(x^2-3)\right|=\left|t(x)\right|$ قيمة مطلقة.

نصف الخطوط البيانيّة للدّوالّ $f(x)$, $h(x)$, $t(x)$ وَ $g(x)$.

(i) ⇐ (ii) ⇐ (iii)



(5) **توضيح محوسب: مزيج من التّحوّلات إزاحة أُفقيّة وإزاحة عموديّة**

أدخلوا إلى الرّابط التّالي: https://www.geogebra.org/classic/wdfjy3mt

(أ) في هذا الرّابط الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)=(x+a)^2$ ملوّن باللّون الأخضر.
غيّروا البارامتر a كما يحلو لكم بواسطة الشّريط وافحصوا كيف يتغيّر الخطّ البيانيّ الأخضر.

(ب) الدّالّة $g(x)$ تُحقّق $g(x)=f(x+b)$.
خطّها البيانيّ ملوّن باللّون الأزرق.
غيّروا البارامتر b كما يحلو لكم وافحصوا ماذا يحدث للخطّ الأزرق مقارنةً مع الخطّ الأخضر.

(ج) الدّالّة $h(x)$ تُحقّق $h(x)=g(x)+c$. خطّها البيانيّ ملوّن باللّون الأحمر.
غيّروا البارامتر c كما يحلو لكم بواسطة الشّريط وافحصوا كيف يتغيّر الخطّ البيانيّ الأحمر مقارنةً مع الخطّ البيانيّ الأزرق.

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ

في التّمارين (1) – (12) معطى أنّه تمّ تنفيذ تحوّلٍ واحد على الدّالّة $f(x)$.

(1) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=x^2$

نُفّذت على الدّالّة إزاحة أفقيّة وحدتَيْن إلى اليمين. ما هي الدّالّة الجديدة ؟

(2) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2-4x+8$

لتكن الدّالّة $g(x)$ انعكاسًا حول المحور x للدّالّة $f(x)$. ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(3) معطاة الدّالّة $f(x)=3x+7$

نُنفّذ عليها توسيعًا عموديًا بِـ 8 أضعاف.

(أ) ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة الجديدة ؟

(ب) أُرسموا الخطّيْن البيانيّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$ في نفس هيئة المحاور.

(4) معطاة الدّالّة $f(x)=x^3$

نزيح الخطّ البيانيّ للدّالّة 3 وحدات إلى اليسار.

أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$.

(5) معطاة الدّالّة $f(x)=2x+1$ ومعطاة الدّالّة $g(x)=|f(x)|$.

(أ) أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$.

(ب) أُكتبوا التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$.

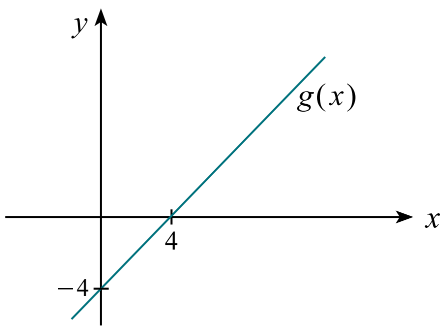
(6) معطاة الدّالّة $f(x)=\sqrt{x}$.
أُزيح الخطّ البيانيّ للدّالّة وحدتَيْن إلى اليمين.
(أ) أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة الجديدة $g(x)$.
(ب) أُكتبوا التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$.

(7) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2-5x+6$ ومعطاة الدّالّة $g(x)=x^2-5x+11$.
ما هو التّحوّل الذي نُفّذ على الدّالّة $\boldsymbol{f(x)}$ كي نحصل على الدّالّة $g(x)$ ؟

(8) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2-5x+6$ ومعطاة الدّالّة $g(x)=-x^2+5x-6$
ما هو التّحوّل الذي يُحوّل الدّالّة $\boldsymbol{f(x)}$ إلى الدّالّة $g(x)$ ؟

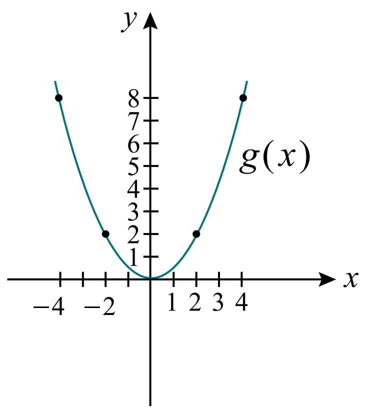
(9) معطاة الدّالّة $f(x)=x+3$ ومعطاة الدّالّة $g(x)=3x+9$
(أ) ما هو التّحوّل الذي يُحوّل الدّالّة $\boldsymbol{f(x)}$ إلى الدّالّة $g(x)$?
(ب) أُرسموا الخطّيْن البيانيّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$ في نفس هيئة المحاور.

(10) معطاة الدّالّة $f(x)=x$
ومعطى الرّسم للخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$:



ما هو التّحوّل الذي نُفّذ على الدّالّة $\boldsymbol{f(x)}$ كي نحصل على الدّالّة $g(x)$ ،
وما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(11) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2$
(أ) أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $\boldsymbol{f(x)}$.
(ب) معطى رسمٌ للخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$:

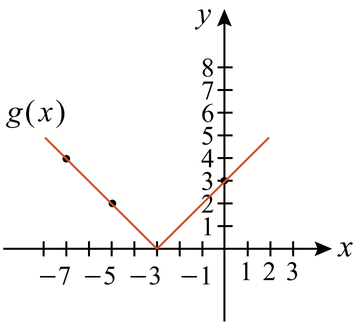


ما التّحوّل الذي نُفّذ على الدّالّة $\boldsymbol{f(x)}$ كي نحصل على $g(x)$ ،
وما التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ ؟
(ج) أُرسموا الخطّيْن البيانيّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$ في نفس هيئة المحاور.

(12) معطاة الدّالّة $f(x)=x+3$.

(أ) أرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $\boldsymbol{f(x)}$.

(ب) معطى رسمٌ للخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$:



ما هو التّحوّل الذي ينقل الدّالّة $\boldsymbol{f(x)}$ إلى الدّالّة $g(x)$ ،

وما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ج) أرسموا الخطّين البيانيّين للدّالّتين $f(x)$ وَ $g(x)$ في نفس هيئة المحاور.

في التّمارين (13) – (24) معطى أنّه أُجرِيَ تحوّلان على الدّالّة $\boldsymbol{f(x)}$.

(13) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2$.

نُنفّذ على الدّالّة $f(x)$ إزاحة عموديّة 3 وحداتٍ إلى الأعلى ونحصل على الدّالّة $g(x)$.

بعدئذٍ، نُنفّذ على الدّالّة $g(x)$ إزاحة أُفقيّة وحدتَيْن إلى اليمين ونحصل على الدّالّة $h(x)$.

ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(14) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2-5x+6$.

نُنفّذ على الدّالّة $f(x)$ انعكاس حول المحور x ونحصل على الدّالّة $g(x)$.

بعدئذٍ، نُنفّذ على الدّالّة $g(x)$ انعكاس حول المحور y ونحصل على الدّالّة $h(x)$.

ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(15) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2-5x+6$.

نُنفّذ على الدّالّة $f(x)$ انعكاس حول المحور y ونحصل على الدّالّة $g(x)$.

بعدئذٍ، نُنفّذ على الدّالّة $g(x)$ انعكاس حول المحور x ونحصل على الدّالّة $h(x)$.

ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(16) معطاة الدّالّة $f(x)=\sqrt{x}$.

نُنفّذ على الدّالّة $f(x)$ انعكاس حول المحور x ونحصل على الدّالّة $g(x)$.

بعدئذٍ، نُنفّذ على الدّالّة $g(x)$ انعكاس حول المحور y ونحصل على الدّالّة $h(x)$.

أرسموا الخطوط البيانيّة للدّوالّ $f(x)$ ، $g(x)$ وَ $h(x)$.

(17) معطاة الدّالّة $f(x)=x+5$.

الدّالّة $g(x)$ تُحقّق: $g(x)=|x+5|$.

نُنفّذ على الدّالّة $g(x)$ إزاحة عموديّة 3 وحدات إلى الأعلى ونحصل على الدّالّة $h(x)$.

أرسموا الخطوط البيانيّة للدّوالّ $f(x)$ ، $g(x)$ وَ $h(x)$.

(18) معطاة الدّالّة $f(x)=x^3$.

نُنفّذ على الدّالّة $f(x)$ تضييق عموديّ بالعامل $\frac{1}{2}$, ونحصل على الدّالّة $g(x)$.

بعدئذٍ، نُنفّذ على الدّالّة $g(x)$ إزاحة أفقيّة إلى اليمين 6 وحدات ونحصل على الدّالّة $h(x)$.

أرسموا الخطوط البيانيّة للدّوالّ $f(x)$ ، $g(x)$ وَ $h(x)$.

(19) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2-6x+8$.

★ بعد تنفيذ تحوّلَيْن نتجت الدّالّة التّالية: $h(x)=x^2-10x+27$.

إشرحوا كيف نتج الخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$ من الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

(20) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2-5x+6$

★ ومعطاة الدالّة $h(x)=-x^2-5x-6$ التي نتجت بعد تنفيذ تحوّلَيْن على الدّالّة $f(x)$.

إستعينوا بالدّالّة $g(x)=-f(x)$ ، وارسموا الخطوط البيانيّة للدّوالّ $f(x)$, $g(x)$ وَ $h(x)$ ، وصفوا بكلمات ما العمليّتان اللّتان نُفّذتا على الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ للحصول على الخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$.

(21) معطاة الدّالّة $f(x)=\sqrt{x}$

ومعطاة الدّالّة $h(x)=-\sqrt{-x}$.

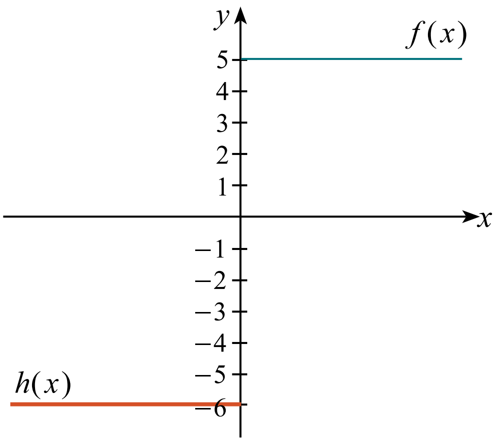
صفوا بكلمات ما العمليّتان اللّتان نُفّذتا على الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ للحصول على الخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$.

(22) معطاة الدّالّة $f(x)=5$ ، المعرّفة في المجال $x\geq 0$ ،

ومعطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$ المعرّفة في المجال $x\leq 0$.

(أ) صفوا بكلمات ما العمليّتان اللّتان نُفّذتا على الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ للحصول على الخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$.

(ب) ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $h(x)$ ؟

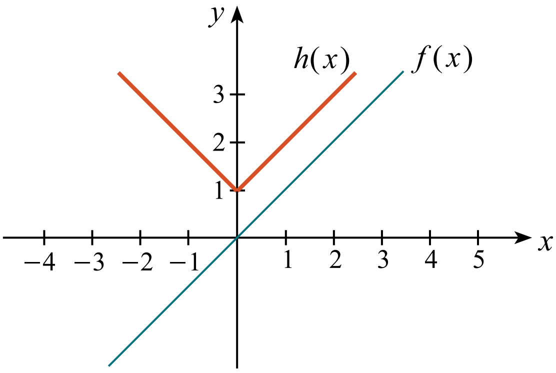


(23) معطاة الدّالّة $f(x)=x$.

ومعطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$.

(أ) صفوا بكلمات ما العمليّتان اللّتان نُفّذتا على الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ للحصول على الخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$.

(ب) ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $h(x)$ ؟

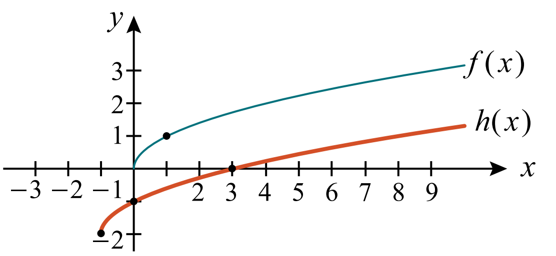


(24) معطاة الدّالّة $f(x)=\sqrt{x}$.

ومعطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$.

(أ) صفوا بكلمات ما العمليّتان اللّتان نُفّذتا على الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ للحصول على الخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$.

(ب) ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $h(x)$ ؟



(25) معطاة الدّالّة $f(x)=2x$.

معطى أنّ الدّالّة $g(x)$ تُنفّذ على كلّ دالّة، تَحَوُّلٌ هوَ **إزاحة أُفقيّة 3 وحدات إلى اليمين**
والدّالّة $h(x)$ تُنفّذ على كلّ دالّة، تَحَوُّلٌ هو **قيمة مطلقة**.

(أ) أُرسموا بمساعدة برمجة DESMOS الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

(ب) أيّ التّحوّلات التّالية تلائم وصف تحوّل الدّالّة $g(x)$ على الدّالّة $f(x)$ ؟

1. $g(x)=f(x-3)$ 2. $g(x)=f(x+3)$ 3. $g(x)=3f(x)$

افحصوا جوابكم بمساعدة برمجة DESMOS .

(ج) أزيلوا عن اللّوح الجبريّ جميع الدّوالّ عدا الدّالّة $f(x)$ ، وارسموا بمساعدة برمجة DESMOS التّحوّلات التّالية الواحد تلوَ الآخر:

1. $g(x)$ على الدّالّة $f(x)$: $g(x)=f(x-3)$.
2. $h(x)$ على الدّالّة $g(x)$: $h(x)=|g(x)|$.

وانسخوا في دفاتركم الخطّ البيانيّ الأخير الذي حصلتم عليه.

(د) أزيلوا عن اللّوح الجبريّ جميع الدّوالّ عدا الدّالّة $f(x)$.
ارسموا بمساعدة برمجة DESMOS التّحوّلات التّالية الواحد تلوَ الآخر:

1. $h(x)$ على الدّالّة $f(x)$: $h(x)=|f(x)|$.
2. $g(x)$ على الدّالّة $h(x)$: $g(x)=h(x-3)$.

وانسخوا في دفاتركم الخطّ البيانيّ الأخير الذي حصلتم عليه.

(هـ) ما الفرق بين الخطّيْن البيانيّيْن اللّذيْن نسختموهما في دفاتركم في البندَيْن (ج) وَ (د) ؟

(و) بدّلوا في برمجة DESMOS الدّالّة $f(x)$ بدالّةٍ أخرى كما يحلو لكم، ونفّذوا عليها نفس التّحوّلات الواحد تلو الآخر كما في البندَيْن (ج) وَ (د) :
في المرّة الأولى: في البداية، إزاحة ومن ثمّ قيمة مطلقة، وفي المرّة الثّانية: في البداية، قيمة مطلقة ومن ثمّ إزاحة.
هل حصلتم الآن على خطّيْن بيانيّيْن مختلفَيْن ؟ أكتبوا استنتاجًا.

في التّمارين (26) – (37) معطى أنّه تمّ تنفيذ 3 تحوّلات على الدّالّة $f(x)$.

(26) معطاة الدّالّة $f(x)=x+5$

على $f(x)$ نُفّذ: – انعكاس حول المحور x .
– انعكاس حول المحور y .
– انعكاس حول المحور x .

نتجت دالّة جديدة $g(x)$. أكتبوا تعبيرًا جبريًّا مناسبًا للدّالّة الجديدة.

(27) معطاة الدّالّة $f(x)=x^3$ ومعطى تحوّلاتٌ على الدّالّة $f(x)$:

– توسيع عموديّ بـِ 3 أضعاف.
– إزاحة أفقيّة 4 وحدات إلى اليمين.
– تضييق عموديّ بالعامل $\frac{1}{2}$.

نتجت دالّة جديدة $h(x)$. أكتبوا تعبيرًا جبريًّا مناسبًا للدّالّة الجديدة.

(28) معطاة الدّالّة $f(x)=\sqrt{x}$ ومعطى تحوّلاتٌ على الدّالّة $f(x)$:

– انعكاس حول المحور x .

– انعكاس حول المحور y .

– توسيع عموديّ بـِ 4 أضعاف.

نتجت دالّة جديدة $i(x)$. أكتبوا تعبيرًا جبريًّا مناسبًا للدّالّة الجديدة.

(29) معطاة الدّالّة $f(x)=2x+4$ ومعطى تحوّلاتٌ على الدّالّة $f(x)$:

★ $g(x)$ – تضييق عموديّ على $f(x)$ بالعامل $\frac{1}{2}$.

$h(x)$ – انعكاس الدّالّة $g(x)$ حول المحور x .

$i(x)$ – انعكاس الدّالّة $h(x)$ حول المحور y .

أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $i(x)$.

(30) معطاة الدّالّة $f(x)=x+2$ ومعطى تحوّلاتٌ على الدّالّة $f(x)$:

★ $g(x)$ – إزاحة عموديّة للدّالّة $f(x)$ وحدتَيْن إلى الأعلى.

$h(x)$ – إزاحة أفقيّة للدّالّة $g(x)$ وحدة واحدة إلى اليمين.

$i(x)$ – تضييق عموديّ للدّالّة $h(x)$ بالعامل $\frac{1}{2}$.

أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $i(x)$.

(31) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2-3$ ومعطى تحوّلاتٌ على الدّالّة $f(x)$

★ بحسب التّرتيب التّالي: – توسيع عموديّ بـِ ضعفَيْن .

– قيمة مطلقة.

– تضييق عموديّ بالعامل $\frac{1}{4}$.

نتجت دالّة جديدة $i(x)$. أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $i(x)$.

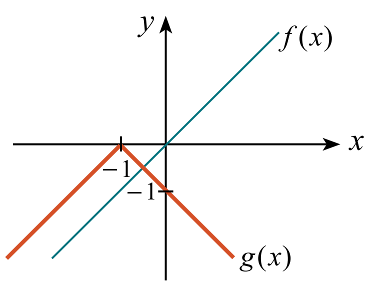
(32) معطى $f(x)=x+5$ وَ $g(x)=|2x+3|$.

★ اشرحوا كيف نتجت الدّالّة $g(x)$ بواسطة 3 تحوّلاتٍ على الدّالّة $f(x)$.

(33) معطى في الرّسم الخطّان البيانيّان للدّالّتَيْن: $f(x)=x$ وَ $g(x)$.

★ إشرحوا كيف يمكن الوصول من الدّالّة $f(x)$ إلى الدّالّة $g(x)$

بواسطة 3 تحوّلات مختلفة.



(34) معطى في الرّسم الخطّان البيانيّان للدّالّتَيْن:

$f(x)=2x^2$ وَ $g(x)=\left|x^2-4\right|$.

إشرحوا كيف يمكن الوصول من الدّالّة $f(x)$ إلى $g(x)$

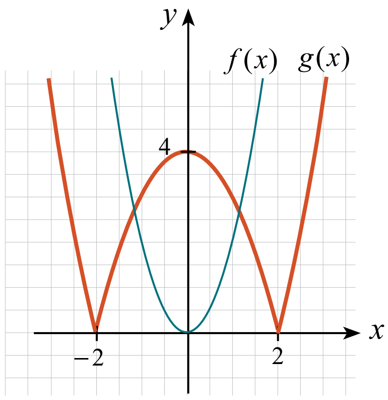
بواسطة 3 تحوّلات مختلفة، أكملوا النّاقص:

التّحوّل I : تضييق عموديّ بالعامل ____ .

التّحوّل II : إزاحة عموديّة ____ وحدات إلى ________ .

التّحوّل III : ________________________

____

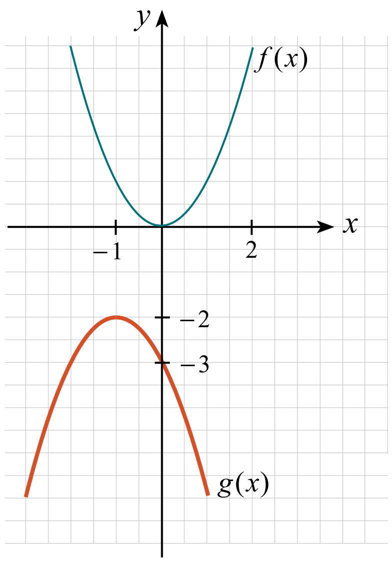


(35) معطى في الرّسم: الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)=x^2$

والقطع المكافئ الذي يصف الدّالّة $g(x)$.

إشرحوا كيف يمكن الوصول من الدّالّة $f(x)$ إلى $g(x)$

بواسطة 3 تحوّلات مختلفة.



(36) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2$.

ومعطاة الدّالّة $g(x)=2\cdot f(x+3)+5$

(أ) إشرحوا بكلماتٍ ما هي التحوّلات التي نُفّذت على الدّالّة $f(x)$ للحصول على الدّالّة $g(x)$.

(ب) أُرسموا الخطّيْن البيانيّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$ في نفس هيئة المحاور.

(ج) ماذا يمكنكم القول عن صفتَي الدّالّة $g(x)$ (رأس، محور التّماثل) بالنّسبة لهاتَيْن الصفتَيْن في $f(x)$ ؟

(37) معطاة الدّالّة $f(x)=2x+5$ ومعطاة الدّالّة $g(x)=-f(-x)-5$.

(أ) إشرحوا بكلمات ما هي التحوّلات التي نُفّذت على الدّالّة $f(x)$ للحصول على الدّالّة $g(x)$.

(ب) ما هو التّعبير الجبريّ الملائم للدّالّة $g(x)$ ؟

(ج) أُرسموا الخطّيْن البيانيَّيْن للدّالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$ في نفس هيئة المحاور.

(38) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2-6x+8$ ومعطاة الدّالّة $g(x)=\left|2f(x-1)\right|$

(أ) ما هي التّحوّلات التي يجب تنفيذها على الدّالّة $f(x)$ للحصول على الدّالّة $g(x)$ ؟

(ب) ما هو التّعبير الجبريّ الملائم للدّالّة $g(x)$ ؟

(ج) ماذا يمكنكم القول عن صفات الدّالّة $g(x)$ (نقاط قصوى، مجالات فيها الدّالّة موجبة، مجالات تصاعد وتنازل)

مقارنةً مع هذه الصّفات في الدّالّة $f(x)$ ؟

(39) معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

الدّالّة $g(x)$ تُحقّق $g(x)=f(x)-4$.

(أ) أرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$.

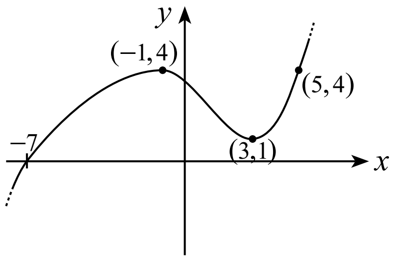
(ب) سجّلوا إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $g(x)$ وحدّدوا نوعها.

(ج) سجّلوا مجالات تنازل وتصاعد الدّالّة $g(x)$.

(د) سجّلوا المجالات الموجبة والمجالات السّالبة للدّالّة $g(x)$.

(هـ) لأيّ قيم k يقطع المستقيم $y=k$ الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$:

(i) في نقطةٍ واحدة ؟ (ii) في نقطتَيْن ؟ (iii) في 3 نقاط ؟



(40) معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

الدّالّة $g(x)$ تُحقّق $g(x)=-f(x)$.

(أ) أرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$.

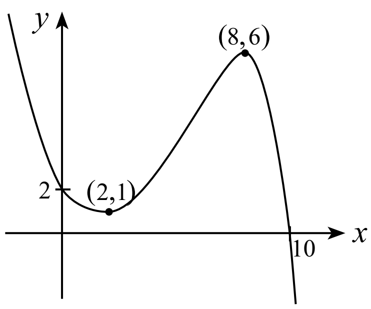
(ب) سجّلوا إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $g(x)$ وحدّدوا نوعها.

(ج) سجّلوا مجالات تنازل وتصاعد الدّالّة $g(x)$.

(د) سجّلوا المجالات الموجبة والمجالات السّالبة للدّالّة $g(x)$.

(هـ) لأيّ قيم k يقطع المستقيم $y=k$ الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$:

(i) في نقطةٍ واحدة ؟ (ii) في نقطتَيْن ؟ (iii) في 3 نقاط ؟



(41) معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

الدّالّة $g(x)$ تُحقّق $g(x)=2f(x)$.

(أ) أرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$.

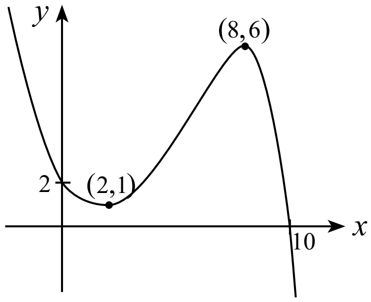
(ب) سجّلوا إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $g(x)$ وحدّدوا نوعها.

(ج) سجّلوا مجالات تنازل وتصاعد الدّالّة $g(x)$.

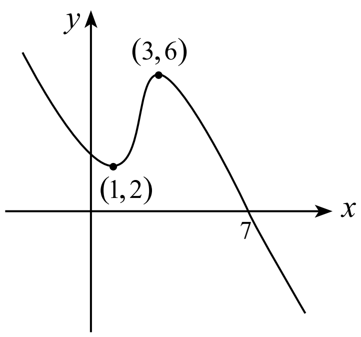
(د) سجّلوا المجالات الموجبة والمجالات السّالبة للدّالّة $g(x)$.

(هـ) لأيّ قيم k يقطع المستقيم $y=k$ الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$:

(i) في نقطةٍ واحدة ؟ (ii) في نقطتَيْن ؟ (iii) في 3 نقاط ؟



גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023



(42) معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

الدّالّة $g(x)$ تُحقّق $g(x)=f(x+3)$.

(أ) أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$.

(ب) سجّلوا إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $g(x)$ وحدّدوا نوعها .

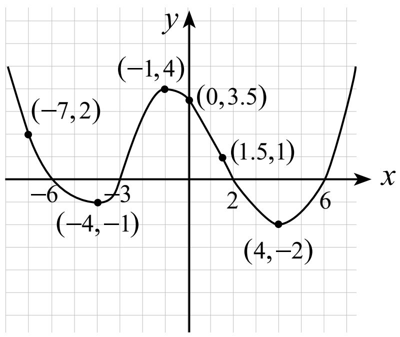
(ج) سجّلوا مجالات تنازل وتصاعد الدّالّة $g(x)$.

(د) سجّلوا المجالات الموجبة والمجالات السّالبة للدّالّة $g(x)$.

(هـ) لأيّ قيم k يقطع المستقيم $y=k$ الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$:

(i) في نقطةٍ واحدة ؟ (ii) في نقطتَيْن ؟ (iii) في 3 نقاط ؟

(ح) هل جوابكم للبند (هـ) كان سيتغيّر لو سُجّل مكان $g(x)$ الدّالّة $f(x)$ ؟



(43) معطى الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$.

الدّالّة $g(x)$ تُحقّق $g(x)=|f(x)|-1$.

★ (أ) أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$.

(ب) سجّلوا إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $g(x)$ وحدّدوا نوعها .

(ج) سجّلوا مجالات تنازل وتصاعد الدّالّة $g(x)$.

(د) لأيّ قيم k يقطع المستقيم $y=k$ الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$:

(i) في نقطتَيْن ؟ (ii) في 3 نقاط ؟

(iii) في 4 نقاط ؟ (iv) في 5 نقاط ؟

(44) معطاة الدّالّة $f(x)=x^2-7$.

ما هي التّحوّلات التي يجب تنفيذها كي تكون النّقطة القصوى:

(أ) نهاية صُغرى، والإحداثيّ y فيها 5 ؟

(ب) نهاية عُظمى، والإحداثيّ y فيها -4 ؟

تمارين إضافيّة للمراجعة في موضوع تحوّلات دوالّ - أُنظروا الصّفحات 292 - 295 في المُلحق 2.أ .

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

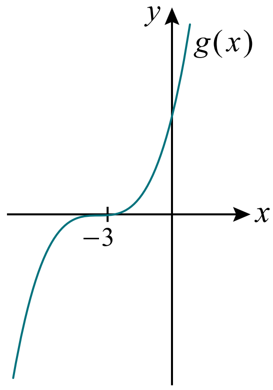
أجوبة نهائيّة

(1) $g(x)=(x-2)^2=x^2-4x+4$

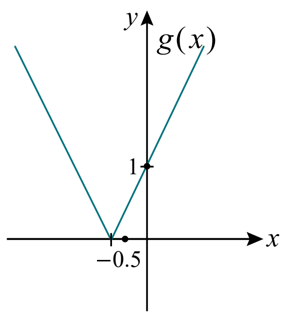
(2) $g(x)=-[x^2-4x+8]=-x^2+4x-8$

(3) (أ) $g(x)=8(3x+7)=24x+56$ (ب) افحصوا مع المعلّم في الصّفّ.

(4)

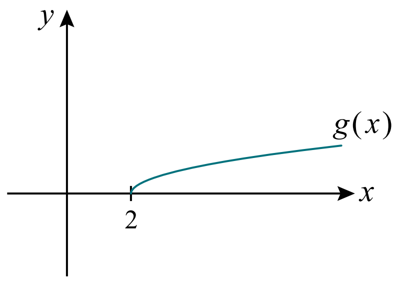


(5) (أ)



(ب) افحصوا مع المعلّم في الصّفّ.

(6) (أ)



(ب) التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ هو: $g(x)=\sqrt{x-2}$

<u>**انتبهوا:**</u> مجال تعريف $f(x)$ هو: $x\geq 0$

مجال تعريف $g(x)$ هو: $x\geq 2$

(7) نُفّذت على $f(x)$ إزاحة عموديّة 5 وحدات إلى الأعلى: $g(x)=f(x)+5$

(8) التّحوّل هو انعكاس حول المحور x: $g(x)=-f(x)$

(9) (أ) التّحوّل هو توسيع عموديّ بِـ 3 أضعاف: $g(x)=3\cdot f(x)$

(ب) افحصوا مع المعلّم في الصّفّ.

(10) إزاحة للدّالّة $f(x)$ 4 وحدات إلى اليمين $\Leftarrow g(x)=f(x-4)=x-4$.

أو: إزاحة للدّالّة $f(x)$ 4 وحدات إلى الأسفل $\Leftarrow g(x)=f(x)-4=x-4$.

(11) (أ) افحصوا مع المعلّم في الصّف (أو بواسطة برمجة DESMOS).

(ب) تضييق عموديّ للدّالّة $f(x)$ بالعامل $\frac{1}{2}$: $g(x)=\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}x^2$

(ج) افحصوا مع المعلّم في الصّف (أو بواسطة برمجة DESMOS).

(12) (أ) افحصوا مع المعلّم في الصّف (أو بواسطة برمجة DESMOS).

(ب) تحوّل قيمة مطلقة: $g(x)=|f(x)|=|x+3|$

(ج) افحصوا مع المعلّم في الصّف (أو بواسطة برمجة DESMOS).

(13) $h(x)=x^2-4x+7$

__انتبهوا:__ الاستنتاج الذي يمكن استنتاجه من التّمرين **(13)** :

إزاحة عموديّة وإزاحة أفقيّة هما عمليّتان تبادليّتان. أي، إذا نفّذنا بدايةً إزاحة عموديّة ومن ثمّ إزاحة أفقيّة، أو إذا نفّذنا بدايةً إزاحة أفقيّة ومن ثمّ إزاحة عموديّة – فسنصل إلى نفس الدّالّة.

(14) $h(x)=-x^2-5x-6$

(15) **__حلّ كامل:__**

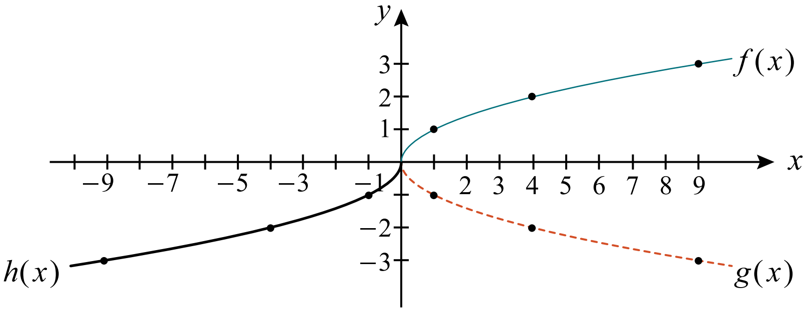
$$g(x)=f(-x)=(-x)^2-5\cdot(-x)+6$$
$$g(x)=x^2+5x+6$$
$$h(x)=-g(x)=-x^2-5x-6$$
$$h(x)=-x^2-5x-6$$

هذا نفس التّعبير كما في التّمرين **(14)** حين بدّلنا ترتيب الانعكاسات.

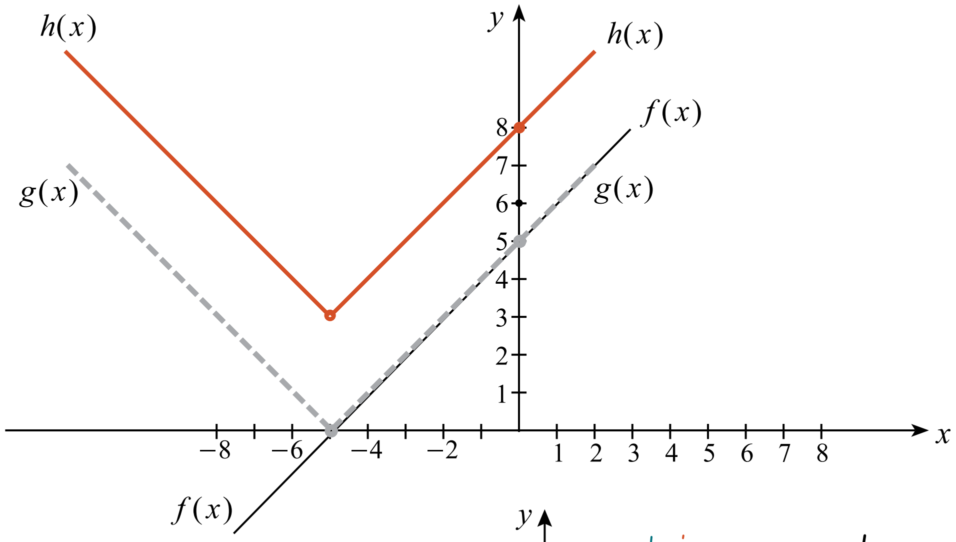
__انتبهوا:__

الاستنتاج الذي يمكن استنتاجه من التّمرينَيْن **(14)** وَ **(15)** : انعكاس حول المحور x وانعكاس حول المحور y هما عمليّتان تبادليّتان. أي، لا تختلف النّتيجة إذا نفّذنا بدايةً انعكاس حول المحور x ومن ثمّ حول المحور y أو على العكس – سنصل إلى نفس الدّالّة.

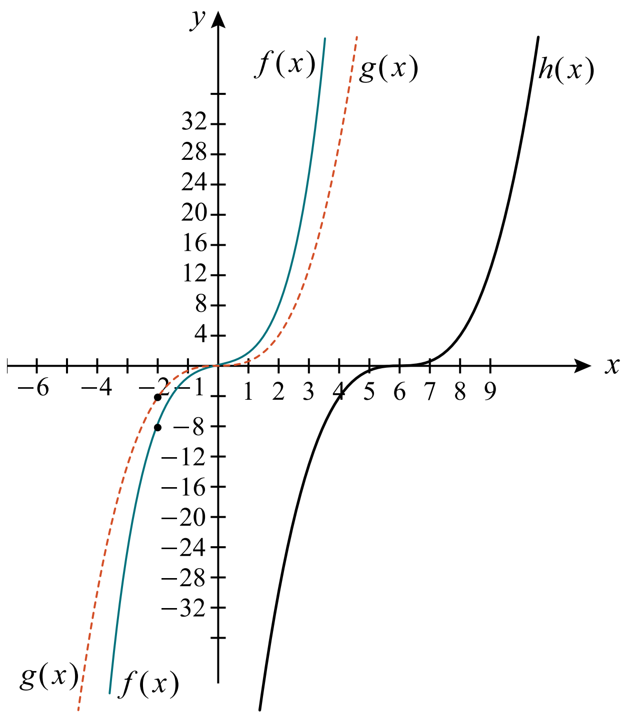
(16)



(17)



(18)



(19) **<u>حلّ كامل:</u>**

$f(x)$ وَ $h(x)$ هما دالّتان تربيعيّتان ولذا خطّهما البيانيّ هو قطعٌ مكافئ.

محور تماثل الدّالّة $f(x)$ هو $x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{2a}=\frac{6}{2}=3$.

محور تماثل الدّالّة $h(x)$ هو $x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{2a}=\frac{10}{2}=5$.

أي نُفّذ تحوّل إزاحة أفقيّة وحدتَيْن إلى اليمين. $g(x)=f(x-2)$

$$g(x)=(x-2)^2-6(x-2)+8=x^2-4x+4-6x+12+8 \Rightarrow g(x)=x^2-10x+24$$

نقارن بالنّسبة لِـ: $h(x)=x^2-10x+27$ أي: $h(x)=g(x)+3$.

لذا يجب أن نزيح $g(x)$ ، 3 وحدات إلى الأعلى: $h(x)=g(x)+3$

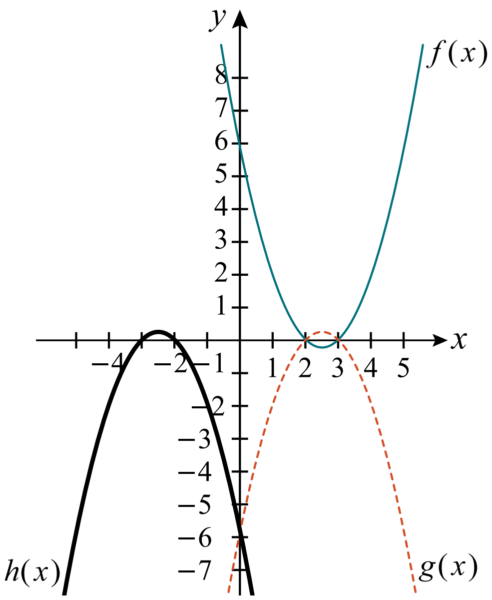
<u>إجمال:</u> الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ أُزيح وحدتَيْن إلى اليمين، ومن ثمّ أُزيح 3 وحدات إلى الأعلى.

<u>حلّ بطريقة أخرى:</u>

يمكننا معرفة التّحوّلات، إذا سجّلنا $f(x)$ وَ $h(x)$ بالتّمثيل الرّأسيّ للقطع المكافئ،

أي: $g(x)=(x-5)^2+2$ ، $f(x)=(x-3)^2-1$ ، ونستنتج أنّه يجب إزاحة الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$

وحدتَيْن إلى اليمين وَ 3 وحدات إلى الأعلى كي نحصل على الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$.



(20) حلّ كامل:

نرسم الدّالّة $f(x)$ والدّالّة $h(x)$ في هيئة محاور:

$g(x)$ هي انعكاس للدّالّة $f(x)$ حول المحور x.

$h(x)$ هي انعكاس للدّالّة $g(x)$ حول المحور y أو إزاحة أفقيّة 5 وحدات إلى اليسار.

ملاحظة: يمكننا الوصول إلى نفس النّتائج إذا سجّلنا:

$$f(x)=(x-2.5)^2-0.25$$

$$h(x)=-(x^2+5x+6)=-(x+2.5)^2+0.25=-[(x+2.5)^2-0.25]=-f(x+5)$$

الإشارة – قبل القوسَيْن في الدّالّة $h(x)$ تدلّ على الانعكاس حول المحور x.

والإزاحة الأفقيّة 5 إلى اليسار تنتج من العلاقة بين التّعبيرَيْن: $(x+0.25)^2$ وَ $(x-0.25)^2$.

(21) انعكاس حول المحور x ← انعكاس حول المحور y (أو بترتيبٍ عكسيّ).

(22) (أ) انعكاس حول المحور y ← إزاحة عموديّة 11 وحدة إلى الأسفل (أو بترتيبٍ عكسيّ).

(ب) $h(x)=-6$ ، في المجال $x\le 0$.

(23) (أ) قيمة مطلقة للدّالّة $f(x)$ ← إزاحة عموديّة وحدة واحدة إلى الأعلى.

(ب) $h(x)=|x|+1$

(24) (أ) إزاحة عموديّة وحدتَيْن إلى الأسفل ← إزاحة أفقيّة وحدة واحدة إلى اليسار (أو بترتيبٍ عكسيّ).

(ب) $h(x)=\sqrt{x+1}-2$

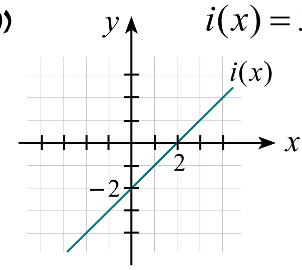
(25) (ب) 1.

(و) إزاحة أفقيّة على دالّة معيّنة ومن ثمّ قيمة مطلقة، مُطابقٌ لتنفيذ قيمة مطلقة على الدّالّة ومن ثمّ إزاحة أفقيّة. (التّحوّلان إزاحة أفقيّة وقيمة مطلقة تبادليّان)

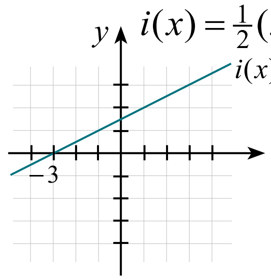
بكلماتٍ أخرى: ترتيب تنفيذ هذَيْن التّحوّلَيْن لا يُغيّر النّتيجة النّهائيّة، الخطّان البيانيّان للدّالّتَيْن الجديدَتَيْن مُتطابقان في الحالتَيْن لأنّ الدّوالّ الجديدة مُتطابقة.

(26) $g(x)=5-x$ **(27)** $h(x)=1.5(x-4)^3$ **(28)** $i(x)=-4\sqrt{-x}$

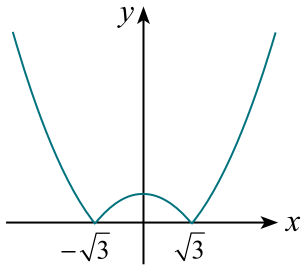
(29) $i(x) = x - 2$



(30) $i(x) = \frac{1}{2}(x+3)$

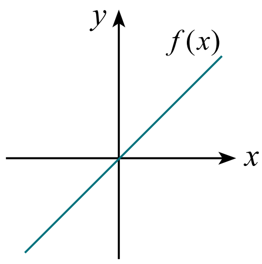


(31) $i(x) = |0.5(x^2 - 3)|$



(32) توسيع عموديّ بِـ ضعفَيْن $\Leftarrow$ إزاحة عموديّة 7 وحدات إلى الأسفل $\Leftarrow$ قيمة مطلقة.

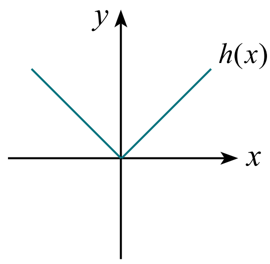
(33) **حلّ كامل:**



الدّالّة المعطاة

$f(x)$

$\Rightarrow$

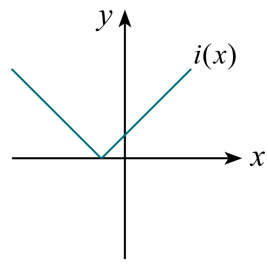


قيمة مطلقة

(على $f(x)$)

$h(x) = |x|$

$\Rightarrow$

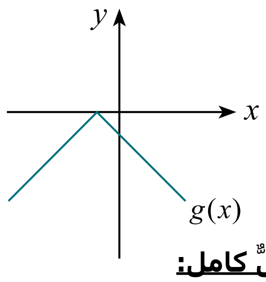


إزاحة إلى اليسار وحدة واحدة

(على $h(x)$)

$i(x) = |x+1|$

$\Downarrow$



انعكاس حول المحور x (على $i(x)$)

$g(x) = -|x+1|$

(34) **حلّ كامل:**

الدّالّة المعطاة

$f(x) = 2x^2$

$\Downarrow$

تضييق عموديّ بالعامل $\frac{1}{2}$

$h(x) = \frac{1}{2} f(x) = x^2$

$\Rightarrow$

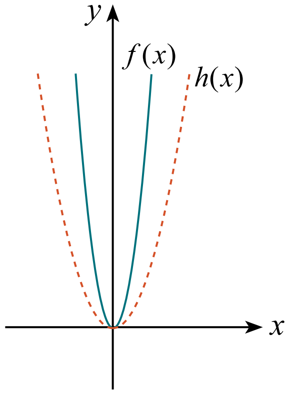
إزاحة عموديّة 4 وحدات إلى الأسفل

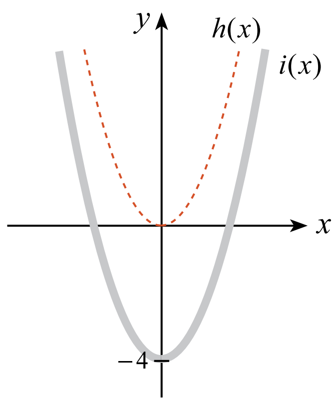
$i(x) = h(x) - 4 = x^2 - 4$

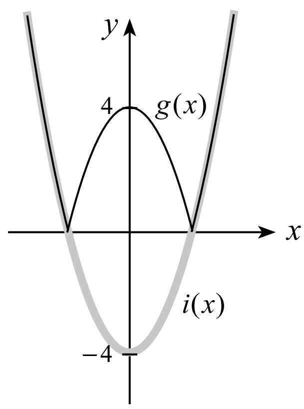
$\Rightarrow$

قيمة مطلقة

$g(x) = |x^2 - 4|$





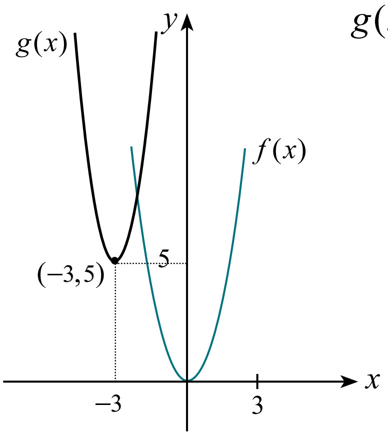


גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

(35) – إزاحة أفقيّة وحدة واحدة إلى اليسار (على $f(x)$) ← $h(x)=(x+1)^2$
– انعكاس حول المحور x (على $h(x)$) ← $i(x)=-(x+1)^2$
– إزاحة عموديّة وحدتَيْن إلى الأسفل (على $i(x)$) ← $g(x)=-(x+1)^2-2$

(36) حلّ كامل:

(أ) $f(x)=x^2 \Rightarrow g(x)=2\cdot f(x+3)+5$
– التّحوّل الأوّل هو إزاحة أفقيّة إلى اليسار $f(x)$ بِـ 3 وحدات: $h(x)=f(x+3)$
– التّحوّل الثّاني هو توسيع عموديّ بِـ ضعفَيْن على الدّالّة النّاتجة: $i(x)=2h(x)$
– التّحوّل الثّالث هو إزاحة عموديّة 5 وحدات إلى الأعلى: $g(x)=i(x)+5$



(ب) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.
(ج) رأس القطع المكافئ للدّالّة $f(x)$ هو $(0,0)$
ورأس القطع المكافئ للدّالّة $g(x)$ هو $(-3,5)$.
أي أنّ رأس القطع المكافئ للدّالّة $f(x)$ أُزيح 3 وحدات إلى اليسار
وَ 5 وحدات إلى الأعلى.
محور التّماثل تغيّر من المحور y ($x=0$)
ليكون المستقيم $x=-3$.
أي أنّ محور التّماثل زاح 3 وحدات إلى اليسار.

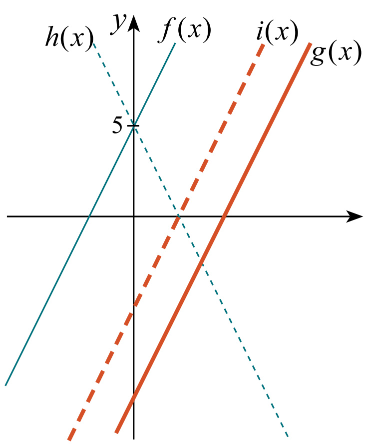
(37) حلّ كامل:

(أ) $f(x)=2x+5 \Rightarrow g(x)=-f(-x)-5$
نتقدّم خطوةً خطوةً.
نُعرّف $h(x)=f(-x)$ – هذه دالّة تنتج من انعكاس الدّالّة $f(x)$ حول المحور y.
نُعرّف $i(x)=-h(x)$ – هذه دالّة تنتج من انعكاس الدّالّة $h(x)$ حول المحور x.
نُعرّف $g(x)=i(x)-5$ – هذه دالّة تنتج من إزاحة عموديّة للدّالّة $i(x)$ بِـ 5 وحدات إلى الأسفل.
للإجمال، كي نصل إلى $g(x)$ نُنفّذ 3 تحوّلات على الدّالّة $f(x)$:
تحوّل انعكاس حول المحور y، تحوّل انعكاس حول المحور x وإزاحة عموديّة بِـ 5 وحدات إلى الأسفل.

(ب) نجد الآن التّعبير الجبريّ الملائم للدّالّة $g(x)$:

$$f(x)=2x+5$$
$$g(x)=-f(-x)-5=-[2(-x)+5]-5=$$
$$=-[-2x+5]-5=2x-5-5=2x-10$$
$$\Rightarrow g(x)=2x-10$$

(ج) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.



(38) <u>**حلٌّ كامل:**</u>

(أ) التّحوّلات هي:
- إزاحة إلى اليمين وحدة واحدة.
- توسيع عموديّ بِـ ضعفَيْن.
- قيمة مطلقة.

(ب) كي نحصل على التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ ،

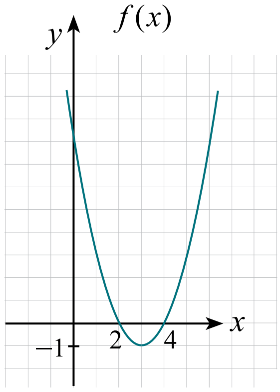
نعرّف: $h(x)=f(x-1)=(x-1)^2-6(x-1)+8=x^2-2x+1-6x+6+8$

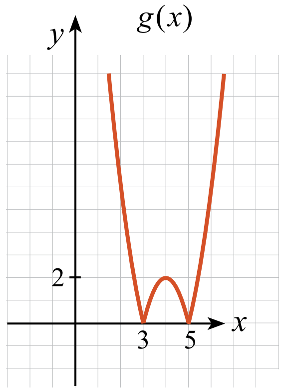
$h(x)=x^2-8x+15$

نعرّف: $i(x)=2\cdot h(x)=2x^2-16x+30$

نعرّف: $g(x)=|i(x)|=\left|2x^2-16x+30\right|$

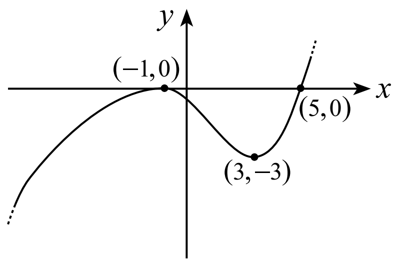
(ج) كي نقارن بين صفات الدّالّة $g(x)$ وصفات الدّالّة $f(x)$ ، نرسم الخطّيْن البيانيّيْن للدّالّتيْن:





نلاحظ أنّ:
- النّقطة القصوى $(3,-1)$ في الدّالّة $f(x)$ كانت نقطة نهاية صغرى.
- في الدّالّة $g(x)$ زاحت النّقطة القصوى إلى اليمين وإحداثياتها $(4,2)$ ، وهي الآن نقطة قيمة عظمى.
- النّقطتَيْن الصّفريّتَيْن للدّالّة $f(x)$ كانتا $(2,0)$, $(4,0)$ أصبحتا نقطتَي قيمة صُغرى $(3,0)$, $(5,0)$ للدّالّة $g(x)$.
- القيمة المطلقة للدّالّة في النّقطة القصوى كبُرَت بضعفَيْن.
- المجال الموجب للدّالّة $f(x)$ هو: $x>4$, $x<2$.
- المجال الموجب للدّالّة $g(x)$ هو: $x\neq 5$, $x\neq 3$.
- مجالا التّصاعد والتّنازل للدّالّة $f(x)$ هما: $\uparrow$: $x>3$, $\downarrow$: $x<3$.
- مجالا التّصاعد والتّنازل للدّالّة $g(x)$ هما: $\uparrow$: $3<x<4\,,\,x>5$, $\downarrow$: $x<3\,,\,4<x<5$.

(39) (أ) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.



(ب) $\max(-1,0)$, $\min(3,-3)$

(ج) $\uparrow$: $x>3$, $x<-1$

$\downarrow$: $-1<x<3$

(د) المجال الموجب للدّالّة: $x>5$

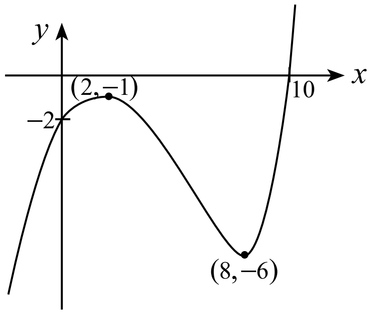
المجال السّالب للدّالّة: $-1<x<5$, $x<-1$

(هـ) (i) $k>0$, $k<-3$ (ii) $k=0$, $k=-3$

(iii) $-3<k<0$

גרסה מיוחדת - לתלמידים 18/10/2023

(40) (أ) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.



(ب) $\max(2,-1)$, $\min(8-6)$

(ج) ↑: $x<2$, $x>8$

↓: $2<x<8$

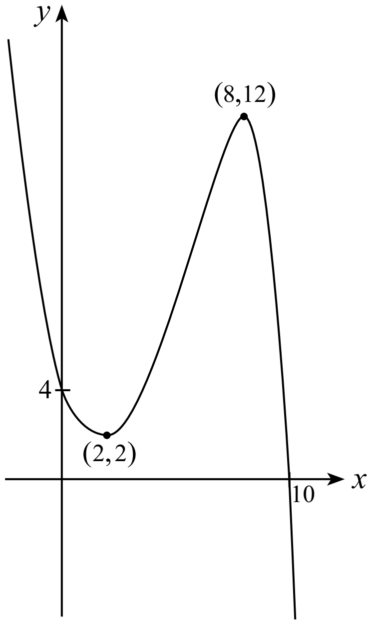
(د) المجال الموجب للدّالّة: $x>10$

المجال السّالب للدّالّة: $x<10$

(هـ) (i) $k<-6$, $k>-1$

(ii) $k=-6$, $k=-1$ (iii) $-6<k<-1$

(41) (أ) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.



(ب) $\min(2,2)$, $\max(8,12)$

(ج) ↑: $2<x<8$

↓: $x<2$, $x>8$

(د) المجال الموجب للدّالّة: $x<10$

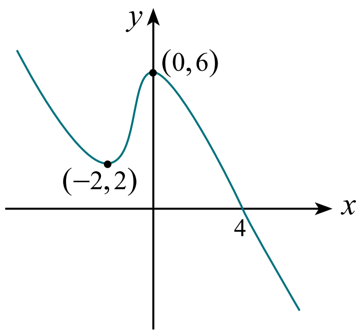
المجال السّالب للدّالّة: $x>10$

(هـ) (i) $k<2$, $k>12$

(ii) $k=2$, $k=12$

(iii) $2<k<12$

(42) (أ) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.



(ب) $\max(0,6)$, $\min(-2,2)$

(ج) مجال التّصاعد: $-2<x<0$ ، مجال التّنازل: $x>0$, $x<-2$.

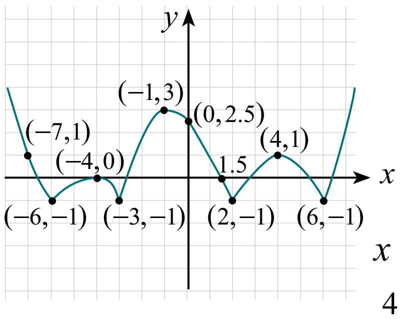
(د) المجال السّالب للدّالّة: $x<4$, المجال السّالب للدّالّة: $x>4$.

(هـ) (i) $k<2$, $k>6$

(ii) $k=2$, $k=6$ (iii) $2<k<6$

(و) كلّا.

(43) (أ) أُنظروا الرّسم في الجهة اليسرى.



(ب) $\min(-3,-1)$, $\max(-1,3)$,

$\min(-6,-1)$, $\max(-4,0)$,

$\min(2,-1)$, $\max(4,1)$ ، $\min(6,-1)$

(ج) مجالات التّصاعد: $-6<x<-4$, $-3<x<-1$, $2<x<4$, $x>6$

مجالات التّنازل: $x<-6$, $-4<x<-3$, $-1<x<2$, $4<x<6$

(د) (i) $k>3$ (ii) $k=3$ (iii) $k=-1\,,\,1<k<3$ (iv) $k=1$

(44) (أ) إزاحة عموديّة 12 وحدة إلى الأعلى.

(ب) انعكاس حول المحور x وإزاحة عموديّة 11 وحدة إلى الأسفل.

גרסה מיוחדת - לתלמידים 18/10/2023

مُلحقات

الملحق أ - مهارات جبريّة

تظهر في هذا الملحق مواضيع في المهارات الجبريّة كنتم قد تعلّمتموها في المرحلة الإعداديّة. التّمكّن من المهارات الجبريّة ضروريٌّ جدًّا كتحضيرٍ لاستعمالها في حساب التّفاضل.

الملحق أ.1: تمارين مراجعة في حلّ معادلات وهيئات معادلات من الدّرجة الأولى والثّانية

تمارين للعمل الذّاتيّ

معادلات من الدّرجة الأولى بمجهولٍ واحد

حلّوا المعادلات في التّمارين **(1)** – **(8)**.

(1) $9(12+x)-4(x-1)=5(23-2x)+9x-9$

(2) $19-2(-2x-28)=5(-x+13)-44$

(3) $x(x+4)-2=4(x-8)+x^2+x$

(4) $x^2=(x+4)(x-4)-2x$

(5) $6+(x+3)(x-3)=2x+x^2$

(6) $(x-70)(x-70)=x(x-40)$

(7) $(2x-1)(2x-1)=(4x-8)(x-2)+33$

(8) $(x+2)(x+2)-(x-3)(x-3)=30$

حلّوا المعادلات في التّمارين **(9)** – **(18)**.

(9) $\frac{4-x}{3}+\frac{2x-5}{18}=\frac{4-x}{4}$

(10) $\frac{3x-5}{2}-\frac{18-14x}{8}=\frac{4x+3}{3}$

(11) $\frac{-x-5}{5}-x+\frac{5x-4}{3}=0$

(12) $\frac{16x-3}{10}=9x-\frac{10x+7}{3}$

(13) $4-\frac{6x+3}{4}=x-\frac{5x+8}{6}$

(14) $3x-\frac{2x+9}{18}=3+\frac{22x+15}{12}$

(15) $\frac{x+10}{3}-\frac{8-x}{2}-\frac{x-2}{6}=\frac{4x+2}{10}$

(16) $\frac{7x+4}{6}-\frac{3x-2}{4}=\frac{2x-1}{3}-\frac{2x+2}{4}$

(17) $\frac{5x-1}{3}-\frac{x-1}{6}-\frac{2x+3}{4}=2-\frac{1-2x}{2}$

(18) $\frac{2x-1}{5}-\frac{3x-1}{15}-\frac{2x-3}{10}=\frac{1}{6}$

هيئة معادلتَيْن من الدّرجة الأولى بمجهولَيْن

حلّوا المعادلات في التّمارين **(19)** – **(30)**.

(19) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 3-\frac{5y-3x}{3}=\frac{7y+13}{6} \end{cases}$

(20) $\begin{cases} -x+6y=12 \\ \frac{4y}{3}=\frac{4y-5x}{3}-5 \end{cases}$

(21) $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ \frac{x-7}{2}+4y=\frac{12y-2x}{3} \end{cases}$

(22) $\begin{cases} 3x=4y-15 \\ \frac{5x+3y}{4}=\frac{x+2y}{5} \end{cases}$

(23) $\begin{cases} 6x-19=4y \\ \frac{2x+y}{4}-\frac{4x+3y}{7}=0 \end{cases}$

(24) $\begin{cases} 4x+11=6y \\ \frac{3x+5y}{2}=\frac{7y-3x}{4} \end{cases}$

(25) $\begin{cases} 7x-5y-8=0 \\ 4x-9=\frac{5(3y-x)}{4} \end{cases}$

(26) $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ \frac{5x+2y}{3}=\frac{5-7y}{2} \end{cases}$

(27) $\begin{cases} \frac{5y-2}{9}-\frac{4x-11}{3}=5 \\ \frac{8x+1}{5}-3=-\frac{2y+6}{7} \end{cases}$

(28) $\begin{cases} 1-\dfrac{8x-2}{7}=\dfrac{2-y}{3} \\ 3-\dfrac{3x+4}{10}=\dfrac{3y-5}{5} \end{cases}$

(29) $\begin{cases} \dfrac{6y+3}{8}-6=\dfrac{8x+1}{5} \\ \dfrac{4y-5}{9}-5=\dfrac{10x-4}{6} \end{cases}$

(30) $\begin{cases} \dfrac{0.5x-4}{3}+2=\dfrac{y-2.5}{3} \\ \dfrac{2y+5}{10}+1=\dfrac{2-7x}{15} \end{cases}$

معادلة من الدّرجة الثّانية بمجهولٍ واحد

حلّوا المعادلات التّربيعيّة الجزئيّة في التّمارين **(31)** – **(38)**.

(31) $x^2-36=0$ **(32)** $4x^2=9$ **(33)** $81-x^2=0$ **(34)** $8-\frac{1}{2}x^2=0$

(35) $9+x^2=0$ **(36)** $x^2=x$ **(37)** $6x \quad 2x^2$ **(38)** $-9x+0.6x^2=0$

حلّوا المعادلات في التّمارين **(39)** – **(43)**.

(39) $(2x-10)(x+5)=x^2+10x-75$

(40) $(3x-5)(x-8)=-x^2-x-9$

(41) $(3-2x)(x+1)=3(2x-3)-3x^2-5x+12$

(42) $(9-2x)(6-x)=2(x-2)-3x$

(43) $(4x-7)(1-2x)=(1-3x)(2x-1)+6x$

هيئة معادلتَيْن من الدّرجة الثّانية بمجهولَيْن

حلّوا المعادلات في التّمارين **(44)** – **(53)**.

(44) $\begin{cases} 2y-3x=3 \\ x\cdot y=3 \end{cases}$

(45) $\begin{cases} 5x+2y=3 \\ x\cdot y+1=0 \end{cases}$

(46) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+7y=25 \end{cases}$

(47) $\begin{cases} 5-y^2=x^2 \\ 3x+y+1=0 \end{cases}$

(48) $\begin{cases} y^2=13-x^2 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$

(49) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ 2x+3y=25 \end{cases}$

(50) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x^2+3x\cdot y-6y^2=-4 \end{cases}$

(51) $\begin{cases} \dfrac{6}{x}-\dfrac{5}{y}=-1 \\ x-y=2 \end{cases}$

(52) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 2y^2-x=1 \end{cases}$

(53) $\begin{cases} 2x^2+y^2=11 \\ x^2+5y=16 \end{cases}$

حلّوا المعادلات في التّمارين **(54)** – **(61)**.

(54) $\begin{cases} y=2x^2-9x+5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

(55) $\begin{cases} y=-x^2+5x-2 \\ 2y-7x=-6 \end{cases}$

(56) $\begin{cases} y=x^2-4x+10 \\ y=-x^2+2x+6 \end{cases}$

(57 $\begin{cases} y=2x^2-4x-1 \\ y=-x^2+2x+8 \end{cases}$

(58) $\begin{cases} (x-3)^2+(y+3)^2=5 \\ x-2y=9 \end{cases}$

(59) $\begin{cases} (x+4)^2+(y-4)^2=5 \\ x+y=1 \end{cases}$

(60) $\begin{cases}(x-5)^2+(y+1)^2=18\\ x-y=6\end{cases}$

(61) $\begin{cases}(x-3)^2+(y+4)^2=9\\ 2x+y=12\end{cases}$

حلّوا المعادلات في التّمارين **(62)** – **(69)**.

(62) $\begin{cases}(x+3)^2+y^2=25\\ x^2+y^2=10\end{cases}$

(63) $\begin{cases}x^2+(y+2)^2=29\\ x^2+y^2=13\end{cases}$

(64) $\begin{cases}(x+3)^2+(y-1)^2=34\\ x^2+y^2=20\end{cases}$

(65) $\begin{cases}(x+6)^2+(y-9)^2=52\\ x^2+y^2=13\end{cases}$

(66) $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=20\\ y=x^2+2x+1\end{cases}$

(67) $\begin{cases}x^2+y^2=25\\ y=-x^2+5\end{cases}$

(68) $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=2\\ y=x^2-4x+4\end{cases}$

(69) $\begin{cases}x^2+y^2=29\\ y=x^2+1\end{cases}$

أجوبة نهائيّة

(1) $x=-1$ **(2)** $x=-6$ **(3)** $x=30$ **(4)** $x=-8$ **(5)** $x=-1\frac{1}{2}$ **(6)** $x=49$

(7) $x=4$ **(8)** $x=3\frac{1}{2}$ **(9)** $x=-2$ **(10)** $x=3$ **(11)** $x=5$ **(12)** $x=\frac{1}{2}$

(13) $x=2\frac{3}{4}$ **(14)** $x=4\frac{1}{2}$ **(15)** $x=2$ **(16)** $x=-8$ **(17)** ϕ **(18)** כל x

(19) $(2,1)$ **(20)** $(-3,1.5)$ **(21)** $(3,0.5)$ **(22)** $(-1,3)$ **(23)** $(2.5,-1)$

(24) $(-0.5,1.5)$ **(25)** ϕ **(26)** عددٌ لانهائيٌّ من الحلول $\left(x,\frac{3-2x}{5}\right)$ x كلّ عددٍ. **(27)** $(0.5,4)$

(28) $(2,5)$ **(29)** $(-2,3.5)$ **(30)** $(-4,2.5)$ **(31)** $x_{1,2}=\pm 6$ **(32)** $x_{1,2}=\pm\frac{3}{2}$

(33) $x_{1,2}=\pm 9$ **(34)** $x_{1,2}=\pm 4$ **(35)** ϕ **(36)** $x_1=0$, $x_2=1$

(37) $x_1=0$, $x_2=3$ **(38)** $x_1=0$, $x_2=15$ **(39)** $x=5$ **(40)** $x=3\frac{1}{2}$

(41) $x=0$ **(42)** ϕ **(43)** $x_1=1\frac{1}{2}$, $x_2=2$ **(44)** $(1,3)$, $(-2,-1.5)$

(45) $(1,-1)$, $(-0.4,2.5)$ **(46)** $(-3,4)$, $(4,3)$ **(47)** $(-1,2)$, $(0.4,-2.2)$

(48) $(3,2)$ **(49)** ϕ **(50)** $(2,-1)$, $(25,22)$ **(51)** $(4,2)$, $(-3,-5)$

(52) $(1,1)$, $(1,-1)$ **(53)** $(1,3)$, $(-1,3)$ **(54)** $(1.5,-4)$, $(4,1)$

(55) $(-0.5,-4.75)$, $(2,4)$ **(56)** $(1,7)$, $(2,6)$ **(57)** $(3,5)$, $(-1,5)$ **(58)** $(1,-4)$, $(5,-2)$

(59) $(-5,6)$, $(-2,3)$ **(60)** $(2,-4)$, $(8,2)$ **(61)** ϕ **(62)** $(1,3)$, $(1,-3)$

(63) $(2,3)$, $(-2,3)$ **(64)** $(-0.8,-4.4)$, $(2,4)$ **(65)** $(-2,3)$ **(66)** $(1,4)$, $(-3,4)$

(67) $(-3,-4)$, $(3,-4)$, $(0,5)$ **(68)** $(1,1)$, $(3,1)$ **(69)** $(2,5)$, $(-2,5)$

الملحق أ.2: قوانين القوى التي أُسُسها طبيعيّة والتي أُسُسها صحيحة

نعرض تعريفَيْن يتعلّقان بالقوى ومن ثمّ سنعرض قوانين القوى.

■ لكلّ عددٍ حقيقيٍّ a وعددٍ طبيعيٍّ n تُعرّف: **a للقوّة n** كحاصل الضّرب: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرّات}}$.

نُسمّي العدد a **أساس القوّة** والعدد n **أُسّ القوّة**.

__مثال:__ $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

■ لكلّ عددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$ نعرّف: $a^0 \quad 1$ وَ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (0^0 ليس معرّفًا).

قوانين القوى:

(في القوانين المختلفة **m** وَ **n** هما عددان **طبيعيّان**)

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (a \neq 0, b \neq 0) \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

على سبيل المثال، نبرهن: $(a^m)^n = a^{mn}$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ مرّات}} = \underbrace{\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m \text{ مرّات}}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m \text{ مرّات}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m \text{ مرّات}}}_{n \text{ مرّات}} =$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\cdot n \text{ مرّات}} = a^{mn}$$

مثال رقم 1: أمثلة لحسابات أساسيّة في القوى

(1) $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$

(2) $-2^4 = -(2\cdot2\cdot2\cdot2) = -16$

(3) $(-1)^{11} = \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(-1)}_{11 \text{ مرّات}} = -1$

(4) $(-1)^{22} = \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(-1)}_{22 \text{ مرّات}} = 1$

(5) $(-2)^3\cdot(-1)^5 = (-8)\cdot(-1) = 8$

(6) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(7) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

(8) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

مثال رقم 2: أمثلة لحسابات إضافيّة

(1) $\frac{25^{30}\cdot 125^{10}}{5^{88}}=\frac{(5^2)^{30}\cdot(5^3)^{10}}{5^{88}}=\frac{5^{60}\cdot 5^{30}}{5^{88}}=\frac{5^{90}}{5^{88}}=5^2=25$

(2) $\frac{9^{40}\cdot 27^4}{81^{23}}=\frac{(3^2)^{40}\cdot(3^3)^4}{(3^4)^{23}}=\frac{3^{80}\cdot 3^{12}}{3^{92}}=\frac{3^{92}}{3^{92}}=3^0=1$

(3) $\frac{(a^5b^2)^3\cdot(a^8b^6)^2}{(a^3)^9\cdot(ab^3)^5}=\frac{a^{15}\cdot b^6\cdot a^{16}\cdot b^{12}}{a^{27}\cdot a^5\cdot b^{15}}=\frac{a^{31}b^{18}}{a^{32}b^{15}}=\frac{b^3}{a}\quad (a,b\neq 0)$

(4) $\left(\frac{a^2}{b^5}\right)^3\cdot\left(\frac{b^4}{a^2}\right)^4=\frac{a^6}{b^{15}}\cdot\frac{b^{16}}{a^8}=\frac{b}{a^2}\quad (a,b\neq 0)$

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ

إحسبوا قيم التّعابير التّالية **(1)** – **(5)** . حلّوا دون استعمال الحاسبة.

(1)
(أ) $(-2)^6=$ (ب) $-2^6=$ (ج) $(-1)^8=$ (د) $-1^8=$
(هـ) $2^{-3}=$ (و) $(-2)^{-2}=$ (ز) $-5^0=$ (ح) $(-0.5)^0=$
(ط) $(0.5)^{-3}=$ (ي) $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=$ (ي أ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}=$ (ي ب) $(0.25)^{-3}=$
(ي ج) $(0.1)^{-2}=$ (ي د) $2^{-2}+2^{-1}=$ (ط و) $10^{-2}+10^{-1}=$

(2)
(أ) $(-1)^3\cdot(-2)^5=$ (ب) $(-5)^2\cdot 2^3\cdot 10^{-1}=$ (ج) $-10^3\cdot 5^{-2}\cdot 2^{-2}=$
(د) $10^{-4}\cdot 5^3\cdot 2^3=$ (هـ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\cdot 2^{-1}=$ (و) $10^{-2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-4}=$
(ز) $(0.5)^{-2}\cdot(-5)^2\cdot 10^{-2}=$ (ح) $10^{-5}\cdot(-10)^5=$

(3)
(أ) $(-2)^5-(-2)^3=$ (ب) $10^3-(0.1)^{-4}=$
(ج) $(-2)^6-(-1)^5\cdot(-4)^3=$ (د) $(-2)^3-(-2)^5-(-5)^2=$
(هـ) $10^{-1}:10^{-3}=$ (و) $10^{-5}:10^{-8}=$
(ز) $2^{-5}:2^{-4}=$ (ح) $(-2)^{-4}:(-2)^{-5}=$

(4)
(أ) $\frac{16^{26}}{8^{34}}=$ (ب) $\frac{9^{50}}{27^{33}}=$ (ج) $\frac{32^{20}}{64^{16}}=$ (د) $\frac{10^9}{2^8\cdot 5^8}=$
(هـ) $\frac{8^{-7}}{4^{-11}}=$ (و) $\frac{27^{-6}}{9^{-10}}=$ (ز) $\frac{4^{-23}}{8^{-15}}=$ (ح) $\frac{9^{-15}}{27^{-10}}=$

(5) (أ) $\frac{6^{30}\cdot 4^{5}}{12^{21}\cdot 27^{3}}=$ (ب) $\frac{12^{25}\cdot 18^{31}}{81^{22}\cdot 16^{20}}=$ (ج) $\frac{9^{50}\cdot 125^{30}}{15^{60}\cdot 45^{20}\cdot 25^{5}}=$ (د) $\frac{32^{7}\cdot 24^{10}\cdot 9^{16}}{18^{20}\cdot 8^{15}}=$

(هـ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{3}=$ (و) $\left(\frac{4}{5}\right)^{6}\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^{3}=$ (ز) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}=$ (ح) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=$

(6) بسّطوا التّعابير التّالية:

(أ) $\frac{a^{9}\cdot a^{10}\cdot (a^{3})^{10}}{(a^{10})^{4}\cdot (a^{2})^{3}}=$ (ب) $\frac{(a^{5})^{3}\cdot (a^{8})^{5}\cdot (a^{2})^{2}}{(a^{7})^{3}\cdot (a^{4})^{8}\cdot (a^{3})^{2}}=$

(ج) $\frac{(a^{3}b^{2})^{6}\cdot (ab^{4})^{3}}{(a^{5}b^{6})^{4}}=$ (د) $\frac{(a^{7}b^{2})^{3}\ (a^{5}b^{8})^{2}}{(a^{4}b^{3})^{5}\ (a^{5}b^{4})^{2}}=$

(هـ) $\frac{(a^{5}b^{2})^{3}\cdot (a^{7}b^{3})^{5}}{(a^{2})^{20}\cdot (ab^{2})^{10}}=$ (و) $\frac{(a^{-2})^{5}\cdot (b^{3})^{-3}}{(a^{-3})^{4}\cdot (b^{-2})^{4}}=$

(ز) $\left(\frac{a^{2}}{b^{3}}\right)^{5}\cdot\left(\frac{b^{4}}{a^{3}}\right)^{4}=$ (ح) $\left(\frac{a^{3}}{b^{7}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{b^{5}}{a^{2}}\right)^{4}=$

(ط) $\left(\frac{a^{4}}{b^{3}}\right)^{n}\cdot\left(\frac{b^{4}}{a^{3}}\right)^{n}=$ (ي) $\left(\frac{a^{3}}{b^{4}}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{b^{7}}{a^{5}}\right)^{n}=$

(ي أ) $\frac{(a^{2}b^{3})^{n}\cdot (a^{4}b^{3})^{n+1}}{a^{4}\cdot (a^{3}b^{4})^{2n}}=$ (ي ب) $\frac{(a^{2}b)^{n}\cdot (ab^{2})^{-n}}{(a^{3}b)^{n}\cdot (ab^{3})^{-n}}=$

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) 64 (ب) -64 (ج) 1 (د) -1 (هـ) $\frac{1}{8}$ (و) $\frac{1}{4}$ (ز) -1 (ح) 1

(ط) 8 (ي) -4 (ي أ) -27 (ي ب) 64 (ي ج) 100 (ي د) $\frac{3}{4}$ (ط و) 0.11 أو $\frac{11}{100}$

(2) (أ) 32 (ب) 20 (ج) -10 (د) $\frac{1}{10}$ (هـ) 8 (و) 100 (ز) 1 (ح) -1

(3) (أ) -24 (ب) -9000 (ج) 0 (د) -1 (هـ) 100 (و) 1000 (ز) $\frac{1}{2}$ (ح) -2

(4) (أ) 4 (ب) 3 (ج) 16 (د) 10 (هـ) 2 (و) 9 (ز) $\frac{1}{2}$ (ح) 1

(5) (أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) 1 (د) 9 (هـ) $\frac{4}{9}$ (و) 8 (ز) 27 (ح) 40

(6) (أ) a^{3} (ب) 1 (ج) a (د) $\frac{a}{b}$ (هـ) b (و) $\frac{a^{2}}{b}$ (ز) $\frac{b}{a^{2}}$ (ح) $\frac{a}{b}$

(ط) $(ab)^{n}$ (ي) $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$ (ي أ) b^{3-2n} (ي ب) $\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

الملحق أ.3: التّحليل إلى عوامل واستعمالاته

أ. قوانين الضّرب المختصر

نعرض فيما يلي قوانين تُسمّى **"قوانين الضّرب المختصر"** :

قانون الفرق بين مربّعَيْن:	$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$
قانونا مربّع حاصل جمع أو طرح حدَّيْن:	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

افحصوا عن طريق فتح الأقواس صحّة القوانين أعلاه.

أمثلة محلولة

(1) في البنود التّالية، افتحوا الأقواس بحسب قوانين الضّرب المختصر.

(أ) $(4a+3)(4a-3)=(4a)^2-(3)^2=16a^2-9$

(ب) $(5a-2)(5a+2)=(5a)^2-(2)^2=25a^2-4$

(ج) $(a+3)^2=(a)^2+2\cdot(a)\cdot(3)+(3)^2=a^2+6a+9$

(د) $(3x-5)^2=(3x)^2-2\cdot(3x)\cdot(5)+(5)^2=9x^2-30x+25$

(هـ) $(10x+10)^2=100x^2+200x+100$

(2) في البنود التّالية، افتحوا الأقواس وجمّعوا الحدود المتشابهة.

(أ) $(x+2y)^2+(x-2y)^2=$

$=x^2+\cancel{4xy}+4y^2+x^2-\cancel{4xy}+4y^2=\mathbf{2x^2+8y^2}$

(ب) $(x+3)(x-3)-(x+4)(x-4)=x^2-3^2-(x^2-4^2)=$

$=\cancel{x^2}-9-\cancel{x^2}+16=\mathbf{7}$

(ج) $(x-2y)(x+2y)-4(x-y)^2=$

$=x^2-4y^2-4(x^2-2xy+y^2)=$

$=x^2-4y^2-4x^2+8xy-4y^2=\mathbf{-3x^2+8xy-8y^2}$

تمارين للعمل الذّاتيّ

(1) افتحوا الأقواس وجمّعوا الحدود المتشابهة عند الحاجة.

(أ) $(2a+3b)(2a-3b)=$ (ب) $(x^2-5y)(x^2+5y)=$

(ج) $(a+5b)^2=$ (د) $(5a-4b)^2=$

(هـ) $(a+3b)^2+(a-3b)^2=$ (و) $(5x-2y)^2-(5x+2y)^2=$

(2) افتحوا الأقواس وجمّعوا الحدود المتشابهة عند الحاجة.

(أ) $(5x-3)(5x+3)+(5x-4)(5x+4)=$

(ب) $-(x+4)^2-(x-4)(x+4)=$

(ج) $(x-3)^2+(x-4)^2-(x-5)^2=$

(د) $(3x-4)^2-(3x+4)^2=$

(هـ) $-4(2x-3)^2+(4x+6)(4x-6)=$

(و) $(-4x+7)(-4x-7)-(4x-7)^2=$

(ز) $(3a-2)^2+(4a+1)^2-(5a-3)(5a+3)=$

(ح) $(2x-8)^2-(8-2x)^2-(-8-2x)(-8+2x)=$

(3) احسبوا التّمارين التّالية بمساعدة قوانين الضّرب المختصر.

(أ) $103\cdot97=$ (ب) $95\cdot85=$ (ج) $48\cdot52=$ (د) $41^2=$

(هـ) $103^2=$ (و) $97^2=$ (ز) $99^2=$ (ح) $(5\frac{1}{2})^2=$

(ط) $(8\frac{1}{2})^2=$ (ي) $(10\frac{1}{2})^2=$ (ي أ) $(13\frac{1}{2})^2=$ (ي ب) $(18\frac{1}{2})^2=$

(4) أكملوا النّاقص في $\boxed{}$ كي تتحقّق مساواة.

(أ) $(x-3)^2+\boxed{}=(x+3)^2$

(ب) $(2a+7)^2-\boxed{}=(2a-7)^2$

(ج) $(5x-4)^2+\boxed{}=(5x+4)^2$

(د) $(3a+5b)^2-\boxed{}=(3a-5b)^2$

(هـ) $(2x-3y)^2+\boxed{}=(2x+3y)^2$

(و) $(x-y)^2+(x+y)(x-y)-\boxed{}=0$

(ز) $(2x+5y)^2-(2x+5y)(2x-5y)-\boxed{}=0$

(ح) $(10x-2y)^2-(10x+2y)^2+\boxed{}=0$

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) $4a^2-9b^2$ (ب) x^4-25y^2 (ج) $a^2+10ab+25b^2$
(د) $25a^2-40ab+16b^2$ (هـ) $2a^2+18b^2$ (و) $-40xy$

(2) (أ) $50x^2-25$ (ب) $-2x^2-8x$ (ج) x^2-4x (د) $-48x$
(هـ) $48x-72$ (و) $56x-98$ (ز) $-4a+14$ (ح) $4x^2-64$

(3) (أ) $9,991$ (ب) $8,075$ (ج) $2,496$ (د) $1,681$
(هـ) $10,609$ (و) $9,409$ (ز) $9,801$ (ح) $30\frac{1}{4}$
(ط) $72\frac{1}{4}$ (ي) $110\frac{1}{4}$ (ي أ) $182\frac{1}{4}$ (ي ب) $342\frac{1}{4}$

(4) (أ) $12x$ (ب) $56a$ (ج) $80x$ (د) $60ab$
(هـ) $24xy$ (و) $2x^2-2xy$ (ز) $50y^2+20xy$ (ح) $80xy$

* * *

ب. التّحليل إلى عوامل

مقدّمة:

عمليّة كتابة تعبيرٍ جبريٍّ يحوي عدّة حدودٍ (متعدّد الحدود) بصورة حاصل ضرب عوامل تُسمّى **"تحليل إلى عوامل"**.

مثال: عمليّة كتابة التّعبير $6a+4b$ (متعدّد الحدود) كحاصل الضّرب: $2\cdot(3a+2b)$.

توجد ثلاث طرق للتّحليل إلى عوامل:

(1) تحليل بواسطة إخراج العامل المشترك (يشمل تحليل بواسطة مجموعات).

(2) تحليل بواسطة استعمال قوانين الضّرب المختصر.

(3) تحليل التّرينوم (ثلاثي الحدود من الدّرجة الثّانية): سنعمل في التّرينوم في البند **هـ** في هذا الفصل.

ملاحظة: المرحلة الأولى في كلّ تحليل إلى عوامل هي **إخراج العامل المشترك** (إذا كان ممكنًا) وفقط من بعد هذا نستمرّ في إمكانيّات التّحليل الأخرى (إذا كان بالإمكان) بحسب الطرق الإضافيّة.

* * *

ب.1 تحليل إلى عوامل بحسب إخراج العامل المشترك (يشمل تحليل بحسب مجموعات)

أمثلة محلولة

(1) حلّلوا إلى عوامل التّعبير $15xy-10xz+25xyz$

الحلّ:

العدد 5 هو العامل المشترك **الأكبر** من بين العوامل العدديّة، وبينما x هو العامل المشترك **الأكبر** من بين العوامل الحرفيّة. لذا، نُخرج $5x$ **كعامل مشترك** خارج الأقواس ونحصل على التّعبير:
$5x(3y-2z+5yz)$.

(2) حلّلوا إلى عوامل التّعبير $6x^3y^5-27x^2y^6$

الحلّ:

التّعبير $3x^2y^5$ هو العامل المشترك **الأكبر**. ومن هنا نحصل على التّعبير المُحلّل: $3x^2y^5(2x-9y)$

(3) حلّلوا إلى عوامل التّعبير: $4x^4(y-2)^3+20x(y-2)^5$

الحلّ:

التّعبير $4x(y-2)^3$ هو العامل المشترك **الأكبر**.

ومن هنا نحصل على التّعبير المُحلّل: $4x(y-2)^3\left(x^3+5(y-2)^2\right)$.

(4) حلّلوا إلى عوامل التّعبير: $8abc^2-10ab^2-12c^2+15b$

الحلّ:

لا يوجد عاملٌ مشتركٌ لكلّ الحدود. ومع هذا يمكننا إخراج عامل مشترك لكلّ زوج حدود (تحليل بحسب مجموعات) ونحصل على: $2ab(4c^2-5b)-3(4c^2-5b)$

نستطيع الآن إخراج تعبير الأقواس كعاملٍ مشترك والحصول على التّعبير المُحلّل التّالي: $(4c^2-5b)(2ab-3)$

* * *

2.ب تحليل إلى عوامل بحسب قوانين الضّرب المختصر

أمثلة محلولة

(1) استعينوا بقوانين الضّرب المختصر $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ كي تحلّلوا إلى عوامل التّعبير $4x^2+12xy+9y^2$.

الحلّ:

$$\left.\begin{array}{lcl} 4x^2=(2x)^2=a^2 & \Rightarrow & a=2x \\ 9y^2=(3y)^2=b^2 & \Rightarrow & b=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2ab=2\cdot 2x\cdot 3y=12xy$$

لذا: $4x^2+12xy+9y^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=(2x+3y)^2$

(2) استعينوا بقوانين الضّرب المختصر $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ كي تحلّلوا إلى عوامل التّعبير $25n^2-20n+4$.

الحلّ:

$$\left.\begin{array}{lcl} 25n^2=(5n)^2=a^2 & \Rightarrow & a=5n \\ 4=2^2=b^2 & \Rightarrow & b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2ab=2\cdot 5n\cdot 2=20n$$

لذا: $25n^2-20n+4=(5n)^2-2\cdot 5n\cdot 2+2^2=(5n-2)^2$

(3) استعينوا بقانون الفرق بين مربّعَيْن $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ كي تحلّلوا إلى عوامل التّعبير $49y^2-16x^2$.

الحلّ:

$$\left.\begin{array}{lcl} 49y^2=(7y)^2=a^2 & \Rightarrow & a=7y \\ 16x^2=(4x)^2=b^2 & \Rightarrow & b=4x \end{array}\right\}$$

لذا: $49y^2-16x^2=(7y)^2-(4x)^2=(7y+4x)(7y-4x)$

(4) حلّلوا إلى عوامل التّعبير $x^5-2x^4+x^3$

الحلّ: $x^5-2x^4+x^3=x^3(x^2-2x+1)=x^3(x-1)^2$

(5) استعينوا بقوانين الضّرب المختصر لحساب التّعبير $\frac{11^2-2\cdot 11\cdot 5+5^2}{6.5^2-5.5^2}$.

الحلّ:

نحلّل البسط بحسب $(a-b)^2$ ونحصل على: $(11-5)^2=6^2$

نحلّل المقام حسب a^2-b^2 ونحصل على: $(6.5+5.5)\cdot(6.5-5.5)=12\cdot 1$

وهكذا نحصل على التّعبير المطلوب: $\frac{11^2-2\cdot 11\cdot 5+5^2}{6.5^2-5.5^2}=\frac{6^2}{12\cdot 1}=\frac{36}{12}=3$

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ

(1) حلّلوا إلى عوامل التّعابير التّالية بواسطة إخراج العامل المشترك وَ/أو بحسب قانون الفرق بين مربّعَيْن:

(أ) $8m+4b-12c$ (ب) $2a^2c-a^2$

(ج) $32a^4-48ac+20a^2c$ (د) $3b(a-2c)-8(a-2c)$

(هـ) $a^2(b-3c)-(b-3c)\cdot 7$ (و) $a(2b^2-c)+b(c-2b^2)$

(ز) a^2-64 (ح) $36m^2-49n^2$

(ط) $3b^2-12$ (ي) $2b^5-2b^3$

(ي أ) $80m^4-20m^2$ (ي ب) $2m^2ba^2-18m^2b$

(ي ج) $6a^3m^2-24am^2$ (ي د) $4a^3b^2-16c^2a^3$

(2) حلّلوا إلى عوامل التّعابير التّالية بحسب مجموعات، واستعينوا (إذا دعت الحاجة) أيضًا بقانون الفرق بين مربّعَيْن.

(أ) $2a+4b+3a^2+6ab$ (ب) $4a^2-16a+3a-12$

(ج) $2ab+3bc-10a-15c$ (د) $a^2+8a-6a-48$

(هـ) $b^2+7b+3b+21$ (و) $6b^2-15b+2b-5$

(ز) $2b^3a^2-6b^3-5a^2+15$ (ح) $6a^3-20a^2+9a-30$

(ط) $20a^3+30a^2-80a-120$ (ي) $36a^3b-45a^2-16ab+20$

(3) حلّلوا إلى عوامل التّعابير التّالية بحسب مجموعات، واستعينوا (إذا دعت الحاجة) أيضًا بقانون الفرق بين مربّعَيْن.

(أ) $2a+ac+2b+bc-2-c$

(ب) $8a^3+12a^2-12a^2-18a+14a+21$

(ج) $4a^3+8a^2b+12a^2c-9ac^2-18bc^2-27c^3$

(د) $12a^2-6ab+16ab-8b^2-4ac+2bc$

(4) استعينوا بقوانين الضرب المختصر وحلّلوا إلى عوامل التّعابير التّالية:

(أ) $a^2+14a+49$ (ب) $b^2-8b+16$

(ج) $x^2-6xy+9y^2$ (د) $25m^2-20mn+4n^2$

(هـ) $16a^4+8a^2b+b^2$ (و) $16a^2-9b^2$

(ز) $1-4x^2$ (ح) $25y^4-36x^2$

(ط) x^3-25x (ي) $4a^4-16a^2b^2$

(ي أ) $a^3b+8a^2b^3+16ab^5$ (ي ب) $8m^3n-72mn^3$

(ي ج) $8x+24x^2+18x^3$ (ي د) m^5-16m

(5) ★ استعينوا بقوانين الضرب المختصر وحلّلوا إلى عوامل التّعابير التّالية:

(أ) $a^2+2ab+b^2-c^2$

(ب) $9m^2+42mn+49n^2-25m^2n^2$

(ج) $25a^2-60ab+36b^2-16m^2-8m-1$

(د) $a^2+2ab+b^2+2a+2b+1$

(هـ) $9m^2+6mn+n^2+6m^3+2m^2n+m^4$

(و) $25m^2-70mb+49b^2-60ma+84ba+36a^2$

(6) استعينوا بقوانين الضرب المختصر واحسبوا قيم التّعابير التّالية:

(أ) $47^2+2\cdot47\cdot13+13^2=$ (ب) $39^2-2\cdot19\cdot39+19^2=$

(ج) $83^2-17^2=$ (د) $10.2^2-9.8^2=$

(هـ) $91^2+2\cdot91\cdot9+9^2=$ (و) $99^2-2\cdot99\cdot9+9^2=$

(ز) $\dfrac{55^2-45^2}{35^2-15^2}=$ (ح) $\dfrac{75^2-25^2}{53^2-2\cdot53\cdot3+3^2}=$

(ط) $\dfrac{7^2+2\cdot7\cdot3+3^2}{10.5^2-9.5^2}=$ (ي) $\dfrac{27^2-23^2}{24^2-2\cdot24\cdot4+4^2}=$

أجوبة نهائيّة

(1)
(أ) $4(2m+b-3c)$ (ب) $a^2(2c-1)$
(ج) $4a(8a^3-12c+5ac)$ (د) $(a-2c)(3b-8)$
(هـ) $(b-3c)(a^2-7)$ (و) $(2b^2-c)(a-b)$
(ز) $(a+8)(a-8)$ (ح) $(6m+7n)(6m-7n)$
(ط) $3(b+2)(b-2)$ (ي) $2b^3(b+1)(b-1)$
(ي أ) $20m^2(2m+1)(2m-1)$ (ي ب) $2bm^2(a+3)(a-3)$
(ي ج) $6am^2(a+2)(a-2)$ (ي د) $4a^3(b+2c)(b-2c)$

(2)
(أ) $(a+2b)(2+3a)$ (ب) $(a-4)(4a+3)$
(ج) $(2a+3c)(b-5)$ (د) $(a+8)(a-6)$
(هـ) $(b+7)(b+3)$ (و) $(2b-5)(3b+1)$
(ز) $(a^2-3)(2b^3-5)$ (ح) $(3a-10)(2a^2+3)$
(ط) $10(2a+3)(a+2)(a-2)$ (ي) $(4ab-5)(3a+2)(3a-2)$

(3)
(أ) $(2+c)(a+b-1)$ (ب) $(2a+3)(4a^2-6a+7)$
(ج) $(a+2b+3c)(2a+3c)(2a-3c)$ (د) $2(2a-b)(3a+4b-c)$

(4)
(أ) $(a+7)^2$ (ب) $(b-4)^2$
(ج) $(x-3y)^2$ (د) $(5m-2n)^2$
(هـ) $(4a^2+b)^2$ (و) $(4a-3b)(4a+3b)$
(ز) $(1-2x)(1+2x)$ (ح) $(5y^2-6x)(5y^2+6x)$
(ط) $x(x-5)(x+5)$ (ي) $4a^2(a-2b)(a+2b)$
(ي أ) $ab(a+4b^2)^2$ (ي ب) $8mn(m-3n)(m+3n)$
(ي ج) $2x(2+3x)^2$ (ي د) $m(m-2)(m+2)(m^2+4)$

(5)
(أ) $(a+b+c)(a+b-c)$
(ب) $(3m+7n+5mn)(3m+7n-5mn)$
(ج) $(5a-6b+4m+1)(5a-6b-4m-1)$
(د) $(a+b+1)^2$
(هـ) $(3m+n+m^2)^2$
(و) $(5m-7b-6a)^2$

(6)
(أ) 3,600 (ب) 400 (ج) 6,600 (د) 8 (هـ) 10,000
(و) 8,100 (ز) 1 (ح) 2 (ط) 5 (ي) 0.5

ج. استعمال التّحليل إلى عوامل لحلّ معادلات من درجاتٍ عالية

تمارين للعمل الذّاتيّ

حلّوا المعادلات التّالية (استعينوا بالتّحليل إلى عوامل):

(1) $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$

(2) $x^3 + x^2 - 12x = 0$

(3) $2x^3 + 15x^2 + 18x = 0$

(4) $4x^3 - 8x^2 - 45x = 0$

(5) $2x^4 - 72x^2 = 0$

(6) $4x^4 - 9x^2 = 0$

(7) $5x^5 - 80x^3 = 0$

(8) $25x^5 - 9x^3 = 0$

(9) $x^5 - 81x = 0$

(10) $9x^3 - 25x = 0$

(11) $4x^4 - 3x^3 = 0$

(12) $x^5 + 16x = 0$

(13) $\left(x(x-1)\right)^2 - x^2 = 0$

(14) $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$

(15) $2x^5 + x^4 - x^3 = 0$

أجوبة نهائيّة

(1) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = -1$

(2) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$

(3) $x_1 = 0$, $x_2 = -1.5$, $x_3 = -6$

(4) $x_1 = 0$, $x_2 = 4.5$, $x_3 = -2.5$

(5) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = -6$

(6) $x_1 = 0$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = -1.5$

(7) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -4$

(8) $x_1 = 0$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = -0.6$

(9) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$

(10) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = -\frac{5}{3}$

(11) $x_1 = 0$, $x_2 = 0.75$

(12) $x = 0$

(13) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

(14) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$

(15) $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = -1$

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

د. تحليل إلى عوامل لتعابير تحتوي على كسورٍ جبريّة، استعمال التّحليل إلى عوامل لتبسيط جذورٍ جبريّة ولحلّ معادلات تحتوي على كسورٍ جبريّة

قبل الأمثلة، نُعرّف ما هي التّعابير **المتساوية القيمة**.

تعابير **متساوية القيمة** هي تعابير تحصل على نفس القيمة العدديّة لكلّ قيمةٍ ممكنة للمتغيّر.

أمثلة محلولة

(1) بسّطوا الكسر التّالي (استعينوا بالتّحليل إلى عوامل): $\frac{5m+10}{2m^2-8}$.

أكتبوا أيضًا تحت أيّ شرطٍ الكسر المعطى يساوي الكسر المُبسّط.

الحلّ:

نُحلّل البسط بواسطة إخراج العامل المشترك 5 قبل الأقواس: $5m+10=5(m+2)$

يمكننا تحليل المقام بواسطة إخراج العامل المشترك 2 واستعمال قانون الفرق بين مربّعَيْن ونحصل على:

$$2m^2-8=2(m^2-4)=2(m-2)(m+2)$$

لذا: $\frac{5m+10}{2m^2-8}=\frac{5(m+2)}{2(m-2)(m+2)}=\frac{5}{2(m-2)}=\frac{5}{2m-4}$

الكسر المعطى والكسر المُبسّط متساويان لكلّ $m\neq -2$ ، لأنّه إذا عوّضنا $m=-2$ في الكسر المعطى سنحصل على تعبيرٍ لا معنى له (قسمة على صفر)، وإذا عوّضنا $m=-2$ في الكسر المبسّط سنحصل على $-\frac{5}{8}$.

ملاحظة: بمساعدة تحليل المقام إلى عوامل حصلنا على: $2m^2-8=2(m-2)(m+2)$
أي أنّ التّحليل إلى عوامل يساعدنا في إيجاد مجال تعويض التّعبير الجبريّ المعطى وهو $m\neq \pm 2$ ، لأنّ المقام يساوي صفرًا بالنّسبة لِـ $m=2$ أو بالنّسبة لِـ $m=-2$.

(2) حلّوا المعادلة: $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

الحلّ:

مجال تعويض المعادلة هو $x\neq -3$. نحلّل البسط إلى عوامل حسب قانون الفرق بين مربّعَيْن:

$$x^2-9=(x+3)(x-3)$$

بالنّسبة لِـ $x\neq -3$ ، نحصل على تعبير مكافئ بعد تبسيط المقام والبسط بِـ $(x+3)$:

$$\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{x+3}}+x=x^2-18$$

$$x-3+x=x^2-18$$

نحصل على المعادلة التّربيعيّة: $0=x^2-2x-15$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}\left\langle\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=-3 \rightarrow \text{ليس في مجال التّعويض}\end{array}\right.$$

جواب: حلّ المعادلة هو: $x=5$.

(3) حلّوا المعادلة: $\frac{2}{(x+3)^2}-\frac{3}{x^2-9}=0$

الحلّ:

نستعين بالتّحليل: $x^2-9=(x+3)(x-3)$.

أي أنّ مجال التّعويض هو $x\neq\pm3$. إذا ضربنا طرفَي المعادلة بالتّعبير $(x+3)(x+3)(x-3)$ ،

فستتخلّص من كلّ المقامات ونحصل على:

$$\frac{2}{(x+3)^2}-\frac{3}{(x-3)(x+3)}=0 \quad /\cdot(x-3)(x+3)(x+3)$$

$$2(x-3)-3(x+3)=0$$

$$2x-6-3x-9=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=-15}$$

(4) (أ) برهنوا أنّ التّعبير x^2+x+1 لا يساوي 0 لكلّ قيمةٍ لِـ x .

(ب) حلّوا المعادلة: $\frac{14}{x^2+x+1}=\frac{3}{x^2-1}+\frac{7}{(x-1)(x^2+x+1)}$

الحلّ:

(أ) نحلّ المعادلة التّربيعيّة $x^2+x+1=0$ التي فيها: $c=1$, $b=1$, $a=1$.

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

لا يوجد حلٌّ حقيقيٌّ لهذه المعادلة $(\Delta<0)$ ولذا التّعبير x^2+x+1 لا يساوي 0 لكلّ قيمةٍ لِـ x .

(ب) في البند (أ) برهنّا أنّ التّعبير $x\ +x+$ لا يساوي 0 .

المقام x^2-1 يساوي صفرًا في $x=\pm1$. المقام $(x-1)(x^2+x+1)$ يساوي صفرًا في $x=1$.

نحصل من هنا أنّ مجال التّعويض هو $x\neq\pm1$.

نحلّل إلى عوامل المقامَيْن في الطّرف الأيسر ونحصل على:

$$\frac{3}{(x-1)(x+1)}+\frac{7}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{14}{x^2+x+1} \quad /\cdot(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$

$$3(x^2+x+1)+7(x+1)=14(x+1)(x-1)$$

$$3x^2+3x+3+7x+7=14(x^2-1)$$

بعد فتح الأقواس وتجميع الحدّود المتشابهة نحصل على: $11x^2-10x-24=0$

حلّا المعادلة التّربيعيّة هما: $x_1=2$, $x_2=-1\frac{1}{11}$

جواب: حلّا المعادلة هما $x_1=2$, $x_2=-1\frac{1}{11}$.

(5) استعينوا بالتّحليل إلى عوامل واحسبوا الكسر $\frac{12^{2n}-3^{2n}}{8^n-2^n}$ $(n\neq0)$.

الحلّ:

$$\frac{12^{2n}-3^{2n}}{8^n-2^n}=\frac{3^{2n}(4^{2n}-1)}{2^n(4^n-1)}=\frac{3^{2n}(4^n+1)(4^n-1)}{2^n(4^n-1)}=\frac{3^{2n}(4^n+1)}{2^n}=$$

$$=\frac{(3^2)^n(4^n+1)}{2^n}=\frac{9^n(4^n+1)}{2^n}=\frac{36^n+9^n}{2^n}=$$

$$=\frac{36^n}{2^n}+\frac{9^n}{2^n}=\left(\frac{36}{2}\right)^n+\left(\frac{9}{2}\right)^n=18^n+\left(\frac{9}{2}\right)^n$$

تمارين للعمل الذّاتيّ

حلّلوا إلى عوامل التّعابير في التّمارين **(1)** – **(6)** بواسطة إخراج العامل المشترك
وَ/أو بواسطة قانون الفرق بين مربّعَيْن (أبقوا في إجاباتكم كسورًا جبريّة).
أكتبوا في كلّ تمرين مجال التّعويض أيضًا.

(1) $\frac{1}{x}-\frac{1}{xy}$ **(2)** $\frac{2}{x^2}-\frac{2}{y^2}$ **(3)** $\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x^2y^2}$

(4) $\frac{a^3}{x^3}-\frac{a}{x}$ **(5)** $\frac{4}{x^2}-9x^2$ **(6)** $\frac{4}{ax^2}-\frac{1}{9ay^2}$

في التّمارين **(7)** – **(15)** بسّطوا الكسور الجبريّة.
أكتبوا في كلّ تمرين تحت أيّ شرط، الكسر المعطى مساوٍ بالقيمة للكسر المبسّط.

(7) $\frac{a^2-2a}{a^2-4}$ **(8)** $\frac{a^2+3a}{9-a^2}$ **(9)** $\frac{a^2-8a+16}{a^2-16}$

(10) $\frac{1-2a+a^2}{a^2-1}$ **(11)** $\frac{4b^2-9}{9+12b+4b^2}$ **(12)** $\frac{45-5b^2}{b^2-6b+9}$

(13) $\frac{16x^2-1}{16x^2-8x+1}$ **(14)** $\frac{a^3-a}{a^3-2a^2+a}$ **(15)** $\frac{4-b^4}{b^4+4b^2+4}$

في التّمارين **(16)** – **(21)** بسّطوا الكسور الجبريّة (n طبيعيّ).

(16) $\frac{2^{3n+1}-2^{3n-1}}{5\cdot 8^n}$ **(17)** $\frac{3^{n+3}-3^{n+2}}{18\cdot 3^{n-1}}$ **(18)** $\frac{3^{n+2}+3^{n-1}}{14\cdot 3^n}$

(19) $\frac{9^n-3^{2n+1}}{3^{2n+1}-9^n}$ **(20)** $\frac{9^{2n}-3^{2n}}{27^n+9^n}$ **(21)** $\frac{36^{2n}-4^{2n}}{18^n-2^n}$

في التّمارين **(22)** – **(31)** استعينوا بالتّحليل إلى عوامل وحلّوا المعادلات.

(22) $\frac{7}{10x-5}+\frac{3}{4x^2-1}+\frac{5}{6x+3}=1$ **(23)** $\frac{1}{8x+6}+1=\frac{11}{16x^2-9}-\frac{1}{8x-6}$

(24) $\frac{3}{x^2-9}+\frac{5}{2x+6}=\frac{1}{x-3}$ **(25)** $\frac{2}{x-6}-\frac{20}{x^2-36}=\frac{9}{3x+18}$

(26) $\frac{6}{x+3}+\frac{5}{2x-6}=\frac{8x-8}{2x+6}$ **(27)** $\frac{2x+1}{x+1}-\frac{1}{2x+2}=\frac{3}{2x-2}$

(28) $\frac{x^2}{x^2-16}-\frac{4}{3x-12}=\frac{1}{3}-\frac{x}{x+4}$ **(29)** $\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{11}{5x-10}=\frac{1}{5}-\frac{x}{x+2}$

(30) $\frac{x+4}{x^2-1}-\frac{2x+5}{(x+1)^2}=\frac{12}{4x+4}$ **(31)** $\frac{10}{9-x^2}-\frac{25}{(x-3)^2}=\frac{1}{x+3}$

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

في التّمارين **(32)** – **(39)** استعينوا بالتّحليل إلى عوامل وحلّوا المعادلات.

(32) $40+x=x^2-\frac{x^2-25}{x+5}$

(33) $4+x=x^2-\frac{x^2-16}{x-4}$

(34) $\frac{3x^2-30x+75}{x-5}=9$

(35) $\frac{4x^2-40x+100}{x-5}=x+4$

(36) $\frac{1+8x+16x^2}{4x+1}=21$

(37) $\frac{1+6x+9x^2}{6x+2}=11$

(38) $2x+\frac{2x^2+4x+2}{x^2-1}=10$

(39) $5x=26-\frac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$

في التّمارين **(40)** – **(49)** استعينوا بالتّحليل إلى عوامل وحلّوا المعادلات.

(40) $\frac{x^2-2x+1}{x-1}=2x$

(41) $\frac{x^2-6x+9}{3-x}=x-5$

(42) $\frac{1-4x+4x^2}{2x-1}=3x+5$

(43) $\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}=3$

(44) $\frac{16-8x+x^2}{x^2-16}=-x-1$

(45) $\frac{x^2+4x+4}{x^2+2x}=-1$

(46) $\frac{3x^3-x^2}{9x^2-6x+1}=x^2$

(47) $\frac{x^4-2x^2+1}{x^4-1}=\frac{3}{5}$

(48) $4x+\frac{16x^2-8x+1}{4x^2-x}=1$

(49) $\frac{4x^2+12x+9}{6x+9}-10x=15$

في التّمارين **(50)** – **(57)** استعينوا بالتّحليل إلى عوامل وحلّوا المعادلات.

(50) $\frac{9}{x^2+2x+1}+\frac{x+7}{3x+3}=2$

(51) $\frac{2}{x^2-4x+4}-\frac{3}{x^2-2x}=\frac{1}{x-2}$

(52) $\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{6}{x-2}=\frac{x+10}{4-x^2}$

(53) $\frac{1}{4x^2-4x+1}+\frac{9}{4x^2+4x+1}=\frac{6}{4x^2-1}$

(54) $\frac{9}{4x+8}-\frac{x}{2x^2-8x+8}+\frac{3}{4x^2-16}=0$

(55) $\frac{1}{x^2+12x+36}-\frac{5}{x^2-36}=0$

(56) $\frac{22}{x^2-25}+\frac{1}{x^2-10x+25}=\frac{3}{x-5}$

(57) $\frac{5}{9x^2+12x+4}+\frac{4}{9x^2-4}-\frac{1}{3x-2}=0$

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

أجوبة نهائيّة

(1) $\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{y}\right)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

(2) $2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

(3) $\frac{a}{x^2}\left(1-\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

(4) $\frac{a}{x}\left(\frac{a}{x}-1\right)\left(\frac{a}{x}+1\right)$, $x \neq 0$

(5) $\left(\frac{2}{x}-3x\right)\left(\frac{2}{x}+3x\right)$, $x \neq 0$

(6) $\frac{1}{a}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{3y}\right)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{3y}\right)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $a \neq 0$

(7) $a \neq 2$, $\frac{a}{a+2}$

(8) $a \neq -3$, $\frac{a}{3-a}$

(9) $a \neq 4$, $\frac{a-4}{a+4}$

(10) $a \neq 1$, $\frac{a-1}{a+1}$

(11) $b \neq -\frac{3}{2}$, $\frac{2b-3}{2b+3}$

(12) $b \neq 3$, $\frac{5b+15}{3-b}$

(13) $x \neq \frac{1}{4}$, $\frac{4x+1}{4x-1}$

(14) $a \neq 0$ وأيضًا $a \neq 1$, $\frac{a+1}{a-1}$

(15) $\frac{2-b^2}{2+b^2}$ (دون أيّ تحديدٍ على b)

(16) $\frac{3}{10}$

(17) 3

(18) $\frac{2}{3}$

(19) -1

(20) 3^n-1

(21) $8^n(9^n+1)=72^n+2^{3n}$

(22) $x_1=2$, $x_2=-\frac{7}{15}$

(23) $x_1=1$, $x_2=-\frac{5}{4}$

(24) $x=5$

(25) $x=10$

(26) $x_1=5$, $x_2=1\frac{1}{8}$

(27) $x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{2}$

(28) $x_1=0$, $x_2=3\frac{1}{5}$

(29) $x_1=3$, $x_2=-\frac{2}{3}$

(30) $x_1=2$, $x_2=-1\frac{1}{2}$

(31) $x_1=-2$, $x_2=-27$

(32) $x=7$

(33) $x=-2$

(34) $x=8$

(35) $x=8$

(36) $x=5$

(37) $x=7$

(38) $x_1=2$, $x_2=3$

(39) $x_1=4$, $x_2=2.8$

(40) $x=-1$

(41) $x=4$

(42) $x=-6$

(43) $x=10$

(44) $x =$, $x_2=-6$

(45) $x=-1$

(46) $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$

(47) $x_1=2$, $x_2=-2$

(48) $x=-1$

(49) ϕ

(50) $x_1=2$, $x_2=-2.8$

(51) $x_1=3$, $x_2=-2$

(52) $x_1=-1$, $_2=-1.2$

(53) $x_{1,2}=1$

(54) $x_1=1$, $x_2=\frac{30}{7}$

(55) $x=-9$

(56) $x_1=6$, $x_2=\frac{5}{3}$

(57) $x=1$

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

هـ. تحليل إلى عوامل للقالب الجبريّ $a\,x^2 + b\,x + c$ (ترينوم)

هـ1. التّرينوم وتحليله بواسطة حلّ المعادلة التّربيعيّة الملائمة

القالب $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$ $(a \neq 0)$ يُسمّى **"ترينوم"** (في العربيّة: **ثلاثيّ الحدود**).

نريد في بعض الأحيان تحليل التّعبير $ax^2 + bx + c$ ليكون حاصل ضرب تعبيرَيْن من الدّرجة الأولى.

إذا كانت للمعادلة التّربيعيّة الملائمة $ax^2 + bx + c = 0$ **حلولًا حقيقيّة**، كان التّحليل ممكنًا.

يمكننا البرهنة أنّه إذا كان جذرا المعادلة التّربيعيّة هما: x_1 وَ x_2

فإنّ التّحليل هو: $\boxed{\mathbf{a}(x - x_1)(x - x_2)}$

أمثلة محلولة

(1) حلّلوا إلى عوامل التّعبير: $2x^2 + 5x - 12$

الحلّ:

نحلّ المعادلة التّربيعيّة $2x^2 + 5x - 12 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1.5 \\ x_2 = -4 \end{array} \right.$$

حصلنا على أنّ للمعادلة التّربيعيّة توجد حلولٌ حقيقيّة، ولذا التّحليل ممكنٌ.

في المثال الحاليّ: $x_1 = 1.5$, $x_2 = -4$, $a = 2$.

إذا عوّضنا في $a(x - x_1)(x - x_2)$ سنحصل على: $2(x - 1.5)(x - (-4)) =$

نبسّط ونحصل على: $= 2(x - 1.5)(x + 4) = (2x - 3)(x + 4)$

(2) حلّلوا إلى عوامل التّعبير: $4x \;\; - 12x - 55$

الحلّ:

نحلّ بدايةً المعادلة التّربيعيّة: $4x^2 - 12x - 55 = 0$

ونحصل على: $x_1 = -2.5$, $x_2 = 5.5$. لذا، يكون التّحليل: $4(x - 5.5)(x + 2.5)$.

فحص: إذا نفّذنا الضّرب سنحصل على:

$$4(x - 5.5)(x + 2.5) =$$
$$= (4 \cdot x - 4 \cdot 5.5)(x + 2.5) = (4x - 22)(x + 2.5) =$$
$$= 4x^2 + 10x - 22x - 55 = 4x^2 - 12x - 55 \quad \checkmark$$

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

(3) حلّلوا إلى عوامل التّعبير: $2x^2-3x+4$

الحلّ:

نحلّ بدايةً المعادلة التّربيعيّة: $2x^2-3x+4=0$:

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-32}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{-23}}{4}$$

العدد تحت الجذر سالبٌ ولذا **لا يوجد للمعادلة حلٌّ حقيقيٌّ**.

جواب: التّعبير $2x^2-3x+4$ لا يمكن تحليله إلى حاصل ضرب عاملَيْن من الدّرجة الأولى.

(4) حلّلوا إلى عوامل التّعبير: $4x^2-28x+49$

الحلّ:

نحلّ بدايةً المعادلة التّربيعيّة: $4x^2-28x+49=0$:

$$x_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{784-784}}{8}=\frac{28\pm0}{8}\left\langle\begin{array}{l}x_1=3.5\\x_2=3.5\end{array}\right.$$

حصلنا على أنّ للمعادلة التّربيعيّة توجد حلولٌ حقيقيّة، ولذا التّحليل ممكنٌ.

انتبهوا: حصلنا في هذا المثال على حلَّيْن **مُتّحدَيْن** في حلٍّ واحد (جذران متماثلان).

نقول، إنّ للمعادلة التّربيعيّة هذه يوجد **جذرٌ** (أو حلٌّ) **واحدٌ مزدوج**.

في المثال الحالي: $x_1=3.5$, $x_2=3.5$, $a=4$.

إذا عوّضنا في $a(x-x_1)(x-x_2)$ سنحصل على: $4(x-3.5)(x-3.5)=$

نبسّط ونحصل على: $=4(x-3.5)^2=(2x-7)^2$

ملاحظة: يمكننا حلّ المثال رقم **(4)** أيضًا بمساعدة قانون الضّرب المختصر لمربّع مجموع حدّين $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ، على النّحو التّالي:

$$\left.\begin{array}{lll}4x^2=a^2 & \Rightarrow & a=2x\\ 49=b^2 & \Rightarrow & b=7\end{array}\right\}\Rightarrow\quad 2ab=2\cdot2x\cdot7=28x$$

لذا يمكننا تحليل التّعبير بصورةٍ مباشرة (بدون أن نحلّ المعادلة):

$$4x^2-28x+49=(2x)^2-2\cdot2x\cdot7+7^2=(2x-7)^2$$

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

هـ.2 طريقة أخرى لتحليل التّرينوم: استعمال التّحليل بحسب مجموعات

نتمعّن مثلًا في التّرينوم التّالي: $2a^2+11a+15$.

نحلّله إلى عوامل بالطّريقة التّالية: بدَلَ الحد الأوسط $11a$ نكتب: $6a+5a$.

نكتب هذا في التّرينوم ونحصل على: $2a^2+6a+5a+15$

نحلّل التّعبير الأخير بحسب مجموعات، أي، نُخرج عامل مشترك من كلّ زوج حدود، ونحصل على:

$2a(a+3)+5(a+3)$

وأخيرًا نُخرج العامل المشترك $(a+3)$ ونحصل على التّحليل النّهائيّ: $(a+3)(2a+5)$

بشكلٍ عامٍّ، كي نحلّل إلى عوامل التّعبير: ax^2+bx+c يجب تبديل الحدّ الأوسط bx

بحاصل جمع حدَّيْن: b_1x+b_2x يحقّقان المتساويتَيْن: $b_1+b_2=b$, $b_1b_2=ac$.

بكلمات: يجب إيجاد عددَيْن مجموعهما هو b وحاصل ضربهما هو $a\cdot c$.

ملاحظة: كما في تحليل التّرينوم بواسطة حلّ المعادلة التّربيعيّة المناسبة، أيضًا في طريقة التّحليل هذه، التّحليل ممكنًا فقط إذا كانت للمعادلة التّربيعيّة $ax^2+bx+c=0$ حلولٌ (جذورٌ) حقيقيّة.

في الحالات الخاصّة التي فيها $a=1$ ، نحصل على التّرينوم: x^2+bx+c وعلينا تبديل الحدّ الأوسط bx
بمجموع الحدَّيْن: b_1x+b_2x اللّذَيْن يحقّقان: $b_1+b_2=b$, $b_1b_2=c$.

في التّرينوم $2a^2+11a+15$ الذي حلّلناه أعلاه، بحثنا عن عددَين مجموعهما 11 وحاصل ضربهما $2\cdot 15=30$.
بعد أن وجدنا أنّ العددَيْن هما 5 وَ 6 بدّلنا التّعبير $11a$ بالمجموع $6a+5a$ ونفّذنا تحليل بحسب مجموعات.

نتمعّن فيما يلي بمثالٍ آخر لتحليل عوامل التّرينوم بحسب الطّريقة التي عرضناها أعلاه.

مثال محلول

حلّلوا إلى عوامل التّعبير $6a^2-17ab-14b^2$

الحلّ:

نبحث عن تعبيرَيْن مجموعهما $\mathbf{-17ab}$ **(انتبهوا إلى الإشارة)** وحاصل ضربهما: $6a^2\cdot(-14b^2)=\mathbf{-84a^2b^2}$.

التّعبيران الملائمان هما: $\mathbf{-21ab}$, $\mathbf{4ab}$.

نكتب التّرينوم من جديد: $6a^2-21ab+4ab-14b^2$

نحلّل بحسب مجموعات: $3a(2a-7b)+2b(2a-7b)$

نُخرج العامل المشترك $(2a-7b)$ ونحصل على: $(2a-7b)(3a+2b)$

هـ.3 استعمال تحليل التّرينوم لتبسيط كسورٍ جبريّة ولحلّ معادلات تحتوي على كسورٍ جبريّة

أمثلة محلولة

(1) بسّطوا الكسر التّالي (استعينوا بتحليل التّرينوم): $\frac{3m-6}{2m^2-3m-2}$

أكتبوا أيضًا مجال التّعويض.

الحلّ:

نُحلّل البسط بواسطة إخراج العامل 3 قبل القوسَيْن: $3m-6=3(m-2)$

يمكننا تحليل المقام بحسب تحليل التّرينوم.

نحلّ أوّلًا المعادلة التّربيعيّة: $2m^2-3m-2=0$

ونحصل على: $m_1=2$, $m_2=-0.5$. في التّرينوم الذي أمامنا: $a=2$.

نعوّض $a(m-m_1)(m-m_2)$ ونحصل على: $2(m-2)(m+0.5)$.

مجال تعويض الكسر المعطى هو: $m\neq 2\,,-0.5$ لأنّه إذا نظرنا إلى مقام الكسر المعطى: $2(m-2)(m+0.5)$ سنرى أنّه يساوي صفرًا في $m=2$ أو $m=-0.5$.

لذا:
$$\frac{3m-6}{2m^2-3m-2}=\frac{3(m-2)}{2(m-2)(m+0.5)}=\frac{3\cancel{(m-2)}}{2\cancel{(m-2)}(m+0.5)}=$$
$$=\frac{3}{2(m+0.5)}=\frac{3}{2m+1}$$

(2) حلّوا المعادلة: $\frac{9}{x^2-2x-3}+\frac{8}{x^2-6x+9}-\frac{6}{2x+2}=\frac{8}{6-2x}$

أكتبوا أيضًا مجال تعويض المعادلة.

الحلّ:

نحلّل إلى عوامل ونحصل على: $\frac{9}{(x+1)(x-3)}+\frac{8}{(x-3)^2}-\frac{\cancel{6}\,3}{\cancel{2}(x+1)}=\frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{2}(3-x)}$

للتّحليل استعنّا: بإخراج عامل مشترك، بقانون الضّرب المختصر وبتحليل التّرينوم.

مجال تعويض المعادلة هو: $x\neq 3$ وأيضًا $x\neq -1$.

يمكننا كتابة التّعبير في الطّرف الأيمن بالشّكل التّالي: $\frac{-4}{x-3}$.

نضرب بالمقام المشترك: $(x+1)(x-3)^2$ ونحصل على:

$$\frac{{}^{(x-3)}\!/_{9}}{(x+1)(x-3)}+\frac{{}^{(x+1)}\!/_{8}}{(x-3)^2}-\frac{{}^{(x-3)^2}\!/_{3}}{(x+1)}=-\frac{{}^{(x+1)(x-3)}\!/_{4}}{(x-3)}$$

$$9(x-3)+8(x+1)-3(x-3)^2=-4(x+1)(x-3)$$

بعد فتح الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة والنّقل من طرف إلى طرف نحصل على المعادلة التّربيعيّة:

$x^2+27x-58=0$ والتي حلّاها هما: $\mathbf{{}_1=2}$, $\boldsymbol{x_2=-29}$.

كِلا الحلّيْن يقعان في مجال التّعويض.

تمارين للعمل الذّاتيّ

في التّمارين **(1)** – **(12)** حلّلوا التّرينوم المعطى $(a=1)$.

(1) x^2-5x+6 **(2)** b^2+6b+8 **(3)** y^2+y-2

(4) y^2-y-2 **(5)** x^2-5x-6 **(6)** $x\ \ +5x-6$

(7) $m^2-4m-12$ **(8)** $m^2+4m-12$ **(9)** $m^2-2m-15$

(10) $m^2+2m-15$ **(11)** $x^2-11x+10$ **(12)** $x^2+11x+18$

في التّمارين **(13)** – **(24)** حلّلوا التّرينوم المعطى $(a\neq 1)$.

(13) $2m^2-m-1$ **(14)** $2m^2+m-1$ **(15)** $3m^2-m-2$

(16) $3m^2+m-2$ **(17)** $3b^2-2b-1$ **(18)** $3b^2+2b-1$

(19) $2x^2-3x-5$ **(20)** $2x^2+3x-5$ **(21)** $2x^2-5x+2$

(22) $2x^2-3xy-5y^2$ **(23)** $4c^2b^2+12cb-7$ **(24)** $3c^2b^2+7cb+4$

في التّمارين **(25)** – **(36)** استعينوا بتحليل التّرينوم وبسّطوا الكسور الجبريّة.
أكتبوا في كلّ تمرين تحت أيّ شرطٍ الكسر المعطى مساوٍ بالقيمة للكسر المبسّط.

(25) $\dfrac{-3x-15}{2x^2+7x-15}$ **(26)** $\dfrac{5x+15}{2x^2+x-15}$ **(27)** $\dfrac{6x-9}{4x^2+8x-21}$

(28) $\dfrac{4x^2-9}{4x^2-4x-15}$ **(29)** $\dfrac{4x^2-49}{4x^2+12x-7}$ **(30)** $\dfrac{5x^4-125x^2}{3x^2+18x+15}$

(31) $\dfrac{5a^2-a-4}{16-25a^2}$ **(32)** $\dfrac{x^2+17x+16}{x^2-3x-4}$ **(33)** $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}$

(34) $\dfrac{4x^2-9y^2}{2x^2+3xy-9y^2}$ **(35)** $\dfrac{-3x^2+8xy-4y^2}{2x^2-3xy-2y^2}$ **(36)** $\dfrac{x^4+2x^2y-3y^2}{x^4-6x^2y+5y^2}$

في التّمارين **(37)** – **(39)** استعينوا بالتّحليل إلى عوامل وبسّطوا التّعابير التّالية.
أكتبوا في كلّ تمرين مجموعة تعويض التّعبير.

(37) $$\frac{5}{3a^2+7ab+2b^2}-\frac{7}{3a^2+5ab-2b^2}$$

(38) $$\frac{14}{a^2+2ab-48b^2}-\frac{11}{a^2+5ab-24b^2}$$

(39) $$\frac{17}{10a^2+13ab-3b^2}+\frac{9}{5a^2-11ab+2b^2}$$

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

في التّمارين **(40)** – **(45)** استعينوا بالتّحليل إلى عوامل وحلّوا المعادلات.

(40) $\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{3x-6}{x^2+x-2}$

(41) $1-\frac{x-2}{x-4}+\frac{1}{2-x}=\frac{5x-4}{x^2-6x+8}$

(42) $\frac{x+1}{2-x}+\frac{x+2}{x+3}-\frac{4x+7}{6-x-x^2}=0$

(43) $\frac{3}{x^2-2x-8}-\frac{4}{x^2-16}=\frac{x-6}{x^2+6x+8}$

(44) $\frac{3}{x^2-8x+7}+\frac{4}{7-x^2+6x}=\frac{x-9}{x^2-1}$

(45) $\frac{x-2}{2x+2}-\frac{1}{3x^2-6x-9}-\frac{x-30}{18-6x}=3$

أجوبة نهائيّة

(1) $(x-2)(x-3)$
(2) $(b+2)(b+4)$
(3) $(y-1)(y+2)$

(4) $(y+1)(y-2)$
(5) $(x+1)(x-6)$
(6) $(x-1)(x+6)$

(7) $(m-6)(m+2)$
(8) $(m+6)(m-2)$
(9) $(m-5)(m+3)$

(10) $(m+5)(m-3)$
(11) $(x-$ [illegible]$)(x-$ [illegible]$)$
(12) $(x+2)(x+9)$

(13) $(m-1)(2m+1)$
(14) $(m+1)(2m-1)$
(15) $(m-$ [illegible]$)($ [illegible] $m+$ [illegible]$)$

(16) $(m+1)(3m-2)$
(17) $(b-1)(3b+1)$
(18) $(b+1)(3b-1)$

(19) $(x+1)(2x-5)$
(20) $(x-1)(2x+5)$
(21) $(x-2)(2x-1)$

(22) $(x+y)(2x-5y)$
(23) $(2cb+7)(2cb-1)$
(24) $(3cb+4)(cb+1)$

(25) $\frac{-3}{2x-3}$, $x\neq-5$
(26) $\frac{5}{2x-5}$, $x\neq-3$
(27) $\frac{3}{2x+7}$, $x\neq\frac{3}{2}$

(28) $\frac{2x-3}{2x-5}$, $x\neq-\frac{3}{2}$
(29) $\frac{2x-7}{2x-1}$, $x\neq-3\frac{1}{2}$

(30) $\frac{5x^2(x-5)}{3(x+1)}$, $x\neq-5$
(31) $\frac{a-1}{4-5a}$, $a\neq-\frac{4}{5}$
(32) $\frac{x+16}{x-4}$, $x\neq-1$

(33) $(x+1)(x+2)$, $x\neq1\,,\,2$
(34) $\frac{2x+3y}{x+3y}$, $x\neq\frac{3}{2}y$
(35) $\frac{2y-3x}{2x+y}$, $x\neq2y$

(36) $\frac{x^2+3y}{x^2-5y}$, $y\neq x^2$
(37) $\frac{6}{(3a+b)(3a-b)}$, $a\neq-2b\,,\,-\frac{b}{3}\,,\,\frac{b}{3}$

(38) $\frac{3}{(a-6b)(3b-a)}$, $a\neq-8b\,,\,3b\,,\,6b$

(39) $\frac{7}{(a-2b)(2a+3b)}$, $a\neq-\frac{3b}{2}\,,\,2b\,,\,\frac{b}{5}$

(40) $x=-3$
(41) $x=\frac{3}{2}$
(42) كلّ x عدا: $x=2$, $x=-3$

(43) $x=5$
(44) $x=8$
(45) $x_1=-2$, $x_2=\frac{10}{7}$

الملحق أ.4 :
الجذر التّربيعيّ، أُسٌّ قوّة تساوي نصف

العمليّة العكسيّة لعمليّة القوّة للأُسّ 2 (تربيع) تُسمّى **إخراج جذر تربيعيّ**.
نُعرّف ما هو الجذر التّربيعيّ (جذر من الدّرجة الثّانية أو الجذر الثّاني):

الجذر التّربيعيّ لعددٍ غير سالبٍ معطًى هوعددٌ (أكبر أو يساوي صفر)، إذا ضربناه بنفسه،
أي: رفعناه للقوّة 2 ، أو بكلمات أخرى: رَبّعناه)، نعود ونحصل على العدد نفسه.
الجذر التّربيعيّ يُسمّى أيضًا **جذرًا من الدّرجة الثانية**.

نُشير إلى **الجذر التّربيعيّ** بالإشارة التّالية: $\sqrt{\ }$.
تُنفّذ عمليّة الجذر التّربيعيّ فقط على عددٍ موجبٍ أو 0 ،
وبالأحرف والرّموز: $b^2 = a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a} = b \quad (a \ge 0\ ,\ b \ge 0)$.

في هذه الحالة نقول، إنّ **b هو الجذر التّربيعيّ لـ a** .

<u>مثال:</u> $\sqrt{25} = 5$
أي: "الجذر التّربيعيّ لـ 25 هو 5".
شرح: إذا رفعنا العدد 5 للقوّة 2 سنحصل على 25 ، $(5^2 = 25)$.

كنّا قد واجهنا عمليّة الجذر التّربيعيّ مِرارًا وتكرارًا عندما حللنا معادلات تربيعيّة.
نؤكّد أنّ قيمة التّعبير $\sqrt{9}$ (مثلًا) هي **العدد الموجب**: 3 ، بينما في حلّ المعادلة: $x^2 = 9$ (مثلًا)
نحصل على حلّين: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.
على سبيل المثال المساواة: $\sqrt{a^8} = a^4$ صحيحة لكلّ a حقيقيّ،
لكن المساواة: $\sqrt{a^2} = a$ صحيحة فقط لكلّ a غير سالب، بالنّسبة لكلّ $a \ge 0$)
وكذلك المساواة: $\sqrt{a^2 - 10a + 25} = a - 5$ صحيحة لكلّ $a \ge 5$.

قوانين لحساب جذورٍ تربيعيّة:

$\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$	$(a \ge 0\ ,\ n$ طبيعيّ$)$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^n}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^n} = \left(\sqrt{a}\right)^{-n} = \sqrt{a^{-n}}$	$(a > 0\ ,\ n$ طبيعيّ$)$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$(a \ge 0\ ,\ b \ge 0)$
$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$	$(a > 0\ ,\ b > 0)$

أمثلة محلولة

نتناول عدّة أمثلة لتبسيط وحساب تعابير تحتوي على جذورٍ.

(1) إخراج عامل مشترك **خارج** الجذر: $\sqrt{640}=\sqrt{64\cdot 10}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{10}=8\sqrt{10}$

(2) إدخال عامل **إلى داخل** الجذر: $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}$

(3) تبسيط تعبير جبريّ $(a>0)$: $\frac{\sqrt{a}-a}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}\,(1-\sqrt{a}\,)}{\sqrt{a}}=1-\sqrt{a}$

(4) تبسيط جبريّ $(a\geq 0\ ,\ a\neq 16)$: $\frac{a-16}{\sqrt{a}-4}=\frac{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)}{\sqrt{a}-4}=\sqrt{a}+4$

* * *

يمكننا وصف الجذر التّربيعيّ أيضًا بواسطة قوى. عندما تناولنا قوانين القوى كنّا قد حدّدنا البحث ليشمل قوى ذوات أُسُسٍ صحيحة (موجبة، سالبة أو صفر) فقط، لكن عمليًّا قوانين القوى صحيحة كما تعلّمناها لكلّ الأسُس الحقيقيّة. ومع هذا، يسهل علينا وصف الجذر التّربيعيّ بواسطة القوى (سنرى هذا على وجه التّحديد في نطاق تعلّمنا لحساب التّفاضل).

من خلال تعريف الجذر التّربيعيّ وبواسطة قوانين القوى سنرى أنّه يتحقّق: $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$ بالنّسبة لكلّ $a\geq 0$.

- $\sqrt{81}=9=9^1=9^{\frac{1}{2}\cdot 2}=\left(9^2\right)^{\frac{1}{2}}=(81)^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt{8^{2n}}=\sqrt{8^n\cdot 8^n}=8^n=8^{\frac{1}{2}\cdot 2n}=\left(8^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$

أي، الجذر التّربيعيّ لعددٍ معطًى هو العدد المعطى للقوّة نصف.

كتابة جذورٍ تربيعيّة بواسطة قوى أُسُسِها هي نصف:

$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}=a^{0.5}$	$(a\geq 0)$
$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{a^{0.5}}=a^{-0.5}=a^{-\frac{1}{2}}$	$(a>0)$
$\sqrt{a^n}=a^{\frac{n}{2}}=a^{0.5n}$	$(a\geq 0)$
$\frac{1}{\sqrt{a^n}}=\frac{1}{a^{0.5n}}=a^{-0.5n}=a^{-\frac{n}{2}}$	$(a>0)$

أمثلة محلولة - تكملة

(5) كما ذكرنا، فإنّ قوانين القوى التي صيغت لأُسُسٍ صحيحة هي أيضًا صحيحةٌ بالنّسبة لكلّ أُسٍّ حقيقيٍّ وتحديدًا بالنّسبة للأُسُسِ التي تساوي نصف. هكذا على سبيل المثال يتحقّق:

- $\sqrt{x^7}=x^{0.5\cdot 7}=x^{3.5}=x^3\cdot x^{0.5}=x^3\sqrt{x}$ (لكلّ $x\geq 0$)
- $\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{0.5\cdot 3}}=\frac{1}{x^{1.5}}=x^{-1.5}=x^{-1}\cdot x^{-0.5}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x\sqrt{x}}$ (لكلّ $x>0$)

(6) بسّطوا التّعبير: $x\sqrt{x^3}+\sqrt{4x^5}$ ($x \ge 0$).

الحلّ:

$$x\sqrt{x^3}+\sqrt{4x^5}=x\sqrt{x^3}+\sqrt{4}\cdot\sqrt{x^5}=x\cdot x^{0.5\cdot 3}+2\cdot x^{0.5\cdot 5}=$$

$$=x^1\cdot x^{1.5}+2x^{2.5}=x^{1+1.5}+2x^{2.5}=x^{2.5}+2x^{2.5}=$$

$$=3x^{2.5}=3x^2\cdot x^{0.5}=3x^2\sqrt{x}$$

* * *

تمارين للعمل الذّاتيّ

(1) في البنود التّالية أخرجوا عاملًا خارج الجذر.

(أ) $\sqrt{8}$ (ب) $\sqrt{20}$ (ج) $\sqrt{50}$ (د) $\sqrt{27}$

(هـ) $\sqrt{125}$ (و) $\sqrt{270}$ (ز) $\sqrt{250}$ (ح) $\sqrt{162}$

(2) في البنود التّالية أخرجوا عاملًا خارج الجذر. انتبهوا إلى مجال التّعريف.

(أ) $\sqrt{a^5}$, $a \ge 0$

(ب) $\sqrt{a^3}$, $a \ge 0$

(ج) $\sqrt{a^2b^3}$, $a\,,b \ge 0$

(د) $\sqrt{a^6b^8c^9}$, $a\,,c \ge 0$

(هـ) $\sqrt{a^{10}b^{12}c^5}$, $a\,,c \ge 0$

(3) في التّمارين التّالية أدخِلوا إلى داخل الجذر العوامل الموجودة خارج الجذر.

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$ (ج) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$ (د) $4\sqrt{2}$

(هـ) $6\sqrt{5}$ (و) $1.5\sqrt{12}$ (ز) $\frac{5}{4}\sqrt{6.4}$ (ح) $\frac{1}{6}\sqrt{72}$

(4) في التّمارين التّالية أدخِلوا إلى داخل الجذر العوامل الموجودة خارج الجذر.
انتبهوا إلى مجال التّعريف.

(أ) $a\sqrt{a^5}$, $a \ge 0$ (ب) $a^2b\sqrt{ab}$, $a\,,b \ge 0$

(ج) $\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$, $a > b \ge 0$ (د) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$, $a > b \ge 0$

(5) بسّطوا وجدوا دون استعمال الآلة الحاسبة قيم التّعابير في البنود التّالية.

(أ) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{12}$

(ج) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$ (د) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$

(هـ) $\frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{54}}{\sqrt{12}}$ (و) $\frac{\sqrt{24}\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{12}}$

(ز) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}$ (ح) $\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}$

(ط) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ (ي) $\sqrt{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt{10+\sqrt{19}}$

(6) افتحوا الأقواس $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ مستعينين بقوانين الضّرب المختصر واشرحوا لماذا مجموع كلّ عددٍ موجبٍ ومقلوبه أكبر أو يساوي 2 .

(7) افتحوا الأقواس $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ مستعينين بقوانين الضّرب المختصر واشرحوا لماذا المعدّل الحسابيّ لعددَيْن موجبَيْن أكبر أو يساوي معدّلهما الحسابيّ.

ملاحظة:

إذا أُعطِيَ زوج الأعداد a وَ b ، فإنّ معدّلهما **الحسابيّ** هو $\frac{1}{2}(a+b)$ ومعدّلهما **الهندسيّ** هو $\sqrt{ab}$.

(8) بسِّطوا التّعابير التّالية (يمكنكم الاستعانة بكتابة قوّة أسُّها نصف).

(أ) $x\sqrt{x^5}+\sqrt{9x^7}\ ,\ (x\ge 0)$

(ب) $2x\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}\ ,\ (x\ge 0)$

(ج) $x\sqrt{x^5}-\sqrt{4x^7}\ ,\ (x\ge 0)$

(د) $(x+1)\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{16(x+1)^5}\ ,\ (x\ge -1)$

أجوبة نهائيّة

(1) (أ) $2\sqrt{2}$ (ب) $2\sqrt{5}$ (ج) $5\sqrt{2}$ (د) $3\sqrt{3}$

(هـ) $5\sqrt{5}$ (و) $3\sqrt{30}$ (ز) $5\sqrt{10}$ (ح) $9\sqrt{2}$

(2) (أ) $a^2\sqrt{a}$ (ب) $a\sqrt{a}$ (ج) $ab\sqrt{b}$ (د) $a^3b^4c^4\sqrt{c}$ (هـ) $a^5b^6c^2\sqrt{c}$

(3) (أ) $\sqrt{12}$ (ب) $\sqrt{2}$ (ج) $\sqrt{12}$ (د) $\sqrt{32}$

(هـ) $\sqrt{180}$ (و) $\sqrt{27}$ (ز) $\sqrt{10}$ (ح) $\sqrt{2}$

(4) (أ) $\sqrt{a^7}$ (ب) $\sqrt{a^5b^3}$ (ج) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ (د) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

(5) (أ) 6 (ب) 18 (ج) 12 (د) 15 (هـ) 12

(و) 6 (ز) 1 (ح) 1 (ط) 1 (ي) 9

(8) (أ) $4\sqrt{x^7}=4x^3\sqrt{x}$ (ب) $3\sqrt{x^5}=3x^2\sqrt{x}$

(ج) $-\sqrt{x^7}=-x^3\sqrt{x}$ (د) $-3\sqrt{(x+1)^5}=-3(x+1)^2\sqrt{x+1}$

المُلحق ب : تمارين إضافيّة للمراجعة، مُقدِّمة للتّحليل الرّياضيّ وحساب التّفاضل

تمارين إضافيّة للفصل 3: تحوّلات في الدّوالّ

(1) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=x$

نُنفّذ تحوّلًا للدّالّة $f(x)$ حول المحور y ونحصل على الدّالّة $g(x)$.

(أ) ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(ب) أُرسموا الخطَّيْن البيانيَّيْن للدّالَّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$ في نفس هيئة المحاور.

(2) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=x^2-1$

نُنفّذ على الدّالّة $f(x)$ إزاحة عموديّة بوحدة واحدة إلى الأعلى.

أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة الجديدة $g(x)$.

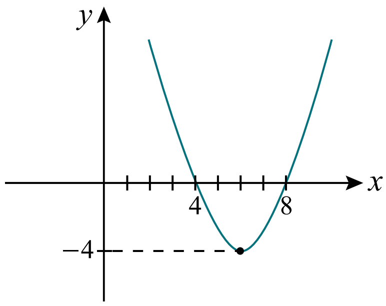
(3) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=2x+2$ ومعطاةٌ الدّالّة $g(x)=2x+5$

(أ) ما هو التّحوّل الذي يُحوّل الدّالّة من $f(x)$ إلى $g(x)$ ؟

(ب) أُرسموا الخطَّيْن البيانيَّيْن للدّالَّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$ في نفس هيئة المحاور.

(4) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=x^2-6x+5$

ومعطى أنّ $g(x)$ هي دالّة تربيعيّة فيها $a=1$ ، وخطُّها البيانيّ معطى في الجهة اليسرى.



ما هو التّحوّل الذي نُفّذ على $f(x)$ كي نحصل على الدّالّة $g(x)$ وما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $g(x)$ ؟

(5) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=x^2$.

على الدّالّة $f(x)$ ينفّذون إزاحة أُفقيّة بِـ وحدتَيْن إلى اليمين ويحصلون على الدّالّة $g(x)$.

ومن ثمّ ينفّذون على $g(x)$ إزاحة عموديّة إلى الأعلى 3 وحداتٍ ويحصلون على الدّالّة $h(x)$.

ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(6) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=x+8$.

على الدّالّة $f(x)$ ينفّذون انعكاسًا حول المحور x ويحصلون على $g(x)$.

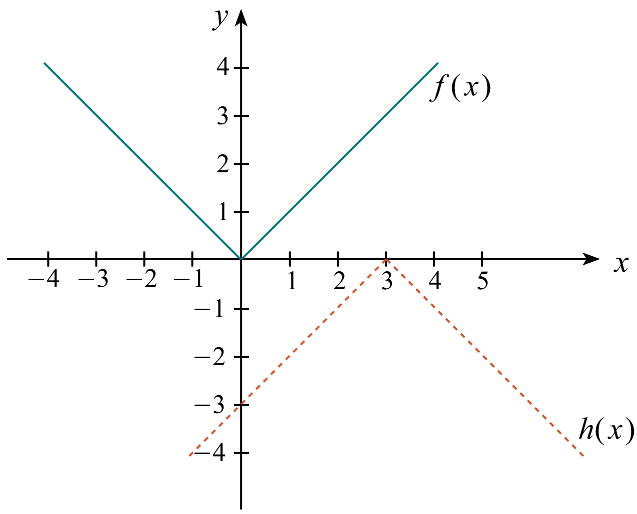
ومن ثمّ ينفّذون على $g(x)$ انعكاسًا حول المحور y ويحصلون على $h(x)$.

أُرسموا الخطوط البيانيّة للدّوالّ $f(x)$, $g(x)$ وَ $h(x)$.

(7) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=x^2-5x+6$

ومعطاةٌ الدّالّة $h(x)=3x^2-15x+20$.

صفوا بكلماتٍ ما العمليّتان اللّتان أُجريتا على الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ليحصلوا على الدّالّة $h(x)$.



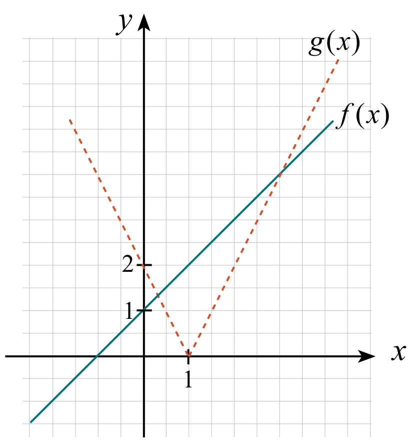
(8) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=|x|$.
ومعطى الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$.
(أ) صفوا بكلماتٍ ما العمليّتان اللّتان نُفِّذتا على الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ليحصلوا على الخطّ البيانيّ للدّالّة $h(x)$.
(ب) ما هو التّعبير الجبريّ للدّالّة $h(x)$ ؟

(9) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=x^2$
على $f(x)$ نُفِّذ: – إزاحة أفقيّة 3 وحدات إلى اليمين.
– إزاحة عموديّة 5 وحدات إلى الأعلى.
– إزاحة أفقيّة 6 وحدات إلى اليمين.
نتجت دالّة جديدة $h(x)$. أكتبوا التّعبير الجبريّ المناسب للدّالّة الجديدة.

(10) معطاةٌ الدّالّة $f(x)=\sqrt{x}$ ومعطاةٌ التّحوّلات التّالية: ★
$g(x)$ – إزاحة عموديّة للدّالّة $f(x)$ بـ 3 وحدات إلى الأعلى.
$h(x)$ – توسيع عموديّ للدّالّة $g(x)$ بضعفَيْن.
$i(x)$ – إزاحة عموديّة للدّالّة $h(x)$ بِـ وحدتَيْن إلى الأسفل.
أُرسموا الخطّ البيانيّ للدّالّة $i(x)$.

(11) معطى: $f(x)=x^2-4x+3$ وَ $g(x)=-2x^2+8x-14$. ★
اِشرحوا كيف نتجت الدّالّة $g(x)$ عن طريق 3 تحوّلاتٍ نُفِّذَت على $f(x)$.

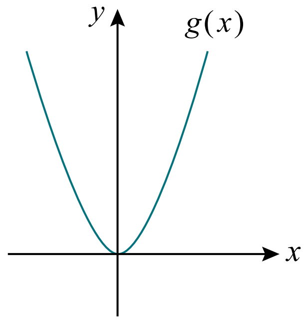
(12) معطى في الرّسم الخطّان البيانيّان للدّالّتَيْن: $f(x)=x+1$ وَ $g(x)$.
اِشرحوا كيف يمكننا الوصول من الدّالّة $f(x)$ إلى $g(x)$ عن طريق 3 تحوّلاتٍ مختلفة.



أجوبة نهائيّة

(1) (أ) $g(x)=f(-x)=-x$ (ب) افحصوا مع المعلّم في الصّف.

(2)

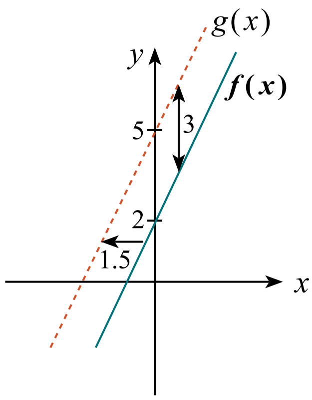


(3) (أ) **إزاحة عموديّة لِـ** $f(x)$ ، 3 وحدات إلى الأعلى: $g(x)=f(x)+3$.

أو: إزاحة أفقيّة لِـ $f(x)$ a وحدات. نجد قيمة a .

$$g(x)=f(x-\mathrm{a}) \Rightarrow$$
$$2x+5=2(x-\mathrm{a})+2 \Rightarrow$$
$$2x+5=2x-2\mathrm{a}+2 \Rightarrow$$
$$-2\mathrm{a}=3 \Rightarrow$$
$\mathrm{a}=-1.5 \Rightarrow \mathrm{a}<0 \Rightarrow$ إزاحة إلى اليسار 1.5 وحدة طول
$$\Rightarrow \quad g(x)=f(x+1.5)$$

(ب) نُبيّن شرح الحلَّيْن بواسطة الرّسم في هيئة المحاور:



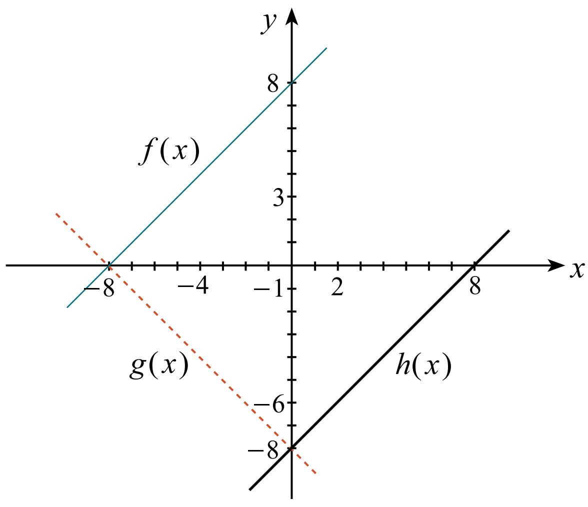
كي نحصل على الخطّ البيانيّ للدّالّة $g(x)$ يمكننا إزاحة الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ بِـ 3 وحدات إلى الأعلى أو 1.5 وحدة إلى اليسار.

(4) $g(x)$ هي إزاحة لِـ $f(x)$ ، 3 وحدات إلى اليمين: $g(x)=x^2-12x+32 \Rightarrow g(x)=f(x-3)$

(5) <u>**حلّ كامل:**</u>

$$g(x)=f(x-2)=(x-2)^2$$
$$=x^2-4x+4$$
$$h(x)=g(x)+3=x^2-4x+7$$

(6)



גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

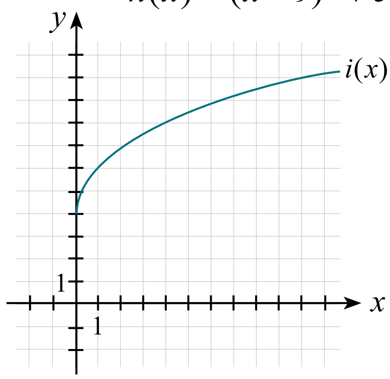
(7) توسيع عموديّ بـِ 3 أضعاف ← إزاحة عموديّة بـِ وحدتَيْن إلى الأعلى.

(8) (أ) إزاحة أفقيّة بـِ 3 وحدات إلى اليمين ← انعكاس حول المحور x (أو بترتيب عكسيّ).

(ب) $h(x) = -|x-3|$

(9) $h(x) = (x-9)^2 + 5 = x^2 - 18x + 86$

(10) $i(x) = 2\sqrt{x} + 4$



(11) انعكاس حول المحور x ← توسيع عموديّ بضعفَيْن ← إزاحة عموديّة بـِ 8 وحدات إلى الأسفل

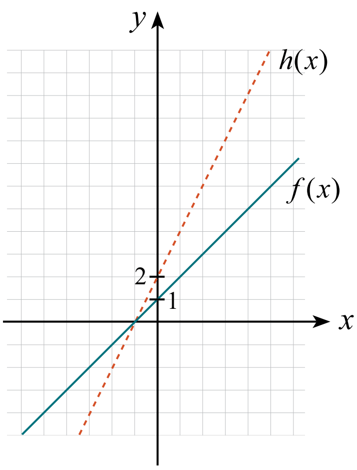
(12) <u>**حلّ كامل:**</u>

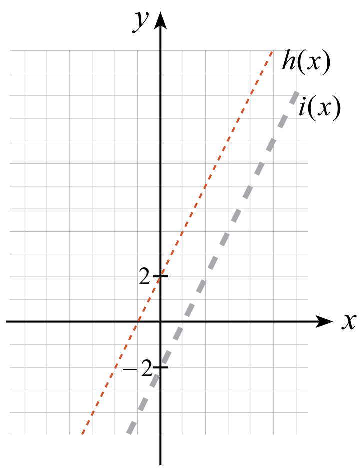
الدّالّة المعطاة:

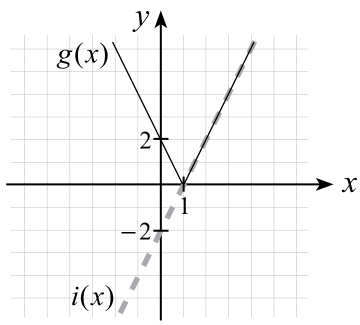
$$f(x) = x + 1$$

$$\Downarrow$$

قيمة مطلقة		إزاحة عموديّة 4 وحدات إلى الأسفل		توسيع عموديّ بضعفَيْن
$g(x) = \lvert i(x) \rvert = \lvert 2x-2 \rvert$	$\Leftarrow$	$i(x) = h(x) - 4 = 2x - 2$	$\Leftarrow$	$h(x) = 2f(x) = 2x + 2$
		أو إزاحة وحدتَيْن إلى اليمين		
		$i(x) = h(x-2) = 2x - 2$		



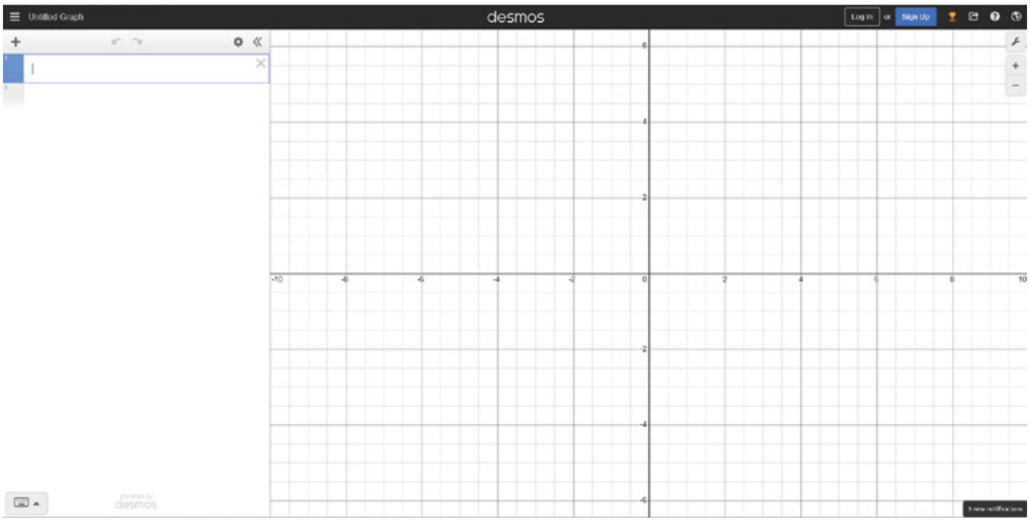




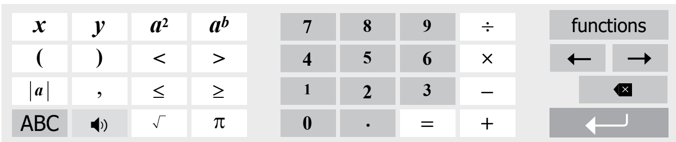
الملحق ج – DESMOS

تمثيل خطوط بيانيّة لدوالّ بواسطة تطبيق DESMOS

DESMOS هو تطبيقٌ حرٌّ يُمكّننا من رسم خطوطٍ بيانيّة وبحثها وتحليلها والمقارنة فيما بينها.
لإنزال التّطبيق، نبحث في "جوجل": Graphing Calculator - Desmos ، نفتح الرّابط،
وتظهر الشّاشة التّالية:



يظهر على الشّاشة من جهة اليمين لوح رسمٍ مُقسّمٌ إلى مربّعات متماثلة وعليه هيئة محاور.
وفي جزء الشّاشة الأيسر يظهر لوحٌ أبيض يمكننا الكتابة عليه وملئه بالمعطيات الجبريّة مثلما سنوضّح فيما بعد.
في الزّاوية اليُسرى **العلويّة** تظهر إشارة **+** نضغط عليها عندما نريد إضافة دالّة جديدة أو تعبيرٍ جبريّ أيًّا كان.
في الزّاوية اليسرى **السّفليّة** تظهر صورة لوحة مفاتيح إذا ضغطنا عليها تنفتح 3 لوحات مفاتيح تنتشر في أسفل الشّاشة (سنشرح عنها في الصّفحة التّالية):

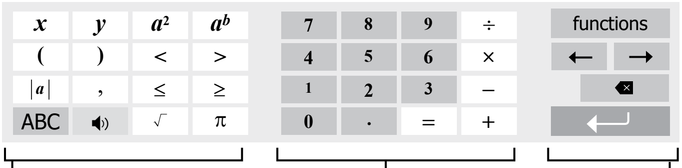


لوحات المفاتيح هذه سيتمّ استعمالها لكتابة دالّة وإدخال التّغييرات والعمليّات التي نريد أن ننفّذها عليها (تحوّلات وأشياء أخرى).
استعمال التّطبيق يمكّننا من تنفيذ عرضٍ مرئيّ سريع للخطّ البيانيّ للدّالّة قبل وخلال وبعد بحثها للفحص والتّعلّم والاستنتاج.
بمساعدة هذا التّطبيق:

- نستطيع رسم الدّالّة المكتوبة ومتابعة التّغييرات التي تطرأ على الخطّ البيانيّ الذي يظهر على لوح المربّعات.
- نستطيع إدخال أكثر من دالّة واحدة والمقارنة بين الخطوط البيانيّة المختلفة كي نتعلّم بهذه الطّريقة عن صفاتها.
- نستطيع أن نبيّن ونرسم الخطّ البيانيّ لمشتقّة كلّ دالّة.
- نستطيع تنفيذ عمليّاتٍ رياضيّة بين الدّوالّ، والقيام بعمليّاتٍ إضافيّة كما يحلو لنا.

والكثير الكثير من الاستعمالات التي يمكنكم اكتشافها من خلال الممارسة والتّعلّم الذّاتيّ واكتساب الخبرة.

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023



لوحة مفاتيح الأعداد والعمليّات الحسابيّة الأساسيّة

لوحة مفاتيح الأحرف:
تُستعمَل لإدخال متغيّرات، بارامترات، إشارات مُتَّفق عليها لعمليّات رياضيّة مثل رفع إلى القوّة، رفع لقوّة أيًّا كانت، جذر، إشارات المتباينات، قيمة مطلقة وإلخ.

لوحة مفاتيح الدّوالّ:
تتضمّن مجموعات دوالّ من كلّ مجالات الرّياضيّات.
نحن سنركّز على الدّوالّ التي نتناولها في حساب التّفاضل
(CALCULUS)

كيف يتمّ تمثيل دالّة معادلتها معطاة في تطبيق DESMOS ؟

في الأمثلة الآتية نحن ننصح بتنفيذ التّعليمات المُفصّلة في كلّ مرحلة بحسب ترتيبها لاكتساب الخبرة الأوّليّة في التّطبيق.
مع مرور الوقت، كلّما تمرّستم أكثر فأكثر في تفعيل التّطبيق، **ستعرفون كيفيّة الاستعانة بهذه البرمجة الهامّة، في كلّ مرحلة.**
بمساعدة الأمثلة الآتية ستتعرّف "ولو بشكلٍ يسير" كيف يمكننا الحصول على وصفٍ بيانيّ لدالّة.
سنتمحور في استعمالات البرمجة التي لها صلةٌ وعلاقةٌ بالمواضيع المرتبطة بالموادّ التّعليميّة المناسبة لنا .

أمثلة

(1) أُرسموا بواسطة تطبيق DESMOS الدّوالّ التّالية:

(أ) $y = x^2$ (ب) $y = x^3$ (ج) $y = \sqrt{x}$

(د) $y = |x|$ (هـ) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ (و) $y = \frac{1}{x}$

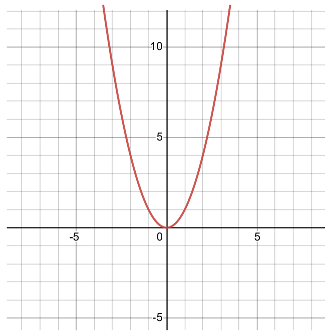
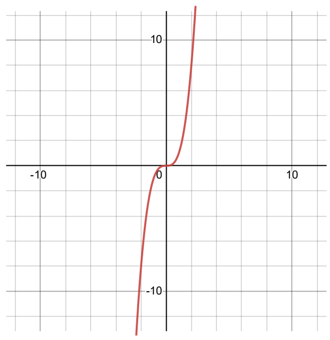
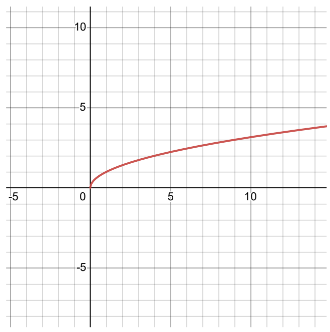
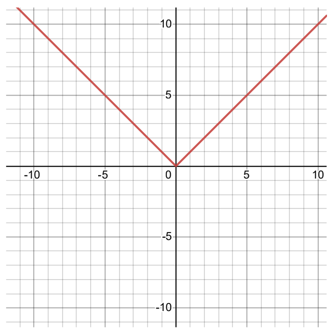
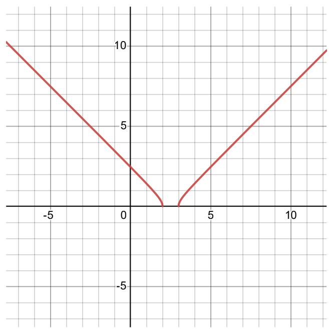
(ز) $y = (x+2)\cdot(x^3 + x^2 + 5)$

<u>الحلّ:</u>

نُنفّذ إضافة دالّة جديدة عن طريق الضّغط على **+** في الجهة اليسرى للشّاشة DESMOS .
تُنفَّذ الكتابةُ بواسطة لوحات المفاتيح الموصوفة أعلاه.

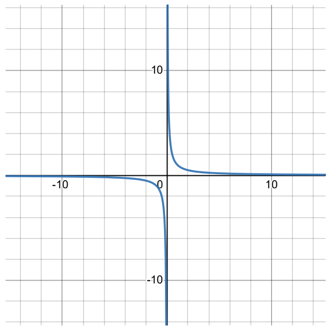
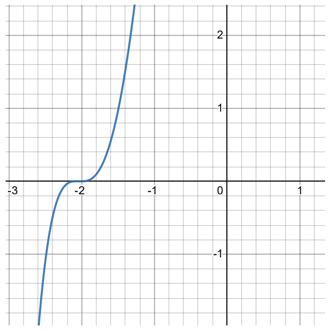
ملاحظة: في هذه المرحلة، قبل كتابة دالّة جديدة علينا مَحْو وإزالة الدّالّة السّابقة واستبدالها بغيرها، بحيث في كلّ مرّة نحصل على خطٍّ بيانيّ لدالّةٍ واحدة فقط.

في الجدول الذي يظهر في الصّفحة التّالية ركّزنا مراحل كتابة التّعبير الجبريّ لكلّ واحدة من الدّوالّ المعطاة في الأمثلة.

	الخطّ البيانيّ الذي يظهر على لوحد الرّسم	مراحل الكتابة (من اليسار إلى اليمين)
(أ)		$\boxed{y = x^2}$ $y = x \to \boxed{a^2}$
(ب)		$\boxed{y = x^3}$ $y = x \to \boxed{a^b} \to 3$
(ج)		$\boxed{y = \sqrt{x}}$ $y = \to \boxed{\sqrt{}} \to x$
(د)		$\boxed{y = \lvert x \rvert}$ $y = \to \boxed{\lvert a \rvert} \to x$
(هـ)		$\boxed{y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ $y = \to \boxed{\sqrt{}} \to$ $\to x \to \boxed{a^2} \to -5x + 6$

يتبع في الصّفحة التّالية >>>

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

	الخطّ البيانيّ الذي يظهر على لوحة الرّسم	مراحل الكتابة (من اليسار إلى اليمين)
(و)		$y=\dfrac{1}{x}$ $y=1\rightarrow\boxed{\div}\rightarrow x$
(ز)		$y=(x+2)\cdot(x^3+x^2+5)$ $y=(x+2)\rightarrow\boxed{\times}\rightarrow(x\rightarrow$ $\boxed{a^b}\rightarrow 3\rightarrow +x\rightarrow\boxed{a^2}\rightarrow$ $\rightarrow +5)$

(2) معطى الدّالّتان: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2\ ,\ g(x)=3x^2+2x$.

(أ) أُرسموا بواسطة تطبيق DESMOS على هيئة محاور واحدة الدّالّتيْن المعطتيْن.

(ب) **أَضيفوا** للرّسم الذي حصلتم عليه رسم المشتقّة $f'(x)$.

<u>الحلّ:</u>

(أ) بدايةً، نرسم الدّالّة $f(x)$:

نكتب داخل لوحة المعطيات: $f(x)=0.5x\rightarrow\boxed{a^2}\rightarrow +2$

سيظهر على لوحة الرّسم في الجهة اليمنى القطع المكافئ الذي يصف الدّالّة $f(x)$.

بما أنّنا نريد إبقاء رسم الخطّ البيانيّ للدّالّة $f(x)$ ، **فلا نمحى** الدّالّة التي كتبناها،

ونضيف بواسطة المفتاح **+** الدّالّة $g(x)$.

سنلاحظ على لوحة المعطيات ظهور سطرٍ جديد ويمكننا كتابة الدّالّة الثّانية داخله

$g(x)$: $g(x)=3x\rightarrow\boxed{a^2}\rightarrow +2x$

سنرى أنّه أُضيف إلى الرّسم الأوّل، بلونٍ آخر، القطع المكافئ الذي يصف الدّالّة $g(x)$.

(ب) نضيف الخطّ البيانيّ لدالّة المشتقّة $f(x)$ كما يلي: نضغط على مِفتاح الإضافة **+** ونكتب الدّالّة الجديدة

$h(x)$ المساوية للدّالّة $f'(x)$ ، على النّحو التّالي: $h(x)=f\rightarrow\boxed{\text{functions}}\rightarrow\boxed{f'}\rightarrow x)$

مِفتاح المشتقّة $\boxed{f'}$ موجودٌ في لوحة مفاتيح الدّوالّ.

كي نصل إليه، نضغط $\boxed{\text{functions}}$ ونتحرّك بواسطة الفارة حتّى نصل إلى مجموعة الدّوالّ الموجودة تحت العنوان CALCULUS .

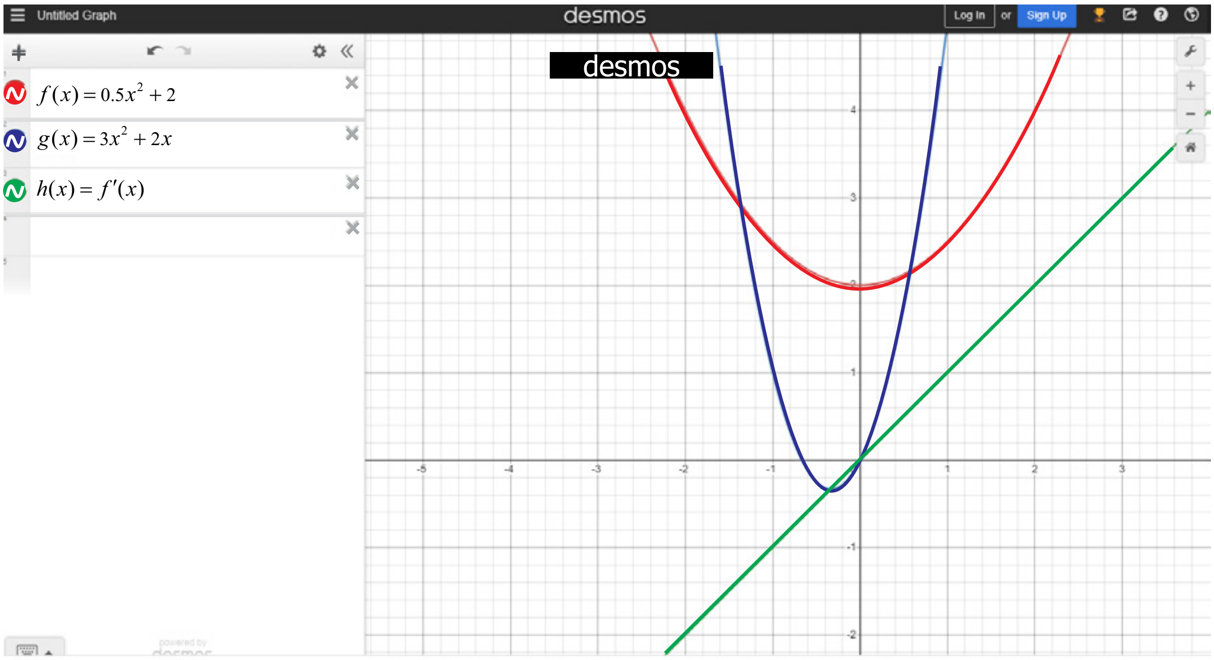
نحصل على لوحة المعطيات على: $h(x)=f'(x)$ ويُضاف رسمُ الخطّ البيانيّ للمشتقّة على لوح الرّسم بلونٍ يختلف عن لونَي الدّالّتيْن السّابقتيْن.

بالإضافة، إذا ضغطنا على إحدى نقاط تقاطع الخطوط البيانيّة، سيُشار فورًا لنقاط التّقاطع الأخرى.

يتبع في الصّفحة التّالية >>>

גרסה מיוחדת - לתלמידים - 18/10/2023

نستطيع بسهولة إيجاد إحداثيّات كل واحدة من نقاط التّقاطع إذا أوقفنا سهم الفارة على النّقطة.
عندما نقوم بهذا، ستظهر إحداثيّات النّقطة بصورة زوج أعدادٍ مُرتّب.
(بالمناسبة، يمكننا عن طريق التّجوّل على الخطوط البيانيّة معرفة إحداثيّات كلّ نقطة نقف عليها بواسطة ضغطة خفيفة على مِفتاح الفارة. **افحصوا !**).
فيما يلي الرّسم الذي حصلنا عليه بعد تنفيذ البندَيْن (أ) وَ (ب):



ملاحظات:

(1) كي نُميّز ألوان الخطوط البيانيّة للدّوال الموصوفة على لوحة الرّسم أعلاه، ننصح بمشاهدتها على شاشة الحاسوب (داخل تطبيق DESMOS).

(2) يمكننا استعمال **تطبيق** GEOGEBRA أيضًا لرسم خطوطٍ بيانيّة لدوالّ.
تعليمات تنفيذ الرّسم مشابهة جدًّا بكِلا التّطبيقَيْن (DESMOS وَ GEOGEBRA)
(تتمّ كتابة الدالّة بمساعدة لوحة مفاتيح **خاصّة** للحصول على خطّها البيانيّ)، لذا لم نُفصِّل تعليمات هذا التّطبيق هنا.